

ALGEBRA 2
Esercizi 12 -13 dicembre 2024

1. Provare che se K ed L sono campi, con L estensione di K e se $a \in L$ è algebrico su K di grado n , allora $a + 1$ è algebrico su K sempre di grado n .
2. Mostrare che \mathbb{C} è un'estensione algebrica di \mathbb{R} . Qual è il suo grado?
3. Sia K un campo finito con 2^5 elementi. Provare che ogni elemento non nullo di K è primitivo.
4. Trovare gli elementi primitivi del campo $\mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$.
5. Sia $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Spiegare perché K è un campo perfetto. Trovare un elemento $a \in K$ tale che $a^3 = [2x + 1]$.
6. Si consideri ancora il campo $K = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$. Sia $t^2 + 1 \in K[t]$ (t una nuova variabile). Si scriva la fattorizzazione in $K[t]$ di $t^2 + 1$.
7. I polinomi $f = x^2 + 1$ e $g = x^2 + x + 2$ di $\mathbb{Z}_3[x]$ sono irriducibili (giustificare questa affermazione nel modo più rapido possibile), quindi $K_1 = \mathbb{Z}_3[x]/(f)$ e $K_2 = \mathbb{Z}_3[x]/(g)$ sono due campi. Trovare un isomorfismo tra i due campi.
(Suggerimento: trovare il polinomio minimo di $[x + 1] \in K_1$ su \mathbb{Z}_3 e studiare l'omomorfismo $\mathbb{Z}_3[x] \rightarrow K_1$ che fissa gli elementi di \mathbb{Z}_3 e manda $x \in \mathbb{Z}_3[x]$ in $[x + 1] \in K_1$).