8 Di nuovo in risonanza

Torniamo a considerare il problema periodico

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

con $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Ricordiamo che $F : H^1_T \to \mathbb{R}$ è il funzionale definito da

$$F(x) = \int_0^T \left[\tfrac{1}{2}\, x'(t)^2 - G(t,x(t))\right] \, dt\,,$$

dove $G(t,x) = \int_0^x g(t,u)\,du$. Sarà utile il seguente risultato preliminare.

Lemma 8.1 *Se $(x_n)_n$ è una successione limitata in H^1_T tale che $F'(x_n) \to 0$, allora $(x_n)_n$ ha una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Essendo $(x_n)_n$ limitata, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che converge debolmente in H^1_T e uniformemente a una certa $x \in H^1_T$. Ne segue che

$$\lim_k \langle \nabla F(x_{n_k}) - \nabla F(x) \,|\, x_{n_k} - x \rangle = 0\,,$$

ossia

$$\lim_k \int_0^T [(x'_{n_k}(t) - x'(t))^2 - (g(t,x_{n_k}(t)) - g(t,x(t)))(x_{n_k}(t) - x(t))]\,dt = 0\,.$$

Di conseguenza,

$$\lim_k \int_0^T [x'_{n_k}(t) - x'(t)]^2\,dt = 0\,,$$

per cui $x_{n_k} \to x$, fortemente in H^1_T. ■

8.1 Risonanza con il primo autovalore

Teorema 8.2 *Supponiamo che g sia limitata: esiste un $C > 0$ per cui*

$$|g(t,x)| \le C\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^T G(t,x)\,dt = +\infty\,, \tag{21}$$

allora (P) ha una soluzione.

Dimostrazione. Prendiamo x_0 e x_1 costanti, con $x_0 < 0 < x_1$. Dato $x \in H^1_T$, indichiamo come in precedenza con $\bar{x}$ la sua media:

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

Sia
$$\Omega = \{x \in H_T^1 : \bar{x} < 0\}\,.$$
Allora Ω è un intorno di x_0 e
$$\partial\Omega = \{x \in H_T^1 : \bar{x} = 0\}\,.$$
Se $z \in \partial\Omega$, allora
$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2}\int_0^T z'(t)^2 dt - \int_0^T G(t, z(t))\,dt \\ &= \frac{1}{2}\|z'\|_2^2 - \int_0^T \int_0^{z(t)} g(t,u)\,du\,dt \\ &\geq \frac{1}{2}\|z'\|_2^2 - C\int_0^T |z(t)|\,dt \\ &\geq \frac{1}{2}\|z'\|_2^2 - C\sqrt{T}\,\|z\|_2\,. \end{aligned}$$
Usando la disuguaglianza di Wirtinger, si ha
$$F(z) \geq c'(\|z\|^2 - 1)\,,$$
per una certa costante $c' > 0$. In particolare, si ha che
$$\inf_{z \in \partial\Omega} F(z) \geq -c'.$$
Prendendo x_0 e x_1 con valore assoluto sufficientemente grande, avremo che
$$F(x_0) = -\int_0^T G(t, x_0)\,dt < -c'\,, \qquad F(x_1) = -\int_0^T G(t, x_1)\,dt < -c'\,.$$
Dimostreremo ora che vale la condizione di Palais-Smale, per cui il Teorema 7.7 si applica. Sia $(x_n)_n$ una successione in H_T^1 tale che $(F(x_n))_n$ è limitata e $F'(x_n) \to 0$. Per n sufficientemente grande, si ha
$$|\langle \nabla F(x_n), h\rangle| \leq \|h\|\,,$$
per ogni $h \in H_T^1$. Quindi,
$$|\langle \nabla F(x_n), \tilde{x}_n\rangle| = \left|\int_0^T [x_n'(t)^2 - g(t, x_n(t))\tilde{x}_n(t)]\,dt\right| \leq \|\tilde{x}_n\|\,,$$
da cui
$$\int_0^T x_n'(t)^2\,dt \leq \|\tilde{x}_n\| + C\sqrt{T}\,\|\tilde{x}_n\|_2\,.$$
Usando la disuguaglianza di Wirtinger, ne segue che $(\tilde{x}_n)_n$ è limitata. D'altra parte,
$$\begin{aligned} \int_0^T G(t, \bar{x}_n)\,dt &= -F(x_n) + \frac{1}{2}\int_0^T x_n'(t)^2\,dt - \int_0^T \int_{\bar{x}_n}^{x_n(t)} g(t,u)\,du\,dt \\ &\leq |F(x_n)| + \frac{1}{2}\|\tilde{x}_n'\|_2^2 + C\sqrt{T}\,\|\tilde{x}_n\|_2\,. \end{aligned}$$
Quindi anche $(\bar{x}_n)_n$ è limitata, per cui la successione $(x_n)_n$ è limitata. Per il Lemma 8.1, $(x_n)_n$ ha una sottosuccesione convergente. ∎

