Premesse/Notazioni
$P = K[x_1, \dots, x_n]$, $r \geq 1$; $e_1, \dots, e_r$ base canonica di P^r, σ un term order su $T\langle e_1, \dots, e_r\rangle$. Fissati $g_1, \dots, g_s \in P^r$, sia $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_s)$ e $M = \langle g_1, \dots, g_s\rangle \subseteq P^r$; $\mathrm{LM}_\sigma(g_i) = c_i t_i e_{\gamma_i}$ (con $c_i \in K \setminus \{0\}$, $t_i \in T$ e $\gamma_i \in \{1, \dots, r\}$). Sia $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$ base canonica di P^s. Definiamo

$$\Phi : P^s \longrightarrow P^r \quad \text{data da} \quad \phi(\varepsilon_i) = \mathrm{LM}_\sigma(g_i)$$

$$\phi : P^s \longrightarrow P^r \quad \text{data da} \quad \phi(\varepsilon_i) = g_i$$

Gradazione di P^s come P-modulo $T\langle e_1, \dots, e_r\rangle$-graduato:

$$(P^s)_{te_i} = \left\{ \sum_{j=1}^{s} c_j t_j \varepsilon_j \mid c_j \neq 0 \Rightarrow t_j \mathrm{LT}_\sigma(g_j) = te_i \right\}$$

Se $m \in P^s$, allora dalla gradazione di P^s segue che $m = m_1 + \dots + m_k$ con $m_1 \in (P^s)_{t_1 e_{\gamma_1}}, \dots, m_k \in (P^s)_{t_k e_{\gamma_k}}$ e si può assumere che: $t_1 e_{\gamma_1} >_\sigma \dots >_\sigma t_k e_{\gamma_k}$. Si pone:

$$\begin{aligned} \deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m) &= t_1 e_{\gamma_1} \quad (\sigma\text{−grado di } m) \\ \mathrm{LF}_{\sigma,\mathcal{G}}(m) &= m_1 \quad (\text{forma direttiva di } m) \end{aligned}$$

$$\mathrm{Siz}(\mathcal{G}) = \ker(\phi) = \left\{ \sum_{j=1}^{s} f_j \varepsilon_j \mid \sum_{j=1}^{s} f_j g_j = 0 \right\}$$

$$\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) = \ker(\Phi) = \left\{ \sum_{j=1}^{s} f_j \varepsilon_j \mid \sum_{j=1}^{s} f_j \mathrm{LM}_\sigma(g_j) = 0 \right\}$$

Le sequenze:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Siz}(\mathcal{G}) \longrightarrow P^s \xrightarrow{\phi} P^r \xrightarrow{\pi} P^r/M \longrightarrow 0$$

e

$$0 \longrightarrow \mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) \longrightarrow P^s \xrightarrow{\Phi} P^r \xrightarrow{\pi} P^r/\mathrm{LM}_\sigma(M) \longrightarrow 0$$

sono esatte e la seconda è una sequenza di P-moduli $T\langle e_1, \dots, e_r\rangle$-graduati.

Teorema 1 *Definiamo:*

$$t_{ij} = \frac{mcm(t_i, t_j)}{t_i}; \qquad \mathbb{B} = \{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq r;\ \gamma_i = \gamma_j\}$$

e, per ogni $(i,j) \in \mathbb{B}$:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{c_i} t_{ij} \varepsilon_i - \frac{1}{c_j} t_{ji} \varepsilon_j \in P^s$$

Vale:

1. σ_{ij} *è una sizigia di* $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ *ed è omogenea di* σ*-grado* $\mathrm{mcm}(t_i, t_j)$*;*

2. $\{\sigma_{ij} \mid (i,j) \in \mathbb{B}\}$ *è un sistema di generatori (finito) di* $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$*.*

Proposizione 2 *Sia* $m = \sum f_j \varepsilon_j \in P^s$*. Allora:*

1. $\deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m) = \max_\sigma \{\mathrm{LT}_\sigma(f_j g_j) \mid j \in \{1, 2, \ldots, s\},\ f_j g_j = 0\}$

