Corso di laurea in Matematica
Algebra2
a.a. 2024–25
Scritto 2 settembre 2025

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Si consideri in $\mathbb{Z}[x]$ l'insieme $I = \{2a + xb \mid a, b \in \mathbb{Z}[x]\}$. Si provi che:

   (a) I è un ideale di $\mathbb{Z}[x]$;

   (b) $x, 2 \in I$, $1 \notin I$;

2. Dopo aver spiegato perchè il polinomio $f = x^2+3x+3 \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile, trovare l'inverso di $[x + 2] \in \mathbb{Q}[x]/(f)$.

3. Quali sono i campi K intermedi tra $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ (cioè i campi che sono estensione di $\mathbb{Q}$ e sottocampi di $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$)?

4. Provare che il seguente polinomio:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^5 + \frac{a(a+1)}{2}x^3 + (2a+1)x + 1$$

   è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ per ogni $a \in \mathbb{N}$.

5. Sia $\phi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ l'omomorfismo di anelli tale che $\phi(q) = q$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$ e $\phi(x) = -2x + 1$ e poi esteso nell'unico modo possibile. Provare che ϕ è un isomorfismo di anelli e dire chi è il suo inverso.

1. a) I deve essere sottogruppo, quindi se $\alpha, \beta \in I$, anche $\alpha - \beta$ deve stare in I.
Se $\alpha = 2a + xb$ e $\beta = 2a' + xb'$, $\alpha - \beta = 2(a-a') + x(b-b')$ e quindi $\alpha - \beta \in I$ perché è della forma $2 \cdot (\dots) + x \cdot (\dots)$.
Assorbimento:
Se $f \in \mathbb{Z}[x]$ e $\alpha = 2a + xb$, allora $f\alpha = 2a \cdot f + xb \cdot f$ e quindi $f\alpha$ è ancora della forma $2 \cdot (\dots) + x \cdot (\dots)$.

b) $x = 2 \cdot 0 + x \cdot 1 \in I$
$2 = 2 \cdot 1 + x \cdot 0 \in I$
Se fosse $1 \in I$ esisterebbero $a, b \in \mathbb{Z}[x]$ tali che $1 = 2 \cdot a + x \cdot b$; valutando questa uguaglianza in $x = 0$ otteniamo $1 = 2 \cdot a(0) + 0 \cdot b(0)$ cioè $1 = 2 \cdot a(0)$ dove $a(0) \in \mathbb{Z}$.
Quindi **2** risulterebbe invertibile in $\mathbb{Z}$, assurdo, pertanto $1 \notin I$

2. Il pol $f = x^2+3x+3 \in \mathbb{Q}[x]$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$ se lo è in $\mathbb{Z}[x]$. Ma in $\mathbb{Z}[x]$ è irriducibile per Eisenstein (con $p=3$).
Sia allora $K = \mathbb{Q}[x]/(f)$, K è campo. Gli elem di K sono del tipo $[ax+b]$ con $a, b \in \mathbb{Q}$.
L'inverso di $[x+2]$ sarà della forma $[ax+b]$ con
$[x+2]\cdot[ax+b] = [1]$
cioè $[ax^2+(2a+b)x+2b] = [1]$ cioè
$[ax^2+(2a+b)x+2b-1] = [0]$ cioè deve essere
$ax^2+(2a+b)x+2b-1 \in (f)$.
Pertanto il resto della divisione di $ax^2+(2a+b)x+2b-1$ per f deve essere il polinomio nullo. Eseguendo la divisione, si trova:
$ax^2+(2a+b)x+2b-1 = a(x^2+3x+3) + x(b-a) + 2b-3a-1$
(questo se $a \neq 0$, se $a=0$ però l'inverso di $[x+2]$ sarebbe della forma $[b]$ e questo non è possibile).
Pertanto $\begin{cases} b-a=0 \\ 2b-3a-1=0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$
Allora l'inverso di $[x+2]$ è $[-x-1]$
(Verifica: $[x+2]\cdot[-x-1] = [-x^2-3x-2] = [-x^2-3x-2+x^2+3x+3] = [1]$)

3. Sia $M = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$. Poiché il polinomio minimo su $\mathbb{Q}$ di $\sqrt[3]{2}$ è x^3-2, $[M:\mathbb{Q}]=3$.
Sia K campo t.c. $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq M$. Per teorema della torre $[M:\mathbb{Q}] = [M:K]\cdot[K:\mathbb{Q}]$. Se $d=[K:\mathbb{Q}]$ abbiamo che $3 = [M:K]\cdot d$. Quindi d divide 3.
Allora $d=1$ (e quindi $K=\mathbb{Q}$) o $d=3$ (e quindi $K=M$). Ci sono allora solo 2 possibilità per K: $K = \begin{cases} \mathbb{Q} \\ M \end{cases}$.

4. $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Sia $g = 2f$, allora $g = x^5 + a(a+1)x^3 + (2a+1)\cdot 2x + 2$ e per Eisenstein g è irriducibile, in quanto $p = 2$ divide il coefficiente di x^3 perché $a(a+1)$ è sempre pari.
Per il lemma di Gauss, se g è irriducibile in $\mathbb{Z}[x]$, f è irriducibile in $\mathbb{Q}[x]$.

5. Se φ ha un inverso ψ, deve essere $\psi(q) = q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$ e $\psi(-2x+1) = x$. Se ψ è omomorfismo, vale:
$\psi(-2x+1) = -2\psi(x) + 1$. Allora $\psi(x)$ deve essere $\frac{1}{2}(1-x)$.
Definiamo allora $\psi : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x]$ nel seguente modo:
$\psi(q) = q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$, $\psi(x) = \frac{1}{2}(1-x)$ e estendiamo ψ nell'unico modo possibile ad omomorfismo con il teorema di estensione.
Allora $(\varphi \circ \psi)(q) = q \qquad (\varphi \circ \psi)(x) = x$. Quindi $\varphi \circ \psi$ si comporta come l'identità negli elementi di $\mathbb{Q}$ e su x.
Per il teorema di estensione, abbiamo allora che $\varphi \circ \psi$ coincide con l'identità su tutto $\mathbb{Q}[x]$.
Analogamente per $\psi \circ \varphi$.