1. $H = \{ a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \}$

Se $a, b \in H$, $a \cdot b \in H$ e $a^{-1} \in H$, quindi H è sottogr. di G.

Sia $b \in G$. Consideriamo $Hb = \{ ab \mid a > 0 \}$

Se $b > 0$ allora $Hb = H$, se $b < 0$ allora $Hb = \{ -a \mid a \in H \}$. Quindi i laterali di H in G sono 2.

Consideriamo l'appl $\varphi : G \longrightarrow C_2 = \{-1, 1\}$ data da $\varphi(g) =$ segno di $g = \dfrac{|g|}{g}$.

φ è omom di gruppi, è suriettivo e $\ker \varphi = H$

Quindi $G/_{\ker \varphi} = G/_H = C_2$.

2. $n^{13} + n^{12} + n^{11} - n^3 + a n^2 + 10 n$

Per Fermat $n^{11} \equiv n \mod 11$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

Quindi $n^{13} + n^{12} + n^{11} - n^3 + a n^2 + 10 n \equiv_{11} n^3 + n^2 + n - n^3 + a n^2 + 10 n$

$\equiv_{11} n^2 (1 + a) + 11 n \equiv_{11} n^2 (1 + a)$

deve essere: $n^2 (1 + a) \equiv_{11} 0$ $\forall n$. Cioè $a \equiv_{11} 10$ i.e. $a = 10 + 11k$, $k \in \mathbb{Z}$

3. $|G| = 91 = 7 \cdot 13$

$N_7 =$ n° 7 - Sylow sottogr.

$N_{13} =$ n° 13 - Sylow sottogr.

$N_7 \mid 13 \quad N_7 \equiv 1 \mod 7 \Rightarrow N_7 = 1$

$N_{13} \mid 7 \quad N_{13} \equiv 1 \mod 13 \longrightarrow N_{13} = 1$

Quindi G ha un solo sottogr. di ordine 7 e un solo sottogr. di ordine 13. (necess. normali)
G ha 4 sottogr. normali. $\{1\}$, G, H, K con $|H| = 7$
$|K| = 13$.

4. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ Cerco pol. rid. e irrid. monici di 2. $a_0 + a_1 x + x^2$. Sono 25.

Un pol monico riducibile di grado 2 e' della forma $(\alpha + x)(\beta + x)$ dove $\alpha, \beta \in \{0, \dots 4\}$ e si può scegliere $\alpha \leq \beta$. Quindi
$\alpha = 0 \quad \beta = 0, 1, 2, 3, 4$, $\alpha = 1 \quad \beta = 1, 2, 3, 4$, $\dots$, $\alpha = 4, \beta = 4$
In totale sono $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$.
I pol. irrid monici sono allora $25 - 15 = 10$
I pol rid grado 2 sono $4 \cdot 15 = 60$. I pol. irrid di grado 2 sono $4 \cdot 10 = 40$.

5. $a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$ allora $a^3 = 2 + \sqrt{2}$ cioè
$(a^3 - 2) = \sqrt{2}$ cioè $a^6 - 4a^3 + 4 = 2$ da cui
$a^6 - 4a^3 + 2 = 0$.
Quindi a soddisfa al polinomio $f(x) = x^6 - 4x^3 + 2$
$f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, è irrid. per Eisenstein. Quindi è il pol. minimo di a su $\mathbb{Q}$. a ha grado 6 su $\mathbb{Q}$.