2. $\mathrm{LF}_{\sigma,\mathcal{G}}(m) = \sum \overline{f_j}\varepsilon_j$ *dove:*

$$\overline{f_j} = \begin{cases} 0 & \text{se } f_j = 0 \text{ o se } \mathrm{LT}_\sigma(f_j g_j) <_\sigma \deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m) \\ c_j t_j & \text{se } \mathrm{LT}_\sigma(f_j g_j) = \deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m) \text{ e } c_j, t_j \text{ sono tali che} \\ & \mathrm{LM}_\sigma(f_j g_j) = c_j t_j \mathrm{LM}_\sigma(g_j) \end{cases}$$

Definizione Sia $m \in P^s$; m si dice un sollevamento di un elemento $\overline{m} \in P^s$ se $\mathrm{LF}_{\sigma,\mathcal{G}}(m) = \overline{m}$.

Proposizione 3 *Sia* $\{\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_p}\}$ *un sistema di generatori omogeneo del modulo* $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ *e siano* $m_1, \ldots, m_p$ *sollevamenti di* $\overline{m_1}, \ldots, \overline{m_p}$*. Allora l'insieme finito* $\{m_1, \ldots, m_p\}$ *è un sistema di generatori di* $\mathrm{Siz}(\mathcal{G})$*.*

Proposizione 4 *Sia* $m \in P^s \setminus \mathrm{Siz}(\mathcal{G})$*. Allora vale:*

1. $\mathrm{LT}_\sigma(\phi(m)) \leq_\sigma \deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m)$*;*

2. $\mathrm{LF}_{\sigma,\mathcal{G}}(m) \in \mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G})) \Leftrightarrow \mathrm{LT}_\sigma(\phi(m)) <_\sigma \deg_{\sigma,\mathcal{G}}(m)$

Sia $m \in \mathrm{Siz}(\mathcal{G})$*. Allora*

3 $\mathrm{LF}_{\sigma,\mathcal{G}}(m) \in \mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$.

Teorema 5 *Sono equivalenti:*

1. *Per ogni* $m \in M \setminus \{0\}$ *esistono* $f_1, \ldots, f_s \in P$ *tali che* $m = \sum f_i g_i$ *e* $\mathrm{LT}_\sigma(m) \geq_\sigma \mathrm{LT}_\sigma(f_i g_i)$ *per ogni* i *tale che* $f_i g_i \neq 0$ *(i.e.* $\mathrm{LT}_\sigma(m) \geq_\sigma \deg_{\sigma,\mathcal{G}}(\sum f_i \varepsilon_i)$*);*

2. *Per ogni* $m \in M \setminus \{0\}$ *esistono* $f_1, \ldots, f_s \in P$ *tali che* $m = \sum f_i g_i$ *e* $\mathrm{LT}_\sigma(m) = \max_\sigma \{\mathrm{LT}_\sigma(f_i g_i) \mid i \text{ tale che } f_i g_i \neq 0\}$ *(i.e.* $\mathrm{LT}_\sigma(m) = \deg_{\sigma,\mathcal{G}}(\sum f_i \varepsilon_i)$*);*

3. $\mathrm{LT}_\sigma(g_1), \ldots, \mathrm{LT}_\sigma(g_s)$ *generano* $\mathrm{LT}_\sigma(M)$*;*

4. *Ogni elemento omogeneo di* $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ *ha un sollevamento in* $\mathrm{Siz}(\mathcal{G})$*;*

5. *Esiste un sistema di generatori omogeneo di* $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ *fatto da elementi che hanno un sollevamento in* $\mathrm{Siz}(\mathcal{G})$*;*

6. *Esiste un sistema di generatori omogeneo finito di* $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ *fatto da elementi che hanno un sollevamento in* $\mathrm{Siz}(\mathcal{G})$*;*

Definizione Per ogni $(i,j) \in \mathbb{B}$ sia

$$S_{ij} = \phi(\sigma_{ij})$$

S_{ij} si dice S-vettore di g_i e g_j.

