Algebra 2

Esercizi 3 - 10 ottobre 2024

1. Si consideri il gruppo $(\mathbb{R}, +)$, cioè il gruppo (rispetto alla somma) dei numeri reali. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, fissato. Si provi che l'insieme
$$M_a = \{na \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
è, rispetto alla somma, un sottogruppo normale di $(\mathbb{R}, +)$.

2. Sia $H = \mathbb{R}_{>0}$ l'insieme dei numeri reali positivi. Provare che è un gruppo rispetto al prodotto ed è un sottogruppo normale del gruppo G dei numeri reali non nulli (sempre rispetto al prodotto). Quanti elementi ha il gruppo quoziente G/H?

3. Sia A un dominio d'integrità (come sempre, commutativo, unitario). Sia $p \in A$ non nullo. Provare che $p \in A$ è primo se e solo se l'ideale (p) è un ideale primo.

4. Sia A un anello finito. Provare che se A è un dominio d'integrità, allora A è un campo.

5. Sia A un anello finito. Provare che allora gli elementi di A o sono invertibili, o sono divisori dello zero.

6. Calcolare $2^{252} \bmod 253$. Dedurre che 253 non è un numero primo. Può essere d'aiuto sapere che $(252)_{10} = (11111100)_2$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{Z}$ il numero $n^{13} + n^{12} + n^{11} - n^3 + an^2 + 10n$ è divisibile per 11 per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

8. Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di congruenze:
$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 4 \\ x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 4 \mod 5 \end{cases}$$