Scritto 12 febbraio 25

1. A dominio. Sia $p \in A \setminus \{0\}$ primo. Vogliamo vedere che (p) è ideale primo.

Se $ab \in (p)$ allora $\exists\, k \in A : ab = kp$

Quindo p divide kp e allora p divide ab. Poiché p è primo, p divide a (o divide b). Quindo $\exists\, \alpha \in A : a = \alpha p$ allora $a \in (p)$. Analogo se p divide b.

Viceversa, sia (p) primo. Vogliamo vedere che p è primo. Se (p) è ideale primo, $(p) \neq A$ quindo p non può essere unitario. Se poi $p \mid ab$ allora $\exists\, k \in A : ab = kp$, allora $ab \in (p)$ allora $a \in (p)$ (o $b \in (p)$) e quindo $\exists\, \alpha \in A : a = \alpha p$, cioè $p \mid a$ (analogo se $b \in (p)$).

2. $P = \mathbb{Z}_4[x]$. Un pol. di grado n in P è della forma $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con $a_i \in \mathbb{Z}_4$, $a_n \neq 0$

Quindo ci sono 4 scelte per a_0, 4 scelte per a_1, ecc. e solo 3 scelte per a_n. Il numero totale dei polinomi è allora $\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 4}_{n \text{ volte}} \cdot 3 = 3 \cdot 4^n$.

Un divisore dello 0 di grado 1 è della forma $a + bx$ con $b \neq 0$. Se $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \neq 0$ è tale che $(a + bx)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = 0$, allora $b a_n = 0$ $a \cdot a_0 = 0$ quindo a e b devono essere divisori dello zero in $\mathbb{Z}_4$. Quindo $a \in \{0, 2\}$ e $b = 2$.

Gli unici polinomi div. dello zero di grado 1 sono allora della forma: $2x$ o $2+2x$.
Entrambi sono effettivamente divisori dello 0, perché, quando sono moltiplicati per 2 si ottiene 0.

3. Sia $g \in \mathbb{Z}[x]$ di grado n tale che $\varphi(g)$ ha grado n e sia $\varphi(g)$ irriducibile.
Sia $g = h \cdot l$ con $h, l \in \mathbb{Z}[x]$. Allora $\varphi(g) = \varphi(h) \cdot \varphi(l)$ e $\deg \varphi(g) = n = \deg \varphi(h) + \deg \varphi(l)$.
Poiché $\deg \varphi(h) \leq \deg h$ e $\deg \varphi(l) \leq \deg l$ e poiché $n = \deg h + \deg l$, deve essere $\deg \varphi(h) = \deg h$ e $\deg \varphi(l) = \deg l$. Ma $\varphi(g)$ è irriducibile, quindi ad esempio $\varphi(h)$ deve essere invertibile, cioè di grado 0, allora l deve essere di grado 0, quindi invertibile e allora g è irriducibile.

4. $4x^6 + 3x^5 + 6ax^4 + 9x^3 + a(a^2-1)x^2 + 15$
è irriducibile $\forall a \in \mathbb{Z}$. Infatti, per Eisenstein, $p=3$ divide il termine noto, p^2 non divide il termine noto, p non divide il coefficiente direttivo e p divide tutti gli altri coefficienti $\forall a \in \mathbb{Z}$ (infatti $a(a^2-1) = (a-1)a(a+1)$ è sempre multiplo di 3).

5. Sia $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \mathbb{Z}_3[x]$ di grado 3, quindi $a_0, a_1, a_2 \in \{0,1,2\}$, $a_3 \in \{1,2\}$.

$D(f) = a_1 + 2a_2 x + \cancel{3a_3 x^2}$

$D(D(f)) = 2a_2.$

Allora $D(D(f)) = 0$ sse $2a_2 = 0$ sse $a_2 = 0.$

Pertanto tutti i polinomi sono in numero di

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18.$$