La numerazione delle proposizioni e dei teoremi citati si riferisce al libro di Kreuzer Robbiano *Computational Commutative Algebra 1.*

Sia $P := \mathbb{Q}[x,y,z]$ e sia M il sottomodulo di P^1 (cioè l'ideale) generato da:

$$G := \{xy^3 - z,\ x^3y - 1,\ x^2z - y^2,\ y^5 - xz^2\}$$

Si può verificare che G è una base di Gröbner di M rispetto al term order $\sigma =$ `DegRevLex`.

Chiamiamo $g_1, \ldots, g_4$ i quattro elementi di G e poniamo:

$$\mathcal{G} := (xy^3 - z,\ x^3y - 1,\ x^2z - y^2,\ y^5 - xz^2)$$

Vogliamo calcolare il modulo $\mathrm{Siz}(\mathcal{G}) \subseteq P^4$, cioè il nucleo della mappa:

$$\phi : P^4 \longrightarrow P \quad \text{data da} \quad \phi(\varepsilon_i) := g_i$$

dove ε_i $(i = 1, \ldots, 4)$ è la base canonica di P^4. Prima di tutto calcoliamo $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$, cioè il nucleo della mappa:

$$\Phi : P^4 \longrightarrow P \quad \text{data da} \quad \Phi(\varepsilon_i) := \mathrm{LM}_\sigma(g_i)$$

Questo si può fare grazie al teorema 2.3.7:
Vale:

$$\mathrm{LM}_\sigma(g_1) = xy^3, \quad \mathrm{LM}_\sigma(g_2) = x^3y, \quad \mathrm{LM}_\sigma(g_3) = x^2z, \quad \mathrm{LM}_\sigma(g_4) = y^5$$

(seguendo le notazioni del teorema 2.3.7 avremmo dovuto scrivere $\mathrm{LM}_\sigma(g_1) = xy^3e_1$, ecc.) quindi un sistema di generatori di $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$ è dato da:

$$\begin{aligned}
\sigma_{12} &= x^2\varepsilon_1 - y^2\varepsilon_2 \\
\sigma_{13} &= xz\varepsilon_1 - y^3\varepsilon_3 \\
\sigma_{14} &= y^2\varepsilon_1 - x\varepsilon_4 \\
\sigma_{23} &= z\varepsilon_2 - xy\varepsilon_3 \\
\sigma_{24} &= y^4\varepsilon_2 - x^3\varepsilon_4 \\
\sigma_{34} &= y^5\varepsilon_3 - x^2z\varepsilon_4
\end{aligned}$$

Ogni σ_{ij} è omogeneo (ad esempio i due addendi di σ_{12} hanno grado $\mathrm{LT}_\sigma(x^2g_1) = \mathrm{LT}_\sigma(y^2g_2) = \mathrm{mcm}(xy^3, x^3y) = x^3y^3$).
Poichè sappiamo a priori che G è una σ-base di Gröbner, per la prop. 2.3.10 e la prop. 2.3.12 sappiamo che ogni σ_{ij} può essere sollevato ad un elemento $\tau_{ij} \in \mathrm{Siz}(\mathcal{G})$. Dalla prop. 2.3.11 abbiamo allora che l'insieme

$$G_1 = \{\tau_{ij} \mid 1 \le i < j \le 4\}$$

è un sistema di generatori di $\mathrm{Siz}(\mathcal{G})$. Pertanto per calcolare le sizigie di $\mathcal{G}$ bisogna saper sollevare in $\mathcal{G}$ gli elementi $\sigma_{ij} \in \mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\sigma(\mathcal{G}))$. La prop. 2.5.2 mostra come calcolare i sollevamenti di σ_{ij}. Cominciamo con σ_{12}: sia $S_{12} = \phi(\sigma_{12}) = -x^2z + y^2$. Poichè G è σ-base di Gröbner, $S_{12} \longrightarrow_G 0$ e quindi con l'algoritmo di divisione (teorema 1.6.4) possiamo calcolare esplicitamente la riduzione a 0 di S_{12}. Otteniamo:

$$S_{12} = -g_3, \quad \text{pertanto} \quad \tau_{12} = \sigma_{12} + \varepsilon_3$$

quindi $\tau_{12} = x^2\varepsilon_1 - y^2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Analogamente applichiamo l'algoritmo di divisione agli altri $S_{ij} = \phi(\sigma_{ij})$. Riassumendo tutti i conti abbiamo:

