Due esempi di risoluzioni minimali

Sia $P := \mathbb{Q}[x,y,z]$ graduato da $W := (1,1,1)$ (graduazione standard), sia $I := (x^3, x^2y, y^4z, z^5)$ e $M := P/I$. Allora una risoluzione minimale di M è la seguente:

$$0 \longrightarrow P(-9) \oplus P(-11) \xrightarrow{\phi_2} P(-4) \oplus P(-7) \oplus P^2(-8) \oplus P(-9) \xrightarrow{\phi_1}$$
$$\xrightarrow{\phi_1} P^2(-3) \oplus P^2(-5) \xrightarrow{\phi_0} P \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0$$

dove le mappe sono date dalle matrici:

$$\phi_0 := \left(x^3, x^2y, y^4z, z^5\right), \quad \phi_1 := \begin{pmatrix} y & 0 & 0 & z^5 & 0 \\ -x & y^3z & z^5 & 0 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 & 0 & z^4 \\ 0 & 0 & -x^2y & -x^3 & -y^4 \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 := \begin{pmatrix} z^5 & 0 \\ 0 & z^4 \\ x & -y^3 \\ -y & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

Le matrici scritte sono graduate, nel seguente modo:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & x^3 & x^2y & y^4z & z^5 \\ \hline & 3 & 3 & 5 & 5 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|ccccc} 3 & y & 0 & 0 & z^5 & 0 \\ 3 & -x & y^3z & z^5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -x^2 & 0 & 0 & z^4 \\ 5 & 0 & 0 & -x^2y & -x^3 & -y^4 \\ \hline & 4 & 7 & 8 & 8 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} 4 & z^5 & 0 \\ 7 & 0 & z^4 \\ 8 & x & -y^3 \\ 8 & -y & 0 \\ 9 & 0 & x^2 \\ \hline & 9 & 11 \end{array}$$

Sia $I := (xy, xz, t^2, x^4) \subseteq P$, dove $P := \mathbb{Q}[x, y, z, t]$ graduato da $W := (2, 2, 3, 4)$. La risoluzione minimale di $M := P/I$ è la seguente:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow P(-21) &\xrightarrow{\phi_4} P(-13) \oplus P(-15) \oplus P(-18) \oplus P(-19) \xrightarrow{\phi_3} \\ &P(-7) \oplus P(-10) \oplus P(-11) \oplus P(-12) \oplus P(-13) \oplus P(-16) \xrightarrow{\phi_2} \\ &P(-4) \oplus P(-5) \oplus P^2(-8) \xrightarrow{\phi_1} P \xrightarrow{\phi_0} M \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

dove le matrici $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_4$, con i gradi, sono rispettivamente:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & xy & xz & t^2 & x^4 \\ \hline & 4 & 5 & 8 & 8 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cccccc} 4 & z & x^3 & 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 5 & -y & 0 & x^3 & 0 & t^2 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & -xy & -xz & x^4 \\ 8 & 0 & -y & -z & 0 & 0 & -t^2 \\ \hline & 7 & 10 & 11 & 12 & 13 & 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 7 & x^3 & t^2 & 0 & 0 \\ 10 & -z & 0 & t^2 & 0 \\ 11 & y & 0 & 0 & t^2 \\ 12 & 0 & -z & -x^3 & 0 \\ 13 & 0 & y & 0 & -x^3 \\ 16 & 0 & 0 & -y & -z \\ \hline & 13 & 15 & 18 & 19 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 13 & t^2 \\ 15 & -x^3 \\ 18 & z \\ 19 & -y \\ \hline & 21 \end{array}$$