Osservazioni 1. Si noti che, nella dimostrazione del teorema precedente, avremmo anche potuto applicare il Teorema 7.8.

2. Come abbiamo già visto per (19), si ha che (21) è soddisfatta se g è limitata e vale la condizione

$$\int_0^T \limsup_{x\to-\infty} g(t,x)\,dt < 0 < \int_0^T \liminf_{x\to+\infty} g(t,x)\,dt\,, \tag{22}$$

per cui il Teorema 8.2 generalizza il Teorema 6.2.

3. Se $g(t,x)$ è limitata e crescente in x, allora (21) e (22) sono equivalenti.

8.2 Risonanza con un autovalore successivo

Per un intero $N \geq 1$, sia $\lambda_N = (\frac{2\pi N}{T})^2$ il corrispondente autovalore. Consideriamo i sottospazi H^-, H^0 e H^+ come segue: H^- è l'insieme delle funzioni del tipo

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right)\,;$$

l'insieme $H^0 = \ker(L - \lambda_N I)$ è costituito dalle funzioni del tipo

$$a_N \cos(\sqrt{\lambda_N} t) + b_N \sin(\sqrt{\lambda_N} t)\,;$$

infine, H^+ è l'insieme delle funzioni del tipo

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right)\,.$$

Per ogni $x \in H$, scriveremo

$$x = x^- + x^0 + x^+\,,$$

con $x^- \in H^-$, $x^0 \in H^0$ e $x^+ \in H^+$. Procedendo come nella dimostrazione del Lemma 5.10, si dimostrano le seguenti disuguaglianze:

$$\|(x^-)'\|_2 \leq \frac{2\pi(N-1)}{T}\|x^-\|_2\,, \qquad \|(x^+)'\|_2 \geq \frac{2\pi(N+1)}{T}\|x^+\|_2\,, \tag{23}$$

analoghe delle (12).

Nel seguito, $h(t,x)$ sarà una funzione continua. Useremo la notazione $H(t,x) = \int_0^x h(t,u)\,du$.

Teorema 8.3 (Ahmad - Lazer - Paul, 1976) *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \lambda_N x + h(t,x)\,,$$

con $\lambda_N = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$, *e che* h *sia limitata: esiste un* $C > 0$ *per cui*

$$|h(t,x)| \leq C\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre, per $v \in \ker(L-\lambda_N I)$ si ha

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \int_0^T H(t,v(t))\,dt = +\infty\,,$$

allora (P) ha una soluzione.

Dimostrazione. Il funzionale risulta qui essere

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^T \left[\tfrac{1}{2}\left(x'(t)^2 - \lambda_N x(t)^2\right) - H(t,x(t))\right]\,dt\,,\\ &= \frac{1}{2}\int_0^T [(x^-)'(t)^2 - \lambda_N x^-(t)^2]\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T [(x^+)'(t)^2 - \lambda_N x^+(t)^2]\,dt - \\ &\quad - \int_0^T H(t, x^-(t) + x^0(t) + x^+(t))\,dt\,, \end{aligned}$$

Dalle disuguaglianze (23), si vede che

$$\|(x^-)'\|_2^2 - \lambda_N\|x^-\|_2^2 \le -\frac{\lambda_N - \lambda_{N-1}}{1+\lambda_{N-1}}\|x^-\|^2\,, \tag{24}$$

$$\|(x^+)'\|_2^2 - \lambda_N\|x^+\|_2^2 \ge \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{1+\lambda_{N+1}}\|x^+\|^2\,. \tag{25}$$

