

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 27.01.2016

FILA A

1. Nello spazio metrico \mathbb{R}^2 , dotato della distanza euclidea, si determinino l'interno e la chiusura dell'insieme

$$A = \{(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [1, 2], \theta \in [0, 2\pi] \setminus \mathbb{Q}\}.$$

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^x - 1) - \sin(x)}{3x^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x) \sin(y) \sin(xy)}{\sin(x^2 + y^2)}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = e^x \sqrt{|x|}.$$

4. Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tre volte, tale che

$$F(0) = 1, \quad F'(0) = F''(0) = 0,$$

e

$$F'''(x) > 0, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si dimostri che tale funzione è strettamente crescente.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 17.02.2016

FILA A

1. Nello spazio metrico \mathbb{R}^2 , dotato della distanza euclidea, dimostrare che l'insieme

$$A = \left\{ (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) : \rho \in [1, 2], \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \right\}.$$

è chiuso.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x^2+1}}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan(x \sin(y)) \tan(y \sin(x))}{\tan(x^2 + y^2)}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x+1)|x|},$$

determinando le zone in cui è crescente, decrescente, convessa, concava, i punti di flesso e gli eventuali asintoti.

4. Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa, derivabile, tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1.$$

Dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 08.06.2016

FILA A

1. Nello spazio metrico \mathbb{R}^2 , dotato della distanza euclidea, si determinino l'interno e la chiusura dell'insieme

$$A = \{x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 1, x > 0\}.$$

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh(x^2)}{\cos(e^x - 1) - 1}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\tan^2(\ln(x+1))}{\sin(x^2y)} y.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = x^3 \sqrt{1 - |x|}.$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \frac{1}{2}.$$

Si dimostri che tale funzione è suriettiva.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 05.07.2016

FILA A

1. Nello spazio metrico \mathbb{R}^2 , dotato della distanza euclidea, si determinino l'interno e la chiusura dell'insieme

$$A = \{x, y) : -1 \leq x < 1, -2 < y < 2\},$$

giustificando le affermazioni.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \arctan(x^4) - \pi}{\sin(x^{-4})}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{(x-1) \ln(x+xy-y)}{\sin(x^2y - 2xy + x^2 + y - 2x + 1)}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x| - 1}{e^x}.$$

È possibile trovare un'espressione esplicita per la derivata n -esima?

4. Sia $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

Si dimostri che esiste un $\xi \in]0, 1[$ tale che $f'(\xi) = 0$. Più in generale, si dimostri che la funzione derivata $f' :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 01.09.2016

1. Sia A il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 così definito:

$$A = \left\{ (2 \cos \theta, \sin \theta) : \theta \in]0, \pi[\right\}.$$

Disegnata la sua forma, si determinino l'interno e la chiusura di A .

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \arcsin(x) - \pi}{\sin(\sqrt{1-x})}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan(x^2) \log_2(e^y)}{\sin(x^4 + y^2)}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{e^x - 1}.$$

4. Scrivere la formula di Taylor, con polinomio di grado 2 e resto di Lagrange, per la funzione

$$f(x) = e^{3x^2},$$

nel punto $x_0 = 1$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI 1
CdL FISICA e MATEMATICA
APPELLO DEL 15.09.2016

1. Sia A il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 così definito:

$$A = \left\{ (x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Si determinino l'interno e la chiusura di A , giustificando le conclusioni.

2. Si stabilisca se esistono i seguenti limiti e, nel caso, se ne calcolino i valori:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\pi - \arccos(x)}{\ln(|x|)}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log_3(2^x) \arctan(y)}{\arcsin(x^2 + y^2)}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 1}.$$

4. Scrivere la formula di Taylor, con polinomio di grado 2 e resto di Lagrange, per la funzione

$$f(x) = e^{\sqrt{x}},$$

nel punto $x_0 = 1$.