

ALGEBRA 2
Esercizi 3 - 10 ottobre 2025

1. Siano G_1 e G_2 due gruppi e sia $g_1 \in G_1$ di ordine m e $g_2 \in G_2$ di ordine n . Qual è l'ordine dell'elemento $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$?
2. Provare che $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10}$ e $\mathbb{Z}_{60}$ non sono isomorfi. Più in generale, siano $a, b \in \mathbb{N}$ e sia $d = \text{mcd}(a, b)$ con $d > 1$. Provare che $\mathbb{Z}_{ab}$ non è isomorfo a $\mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b$.
3. Siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e sia $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Provare che se $a \equiv b \pmod{m}$, allora $ac \equiv bc \pmod{m}$. Vale anche il viceversa? (cioè se $ac \equiv bc \pmod{m}$, allora $a \equiv b \pmod{m}$?).
4. Usando il piccolo teorema di Fermat, provare che 253 non è un numero primo (può essere d'aiuto sapere che $2^8 \equiv 3 \pmod{253}$ e $3^{31} \equiv 179 \pmod{253}$).
5. Provare che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ il numero

$$A(n) = 4n^{18} + n^{15} + 2n^7 + 3n^6 - n^3 + 5n + 21$$

è divisibile per 7. Per quali valori di n , $A(n)$ risulta divisibile per 3?

6. Sia $A = \{f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}\}$ l'insieme di tutte le applicazioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$. Sull'insieme A si può definire una struttura di anello nel seguente modo:

$$\begin{aligned}(f + g)(n) &= f(n) + g(n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \\ (f \cdot g)(n) &= f(n) \cdot g(n) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Provare che in questo modo A risulta effettivamente un anello commutativo unitario. Siano poi $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ and $f_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ date da, rispettivamente: $f_1(n) = 0$ se $n \neq 1$ e $f_1(1) = 1$, mentre $f_2(n) = 0$ se $n \neq 2$ e $f_2(2) = 1$. Provare che l'ideale generato da f_1 ed f_2 è principale.