Poniamo $Y = H^- \oplus H^0$, $Z = H^+$. Essendo h limitata, si vede che, per $y = x^- + x^0 \in Y$,

$$\begin{aligned} F(x^- + x^0) &\le -\frac{\lambda_N - \lambda_{N-1}}{1+\lambda_{N-1}}\|x^-\|^2 + \int_0^T H(t, x^-(t) + x^0(t))\,dt\\ &\le -\frac{\lambda_N - \lambda_{N-1}}{1+\lambda_{N-1}}\|x^-\|^2 + \int_0^T H(t, x^0(t))\,dt + C\sqrt{T}\,\|x^-\|_2\,, \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{\|y\|\to\infty} F_{|Y}(y) = -\infty\,.$$

D'altra parte, per $z = x^+ \in Z$,

$$\begin{aligned} F(x^+) &\ge \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{1+\lambda_{N+1}}\|x^+\|^2 + \int_0^T H(t, x^+(t))\,dt\\ &\ge \frac{\lambda_{N+1} - \lambda_N}{1+\lambda_{N+1}}\|x^+\|^2 - C\sqrt{T}\,\|x^+\|_2\\ &\ge c\|x^+\|^2 - c'\,, \end{aligned}$$

con opportune costanti positive c, c', da cui

$$\inf_Z F \ge -c'\,.$$

Quindi, se $R > 0$ è scelto sufficientemente grande, si ha che

$$\max_{S_R} F < \inf_Z F\,.$$

Dimostreremo infine che vale la condizione di Palais-Smale, per cui il Teorema 7.8 si applica, prendendo $R > 0$ sufficientemente grande. Sia $(x_n)_n$ una successione in H^1_T tale che $(F(x_n))_n$ e $F'(x_n) \to 0$. Per n sufficientemente grande, si ha

$$|\langle \nabla F(x_n) | w\rangle| \leq \|w\|\,,$$

per ogni $w \in H^1_T$. Quindi, prendendo $w = x_n^+ - x_n^-$,

$$\begin{aligned} |\langle \nabla F(x_n) | x_n^+ - x_n^-\rangle| &= \Big| \int_0^T [((x_n^+)')^2 - \lambda_N (x_n^+)^2 - ((x_n^-)')^2 + \lambda_N (x_n^-)^2]\, dt + \\ &\qquad + \int_0^T h(t, x_n)(x_n^+ - x_n^-)]\, dt \Big| \\ &\leq \|x_n^+ - x_n^-\|\,. \end{aligned}$$

Usando le disuguaglianze (24), (25) e il fatto che h è limitata, si vede che sia $(x_n^+)_n$ che $(x_n^-)_n$ sono limitate. D'altra parte, essendo $(F(x_n))_n$ limitata, anche la successione

$$\Big(\int_0^T H(t, x_n^-(t) + x_n^0(t) + x_n^+(t))\, dt \Big)_n$$

è limitata. Scrivendo

$$\int_0^T H(t, x_n^-(t) + x_n^0(t) + x_n^+(t))\, dt = \int_0^T H(t, x_n^0(t))\, dt + \int_0^T \int_{x_n^0(t)}^{x_n(t)} h(t,u)\, du\,,$$

e usando di nuovo il fatto che h è limitata, si ha che anche la successione

$$\Big(\int_0^T H(t, x_n^0(t))\, dt \Big)_n$$

è limitata. Per l'ipotesi, deve essere $(x_n^0)_n$ limitata, per cui la successione $(x_n)_n$ è limitata. Per il Lemma 8.1, $(x_n)_n$ ha una sottosuccesione convergente. ■

In modo simmetrico, abbiamo anche il seguente.

Teorema 8.4 *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \lambda_N x + h(t,x)\,,$$

con $\lambda_N = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$, *e che* h *sia limitata: esiste un* $C > 0$ *per cui*

$$|h(t,x)| \leq C\,, \qquad \text{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre, per $v \in \ker(L - \lambda_N I)$ *si ha*

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \int_0^T H(t, v(t))\, dt = -\infty\,,$$

allora (P) ha una soluzione.

8.3 Confronto tra le condizioni di Landesman-Lazer e di Ahmad-Lazer-Paul

Supponiamo che $h : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia continua e limitata, e che $\lambda_N = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$ sia un autovalore dell'operatore differenziale L. Come sopra, definiamo $H(t,x) = \int_0^x h(t,u)\,du$. Dimostreremo che la condizione di Ahmad-Lazer-Paul è più generale della condizione di Landesman-Lazer. Per fare questo, abbiamo prima bisogno di un risultato preliminare.

