Corso di laurea in Matematica
Algebra 2
a.a. 2024–25
Scritto 10 giugno 2025

Svolgere i seguenti esercizi. Le risposte vanno giustificate con brevità e chiarezza.

1. Siano G_1 e G_2 due gruppi e sia $\phi : G_1 \longrightarrow G_2$ un omomorfismo di gruppi. Provare che se G_2 è abeliano, allora anche $G_1/\ker(\phi)$ lo è.
2. Sia A un dominio d'integrità e sia $I = (a)$ un ideale principale e proprio di A, con $a \neq 0$. Provare che l'ideale I è primo se e solo se l'elemento $a \in A$ è primo.
3. Sia K un campo, siano $f(x), g(x) \in K[x]$ due polinomi entrambi di grado n. Si supponga che esistano $a_0, \ldots, a_n \in K$ a due a due distinti tali che $f(a_i) = g(a_i)$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, n$. Provare che $f(x) = g(x)$.
4. Siano K, L due campi tali che L è un'estensione di K di grado m. Provare che se $a \in L$, allora a è algebrico su K di grado n ed inoltre n è un divisore di m.
5. Trovare tutti i divisori dello zero dell'anello $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

1. Dal primo teorema di omomorfismo, $G_1/\ker\varphi$ è isomorfo a $\mathrm{Im}\,\varphi$.
Ma $\mathrm{Im}\,\varphi$ è un sottogruppo di G_2 che è abeliano, quindi $\mathrm{Im}\,\varphi$ è un gruppo abeliano. Da qui segue che $G_1/\ker\varphi$ è un gruppo abeliano

2. Sia $I=(a)$ ideale primo. Vogliamo provare che a è primo.
(cioè $a\neq 0$ a non unitario e $a|uv \Rightarrow a|u$ o $a|v$).
$a\neq 0$ per ipotesi, a non unitario perché I è proprio. Supponiamo che $a|uv$ allora $uv=ka$ cioè $\cancel{a\in}$ $uv\in(a)=I$ quindi, essendo I primo, $u\in I$ o $v\in I$. Allora $a|u$ o $a|v$.
Viceversa se a è primo, $a\neq 0$ e a non è unitario, quindi $I\neq(0)$ e I è proprio. Se $uv\in I$ allora $uv\in(a)$ cioè $a|uv$ allora $a|u$ o $a|v$, pertanto $\cancel{u}\in(a)=I$ o $v\in(a)=I$.

3. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. h è un polinomio di grado al più n. Inoltre $h(a_i) = f(a_i) - g(a_i)$ $\forall i=0,\dots,n$. Quindi $h(x)$ ha almeno $n+1$ radici distinte. Allora, per il principio di D'Alembert, $h(x)$ è il polinomio nullo, cioè $f(x)-g(x)=0$. Quindi $f(x)=g(x)$.

4. Dall'ipotesi $[L:K]=m$. Quindi L è un'estensione finita di K e pertanto è un'estensione algebrica di K. Allora ogni $a \in L$ è algebrico su K. Sia $n = \deg a$ il grado di $a \in L$ su K. Il campo $K[a]$ è un campo intermedio tra K ed L.

Per il teorema delle torri:

$$[L:K] = [L:K[a]]\cdot[K[a]:K]$$

cioè $m = [L:K[a]]\cdot n$ perché $[K[a]:K]=n$.

Quindi $n \mid m$.

5. Sia $(a,b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$. (a,b) è div. zero se $\exists (c,d) \neq 0 : (a,b)\cdot(c,d)=0$.
Quindi $ac=0$ e $bd=0$. Siccome $(c,d)\neq 0$ deve essere $c\neq 0$ o $d \neq 0$.
Sia $c\neq 0$. Se scegliamo $d=0$ vediamo che se $a\cdot c=0$, sono div dello zero tutti gli elementi della forma (a,b) per ogni $b \in \mathbb{Z}_4$. Ma $ac=0$ (con $c\neq 0$) significa che a è div. dello zero in $\mathbb{Z}_3$, cioè $a=0$. In questo caso troviamo come div. dello 0 tutti gli elementi della forma $(0,b)$ $\forall b\in\mathbb{Z}_4$.
Sia $d\neq 0$. Se scegliamo $c=0$ vediamo che se $bd=0$ sono div dello zero tutti gli elementi della forma (a,b) per ogni $a\in\mathbb{Z}_3$. Ma $bd=0$ comporta che b sia div. dello zero in $\mathbb{Z}_4$, cioè $b=0$ o $b=2$.
Allora in questo caso troviamo che sono div dello 0 tutti gli elementi della forma $(a,0)$ $\forall a \in \mathbb{Z}_3$ e $(a,2)$ $\forall a\in\mathbb{Z}_3$.
In conclusione, tutti gli elem. div dello zero sono:
$(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (2,0), (1,2), (2,2)$