$$\begin{array}{lllllll}
S_{12} & = & \phi(\sigma_{12}) & = & -x^2z + y^2 & = & -g_3 \\
S_{13} & = & \phi(\sigma_{13}) & = & y^5 - xz^2 & = & g_4 \\
S_{14} & = & \phi(\sigma_{14}) & = & x^2z^2 - y^2z & = & zg_3 \\
S_{23} & = & \phi(\sigma_{23}) & = & xy^3 - z & = & g_1 \\
S_{24} & = & \phi(\sigma_{24}) & = & x^4z^2 - y^4 & = & (x^2z + y^2)g_3 \\
S_{34} & = & \phi(\sigma_{34}) & = & -y^7 + x^3z^3 & = & xz^2g_3 - y^2g_4
\end{array}$$

e quindi

$$\begin{array}{lllll}
\tau_{12} & = & \sigma_{12} + \varepsilon_3 & = & x^2\varepsilon_1 - y^2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\
\tau_{13} & = & \sigma_{13} - \varepsilon_4 & = & xz\varepsilon_1 - y^3\varepsilon_3 - \varepsilon_4 \\
\tau_{14} & = & \sigma_{14} - z\varepsilon_3 & = & y^2\varepsilon_1 - x\varepsilon_4 - z\varepsilon_3 \\
\tau_{23} & = & \sigma_{23} - \varepsilon_1 & = & z\varepsilon_2 - xy\varepsilon_3 - \varepsilon_1 \\
\tau_{24} & = & \sigma_{24} - (x^2z + y^2)\varepsilon_3 & = & y^4\varepsilon_2 - x^3\varepsilon_4 - (x^2z + y^2)\varepsilon_3 \\
\tau_{34} & = & \sigma_{34} - xz^2\varepsilon_3 + y^2\varepsilon_4 & = & (y^5 - xz^2)\varepsilon_3 + (-x^2z + y^2)\varepsilon_4
\end{array}$$

In questo modo abbiamo determinato un sistema di generatori di $\mathrm{Siz}(\mathcal{G}) = \ker(\phi)$.

Se ora definiamo sui termini $T\langle\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4\rangle$ di P^4 il seguente ordinamento $<_\tau$:

$$t\varepsilon_i \leq_\tau t'\varepsilon_j \quad \begin{cases} \text{se } \ \mathrm{LT}_\sigma(tg_i) <_\sigma \mathrm{LT}_\sigma(t'g_j) \\ \text{o, se } \ \mathrm{LT}_\sigma(tg_i) = \mathrm{LT}_\sigma(t'g_j), \quad \text{allora } \ i > j \end{cases}$$

Per la prop. 3.1.4 l'insieme G_1 precedentemente trovato non è soltanto un sistema di generatori per $\mathrm{Siz}(\mathcal{G}) \subseteq P^4$, ma è anche una base di Gröbner rispetto al term order $<_\tau$.

Siamo quindi nella seguente situazione: abbiamo il P-modulo $\mathrm{Siz}(\mathcal{G})$ e una sua τ-base di Gröbner G_1 fatta dai vettori τ_{ij} sopra descritti. Sia

$$\mathcal{G}_1 = (\tau_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq 4)$$

Da G_1 possiamo calcolare, procedendo con la stessa strategia usata sopra, un sistema di generatori di $\mathrm{Siz}(\mathcal{G}_1) \subseteq P^6$.

Siano

$$\phi_1 : P^6 \longrightarrow P^4 \quad \text{e} \quad \Phi_1 : P^6 \longrightarrow P^4$$

date da:

$$\phi_1(\eta_i) = h_i, \quad \Phi_1(\eta_i) = \mathrm{LM}_\tau(h_i) \quad (i = 1, \dots, 6)$$

dove $\eta_1, \dots, \eta_6$ è la base canonica di P^6 e $h_1 = \tau_{12}, h_2 = \tau_{13}, \dots, h_6 = \tau_{34}$.
Come prima dobbiamo iniziare con il calcolo dei generatori di $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\tau(\mathcal{G}_1))$, quindi abbiamo:

$$\begin{array}{rclcrcl}
\mathrm{LM}_\tau(h_1) & = & x^2\varepsilon_1, & & \mathrm{LM}_\tau(h_2) & = & xz\varepsilon_1, \\
\mathrm{LM}_\tau(h_3) & = & y^2\varepsilon_1, & & \mathrm{LM}_\tau(h_4) & = & z\varepsilon_2, \\
\mathrm{LM}_\tau(h_5) & = & y^4\varepsilon_2, & & \mathrm{LM}_\tau(h_6) & = & y^5\varepsilon_3
\end{array}$$