Lemma 8.5 *Se, per ogni $v \in \ker(L - \lambda_N I)$ non nullo si ha*

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \liminf_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\,dt > 0\,,$$

allora esistono due costanti $\eta > 0$ e $d > 0$ e due funzioni $\psi_-, \psi_+ \in L^1(0,T)$ tali che

$$\begin{aligned} x \le -d \quad &\Rightarrow \quad h(t,x) \le \psi_-(t)\,,\\ x \ge d \quad &\Rightarrow \quad h(t,x) \ge \psi_+(t)\,, \end{aligned}$$

per quasi ogni $t \in [0,T]$ e, per ogni $v \in \ker(L - \lambda_N I)$,

$$\int_{\{v<0\}} \psi_-(t)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \psi_+(t)v(t)\,dt \ge \eta\|v\|_\infty\,.$$

Dimostrazione. Per ipotesi, per ogni $v \in \ker(L - \lambda_N I)$ non nullo si ha

$$\bar\eta_v := \int_{\{v<0\}} \lim_n \sup_{x\le -n} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \lim_n \inf_{x\ge n} h(t,x)v(t)\,dt > 0\,.$$

Siano

$$\Gamma_n^-(t) = \sup_{x\le -n} h(t,x)\,, \qquad \Gamma_n^+(t) = \inf_{x\ge n} h(t,x)\,.$$

Le successioni $(\Gamma_n^-\, v\, \chi_{\{v<0\}})_n$ e $(\Gamma_n^+\, v\, \chi_{\{v>0\}})_n$ sono entrambe crescenti e limitate, per cui

$$\lim_n \int_{\{v<0\}} \Gamma_n^-(t)v(t)\,dt = \int_{\{v<0\}} \lim_n \Gamma_n^-(t)v(t)\,dt\,,$$

$$\lim_n \int_{\{v>0\}} \Gamma_n^+(t)v(t)\,dt = \int_{\{v>0\}} \lim_n \Gamma_n^+(t)v(t)\,dt\,,$$

e

$$\lim_n \left(\int_{\{v<0\}} \Gamma_n^-(t)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \Gamma_n^+(t)v(t)\,dt \right) = \bar\eta_v > 0\,.$$

Quindi, per ogni $v_\omega(t) = \cos(\sqrt{\lambda_N}\,(t+\omega))$ non nullo esiste un $n_\omega \ge 0$ tale che

$$n \ge n_\omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\{v_\omega<0\}} \Gamma_n^-(t)v_\omega(t)\,dt + \int_{\{v_\omega>0\}} \Gamma_n^+(t)v_\omega(t)\,dt \ge \tfrac{1}{2}\bar\eta_{v_\omega}\,.$$

Fissando $n = n_\omega$, per continuità, per ogni $\omega \in [0, \frac{T}{N}]$ esiste un $\delta_\omega > 0$ tale che, se $|\alpha - \omega| \le \delta_\omega$, allora

$$\int_{\{v_\alpha<0\}} \Gamma^-_{n_\omega}(t) v_\alpha(t)\, dt + \int_{\{v_\alpha>0\}} \Gamma^+_{n_\omega}(t) v_\alpha(t)\, dt \ge \tfrac{1}{4}\bar\eta_{v_\omega} .$$

Per monotonia,

$$n \ge n_\omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\{v_\alpha<0\}} \Gamma^-_n(t) v_\alpha(t)\, dt + \int_{\{v_\alpha>0\}} \Gamma^+_n(t) v_\alpha(t)\, dt \ge \tfrac{1}{4}\bar\eta_{v_\omega} ,$$

sempre se $|\alpha - \omega| \le \delta_\omega$. Gli intervalli $]\omega - \delta_\omega , \omega + \delta_\omega[$ ricoprono $[0, \frac{T}{N}]$, che è compatto. Pertanto, esiste un sottoricoprimento finito

$$]\omega_1 - \delta_{\omega_1} , \omega_1 + \delta_{\omega_1}[\, , \ ]\omega_2 - \delta_{\omega_2} , \omega_2 + \delta_{\omega_2}[\, , \ \dots \ ,]\omega_M - \delta_{\omega_M} , \omega_M + \delta_{\omega_M}[\, .$$

