

Esempio: risoluzione di sistemi lineari in  $K[x_1, \dots, x_n]$

Risolvere il sistema lineare (in  $T_1, T_2, T_3$ ):

$$\begin{cases} (x^2y - 1)T_1 + (xy - 1)T_2 + xy^2T_3 & = -x^2y^3 + 2xy^3 + x^3 - xy - 2y^2 \\ xyT_1 & + (x^2y + x)T_3 & = -x^3y^2 \end{cases}$$

I coefficienti del sistema lineare sono in  $P = \mathbb{Q}[x, y]$ .

Considero il modulo  $M \subseteq P^3$  generato da:

$$h_1 = (x^2 - y, xy), \quad h_2 = (xy - 1, 0), \quad h_3 = (xy^2, x^2y + x);$$

Si tratta innanzitutto di vedere se il vettore

$$b = (-x^2y^3 + 2xy^3 + x^3 - xy - 2y^2, -x^3y^2)$$

sta in  $M$ .

La base di Gröbner di  $M$  (rispetto all'ordinamento DegRevLexPos sui monomi di  $P^3$ , cioè su  $T\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ ) è:

$$G = \left\{ (xy - 1, 0), (x^2 - y, xy), \left(-\frac{1}{2}y^3 - y^2 + x, 0\right), \left(\frac{1}{2}y, x\right) \right\}$$

Detto  $\mathcal{H} = (h_1, h_2, h_3)$  e  $\mathcal{G} = (g_1, g_2, g_3, g_4)$  (dove  $g_1, \dots, g_4$  sono gli elementi di  $G$ ), dall'algoritmo di divisione e dall'algoritmo di Buchberger si possono costruire due matrici  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  tali che  $\mathcal{G} = \mathcal{H}\mathcal{A}$  e  $\mathcal{H} = \mathcal{G}\mathcal{B}$ . Le matrici  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}(xy^2 + y) & \frac{1}{2}(x^2y - x) \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}(x^2y - y^3 - y^2 + 2x) & -\frac{1}{2}(x^3 - xy^2 - xy + y) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}y^2 & -\frac{1}{2}xy + 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2}y \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & xy + 1 \end{pmatrix}$$

Dalla base di Gröbner  $G$  si può stabilire che  $b \in M$ : infatti calcolando la forma normale di  $b$  rispetto a  $G$  si ottiene 0. Dalla riduzione (algoritmo di divisione) si trova inoltre che

$$b = \left(-\frac{1}{2}xy^2 + 2y^2\right)g_1 + xg_2 - (x^2y^2 + xy)g_4$$

Da questa rappresentazione di  $b$  e dalla matrice  $\mathcal{A}$  che permette di esprimere  $g$  in funzione dei generatori  $h$  si ottiene:

$$b = xh_1 + 2y^2h_2 - xyh_3$$

e quindi abbiamo una soluzione del sistema lineare, che è:

$$\begin{aligned} T_1 &= x \\ T_2 &= 2y^2 \\ T_3 &= -xy \end{aligned}$$

Per avere tutte le soluzioni del sistema lineare, dobbiamo trovare il modulo delle sizigie di  $h_1, h_2, h_3$ .

Dalla base di Gröbner  $G$  possiamo ottenere i generatori del modulo  $\text{Siz}(\mathcal{G})$ , che sono le colonne della seguente matrice:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} x & y^2 + 2y \\ -y & -2 \\ 1 & 2x \\ y^2 & 2y \end{pmatrix}$$

Pertanto i feneratori del modulo delle sizigie di  $\mathcal{H}$  sono le colonne della matrice:

$$(\mathcal{A}\mathcal{M} \mid \mathcal{I}_t - \mathcal{A}\mathcal{B})$$

e cioè sono:

$$\begin{aligned} s_1 &= (1/2x^2y^3 - 1/2y, \\ &\quad -1/2x^3y^2 + 1/2xy^4 + 1/2xy^3 - 1/2x^2y + 1/2y^2, \\ &\quad -1/2xy^3 + 1/2y^2) \\ s_2 &= (2x^2y^2 - 2, -2x^3y + 2xy^3 + 2xy^2 - 2x^2 + 2y, \\ &\quad -2xy^2 + 2y) \\ s_3 &= (-1/2x^3y^2 + 1/2x, \\ &\quad 1/2x^4y - 1/2x^2y^3 - 1/2x^2y^2 + 1/2x^3 - 1/2xy, \\ &\quad 1/2x^2y^2 - 1/2xy) \end{aligned}$$

Abbiamo allora trovato che tutte le soluzioni del sistema lineare di partenza sono date da:

$$(T_1, T_2, T_3) = (x, 2y^2, -xy) + f_1s_1 + f_2s_2 + f_3s_3$$

dove  $f_1, f_2, f_3 \in P$ . Infine, se si volesse sapere in quanti modi diversi può essere scritta in questo modo una soluzione, si dovrebbero calcolare le sizigie di  $(s_1, s_2, s_3)$ .