Algebra 2

Esercizi 8 - 14 novembre 2024

1. Ricordare che ogni ideale di $K[x]$ (con $K$ campo) è principale, cioè è generato da un elemento. Sia $I$ un ideale di $K[x]$ e si supponga che $f, g \in K[x]$ siano due polinomi entrambi generatori di $I$. Provare che $f$ e $g$ sono polinomi associati (cioè esiste $a \in K \setminus \{0\}$ tale che $f = ag$).

2. Siano $(f)$ e $(g)$ due ideali di $K[x]$ (con $K$ campo) e si supponga che $(f) \subseteq (g)$. Che relazione c'è tra $f$ e $g$?

3. Si supponga che l'ideale $(m) \subseteq K[x]$ ($K$ campo) sia massimale (quindi, se un altro ideale lo contiene, allora o coincide con $(m)$ o è $K[x]$). Provare che allora $m$ è irriducibile.

4. Provare che vale anche il viceversa del precedente esercizio, cioè se $m$ è un polinomio di $K[x]$ irriducibile (con $K$ campo), allora $(m)$ è un ideale massimale.

5. (Esercizio utile per risolvere i prossimi due esercizi). Sia $A$ un anello e $u \in A$ un elemento invertibile. Provare che $a \in A$ è divisore dello zero in $A$ se e solo se $ua$ è divisore dello zero (sempre in $A$) e analogamente, $a$ è invertibile se e solo se $ua$ è invertibile.

6. Si consideri l'anello quoziente $A = \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 9)$. Trovare gli elementi invertibili di $A$. (Ricordare che ogni elemento di $A$ può essere scritto nella forma $[a + bx]$, inoltre, se $b$ non è zero, l'elemento $[a + bx]$ è associato all'elemento $[q + x]$, dove $q = a/b$ e quest'ultima osservazione permette di limitare la ricerca degli elementi invertibili).

7. Nell'anello $A$ dell'esercizio precedente, trovare tutti gli elementi che sono divisori dello zero.

8. Usando il teorema cinese dei resti (per polinomi), provare che, se $f$ e $g$ sono due polinomi di $K[x]$ (con $K$ campo) e se sono primi tra loro, allora $K[x]/(fg) = K[x]/(f) \times K[x]/(g)$.

9. Sia $A = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2)$. Trovare i rappresentanti canonici (cioè polinomi di grado al massimo due) delle classi $[x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 3]$ e $[x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1]$ (suggerimento: nell'anello $A$, quanto vale $[x]^3$? E quindi quanto vale $[x]^4$ o $[x]^6$?)