Un sistema di generatori di $\mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\tau(\mathcal{G}))$ è dato da:

$$\begin{array}{rcl}
\theta_{12} & = & z\eta_1 - x\eta_2 \\
\theta_{13} & = & y^2\eta_1 - x^2\eta_3 \\
\theta_{23} & = & y^2\eta_2 - xz\eta_3 \\
\theta_{45} & = & y^4\eta_4 - z\eta_5
\end{array}$$

Gli elementi θ_{ij} ora costruiti sono omogenei. Ad esempio i due addendi di θ_{12} hanno grado $\mathrm{LT}_\sigma(zh_1) = x^2z\varepsilon_1$ e $\mathrm{LT}_\sigma(xh_2) = x^2z\varepsilon_1$ (e naturalmente $x^2z = \mathrm{mcm}(x^2, xz)$). Anche ora sappiamo che $\theta_{ij} \in \mathrm{Siz}(\mathrm{LM}_\tau(\mathcal{G}_1))$ e può essere sollevato ad un elemento di $\mathrm{Siz}(\mathcal{G}_1)$. Cominciamo con θ_{12}. Vale: $\phi_1(\theta_{12}) = -y^2z\varepsilon_2 + (xy^3+z)\varepsilon_3 - x\varepsilon_4$ e la riduzione a zero di questo elemento di P^4 con la base di Gröbner G_1 fornisce il risultato: $\phi_1(\theta_{12}) + y^2h_4 + h_3 = 0$ da cui si ottiene $\phi(\theta_{12}) + y^2\phi_1(\eta_4) + \phi_1(\eta_3) = 0$, cioè $\phi_1(\theta_{12} + y^2\eta_4 + \eta_3) = 0$, e quindi il sollevamento (che chiamiamo ancora con il simbolo μ_{12}): $\mu_{12} = z\eta_1 - x\eta_2 + y^2\eta_4 + \eta_3$.
Procedendo con tutti i 4 possibili θ_{ij} otteniamo:

$$\begin{array}{rcl}
\mu_{12} & = & z\eta_1 - x\eta_2 + y^2\eta_4 + \eta_3 \\
\mu_{13} & = & y^2\eta_1 - x^2\eta_3 + \eta_5 \\
\mu_{23} & = & y^2\eta_2 - xz\eta_3 + \eta_6 \\
\mu_{45} & = & y^4\eta_1 - z\eta_5 + x\eta_6 + y^2\eta_3
\end{array}$$

e questi 4 elementi di P^6 sono un sistema di generatori per il modulo $\mathrm{Siz}(\mathcal{G}_1)$, anzi, fissando un oppurtuno term order $<_\xi$, sono anche una base di Gröbner. A questo punto si potrebbe andare avanti ancora un passo, calcolando le sizigie della mappa:

$$\phi_2 : P^4 \longrightarrow P^6$$

data da $\phi_2(f_1, f_2, f_3, f_4) = f_1\mu_{12} + f_2\mu_{13} + f_3\mu_{23} + f_4\mu_{45}$. Prima di fare ciò sarebbe però conveniente scrivere i μ_{ij} ordinati nel term order $<_\xi$ che è definito sui termini $T\langle\eta_1, \dots, \eta_6\rangle$ di P^6 nel seguente modo:

$$t\eta_i \leq_\xi t'\eta_j \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } \ \mathrm{LT}_\tau(th_i) <_\tau \mathrm{LT}_\tau(t'h_j) \\ \text{o, se } \ \mathrm{LT}_\tau(th_i) = \mathrm{LT}_\tau(t'h_j), \quad \text{allora } \ i > j \end{array} \right.$$

ecc. ecc.