

Algoritmo di divisione

Input: m, g_1, \dots, g_s ;
Output: $(q_1, \dots, q_s) \in P^s, p \in P^r$ tali che $m = q_1g_1 + \dots + q_sg_s + p$;
 $v := m; q_1 := 0, \dots, q_s := 0, p := 0$
while $v \neq 0$ **do**
 while (esiste $i \in \{1, \dots, s\}$ tale che $\text{LM}(v)$ è multiplo di $\text{LM}(g_i)$) **do**
 scegli i minimo;
 $q_i := q_i + \frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)}$;
 $v := v - \frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)}g_i$;
 end while;
 $p := p + \text{LM}(v)$;
 $v := v - \text{LM}(v)$;
end while;
return $(q_1, \dots, q_s), p$.

Esempio: Anello dei polinomi $\mathbb{Q}[x, y]$ ordinamento Lex.

$$\begin{aligned}
 m &:= 2x^6y + x^4y^2 - 2x^3y + x^2y^3 + 2xy^3 + xy^2 - 4xy + 4x + 1 \\
 g_1 &:= x^3y - y; \\
 g_2 &:= xy^2 - xy
 \end{aligned}$$

I polinomi scritti sono ordinati rispetto a Lex.

Esecuzione algoritmo:

$$\begin{aligned}
 v &:= 2x^6y + x^4y^2 - 2x^3y + x^2y^3 + 2xy^3 + xy^2 - 4xy + 4x + 1; \\
 q_1 &:= 0; \quad q_2 := 0; \\
 p &:= 0;
 \end{aligned}$$

$\text{LM}(v) = 2x^6y$ è multiplo di $\text{LM}(g_1) = x^3y$, quindi:

$$\begin{aligned}
 i &:= 1; \\
 q_1 &:= 2x^3 \\
 v &:= x^4y^2 + x^2y^3 + 2xy^3 + xy^2 - 4xy + 4x + 1
 \end{aligned}$$

Ora $\text{LM}(v) = x^4y^2$ è multiplo sia di $\text{LM}(g_1) = x^3y$, sia di $\text{LM}(g_2) = xy^2$, scegliamo i minimo, quindi:

$$\begin{aligned}
 i &:= 1; \\
 q_1 &:= 2x^3 + xy; \\
 v &:= x^2y^3 + 2xy^3 + 2xy^2 - 4xy + 4x + 1.
 \end{aligned}$$

Ora $\text{LM}(v) = x^2y^3$, quindi va ridotto con g_2 :

$$\begin{aligned}
 i &:= 2; \\
 q_2 &:= xy; \\
 v &:= x^2y^2 + 2xy^3 + 2xy^2 - 4xy + 4x + 1.
 \end{aligned}$$

Ora $\text{LM}(v) = x^2y^2$, quindi v va ridotto con g_2 :

$$\begin{aligned}i &:= 2; \\q_2 &:= xy + x; \\v &:= x^2y + 2xy^3 + 2xy^2 - 4xy + 4x + 1\end{aligned}$$

A questo punto $\text{LM}(v)$ non è più multiplo né di $\text{LM}(g_1)$ né di $\text{LM}(g_2)$, quindi si esce dal ciclo più interno dell'algoritmo e si procede riassegnando v e p :

$$\begin{aligned}p &:= x^2y; \\v &:= 2xy^3 + 2xy^2 - 4xy + 4x + 1\end{aligned}$$

Ora $\text{LM}(v) = 2xy^3$ è nuovamente multiplo del $\text{LM}(g_2)$, quindi si rientra nel ciclo più interno dell'algoritmo (che si esegue due volte):

$$\begin{aligned}i &:= 2; \\q_2 &:= xy + x + 2y; \\v &:= 4xy^2 - 4xy + 4x + 1.\end{aligned}$$

e ancora:

$$\begin{aligned}i &:= 2; \\q_2 &:= xy + x + 2y + 4; \\v &:= 4x + 1.\end{aligned}$$

Si esce ora dal ciclo più interno e si eseguono le istruzioni:

$$\begin{aligned}p &:= x^2y + 4x; \\v &:= 1\end{aligned}$$

e infine:

$$\begin{aligned}p &:= x^2y + 4x + 1; \\v &:= 0;\end{aligned}$$

La risposta dell'algoritmo è pertanto:

$$\begin{aligned}q_1 &:= 2x^3 + xy; \\q_2 &:= xy + x + 2y + 4; \\p &:= x^2y + 4x + 1.\end{aligned}$$