Siano $N = \max\{n_{\omega_1}, \dots, n_{\omega_M}\}$ e $\eta = \frac{1}{4}\min\{\eta_{v_{\omega_1}}, \dots, \eta_{v_{\omega_M}}\}$. Allora per ogni $n \ge N$ e ogni $\omega \in [0, \frac{T}{N}]$ si ha

$$\int_{\{v_\omega<0\}} \Gamma^-_n(t) v_\omega(t)\, dt + \int_{\{v_\omega>0\}} \Gamma^+_n(t) v_\omega(t)\, dt \ge \eta .$$

Osserviamo che per ogni $v \in \ker(L - \lambda_N I)$ non nullo esiste un $\omega \in [0, \frac{T}{N}]$ per cui

$$\frac{v(t)}{\|v\|_\infty} = v_\omega(t) .$$

Fissando $n = N$, ne segue che, per ogni $v \in \ker(L - \lambda_N I)$, si ha

$$\int_{\{v<0\}} \Gamma^-_N(t) v(t)\, dt + \int_{\{v>0\}} \Gamma^+_N(t) v(t)\, dt \ge \eta \|v\|_\infty .$$

Ponendo $d = N$, $\psi_-(t) = \Gamma^-_N(t)$ e $\psi_+(t) = \Gamma^+_N(t)$ si ha la tesi. ■

Siamo ora in grado di dimostrare la seguente

Proposizione 8.6 *Se, per ogni $v \in \ker(L - \lambda_N I)$ non nullo si ha*

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty} h(t,x) v(t)\, dt + \int_{\{v>0\}} \liminf_{x\to+\infty} h(t,x) v(t)\, dt > 0 ,$$

allora, sempre per $v \in \ker(L - \lambda_N I)$, si ha

$$\lim_{\|v\|\to\infty} \int_0^T H(t, v(t))\, dt = +\infty .$$

Dimostrazione. Per $v \in \ker(L - \lambda_N I)$, definiamo gli insiemi

$$A_v^- = \{t \in [0,T] : v(t) < -d\}\,, \qquad A_v^+ = \{t \in [0,T] : v(t) > d\}\,,$$
$$A_v^0 = \{t \in [0,T] : -d \le v(t) \le d\}\,.$$

Sia

$$K = \max\{\, |H(t,x)| : (t,x) \in [0,T] \times [-d,d] \,\}\,.$$

Ricordando che $H(t,x) = \int_0^x h(t,u)\,du$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_{A_v^-} H(t,v(t))\,dt &= \int_{A_v^-} \Big(H(t,-d) + \int_{-d}^{v(t)} h(t,x)\,dx\Big)dt \\
&\ge \int_{A_v^-} \psi_-(t)(v(t)+d)\,dt - KT \\
&\ge \int_{A_v^-} \psi_-(t)v(t)\,dt - d\|\psi_-\|_{L^1} - KT \\
&\ge \int_{\{v<0\}} \psi_-(t)v(t)\,dt - 2d\|\psi_-\|_{L^1} - KT\,.
\end{aligned}$$

Analogamente, troviamo

$$\int_{A_v^+} H(t,v(t))\,dt \ge \int_{\{v>0\}} \psi_+(t)v(t)\,dt - 2d\|\psi_+\|_{L^1} - KT\,.$$

Infine,

$$\int_{A_v^0} H(t,v(t))\,dt \ge -KT\,.$$

Mettendo assieme le tre disuguaglianze e usando il Lemma, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\int_0^T H(t,v(t))\;dt &= \int_{A_v^-} H(t,v(t))\,dt + \int_{A_v^0} H(t,v(t))\,dt + \int_{A_v^+} H(t,v(t))\,dt \\
&\ge \int_{\{v<0\}} \psi_-(t)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \psi_+(t)v(t)\,dt - 4d\|\psi_+\|_{L^1} - 3KT \\
&\ge \eta\|v\|_\infty - 4d\|\psi_+\|_{L^1} - 3KT\,,
\end{aligned}$$

da cui la conclusione. ■

8.4 Nonlinearità periodiche

Consideriamo il problema

$$(\tilde{P}) \quad \begin{cases} x'' + g(t,x) = e(t)\,, \\ x(0) = x(T)\,, \ \ x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Come sempre, supponiamo che g ed e siano funzioni continue. Inoltre, posta $G(t,x) = \int_0^x g(t,u)\,du$, supponiamo che G sia periodica in x:

$$G(t, x + 2\pi) = G(t,x)\,, \qquad \text{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

In particolare, g e G sono funzioni limitate: esiste un $C > 0$ per cui

$$|g(t,x)| \le C\,, \quad |G(t,x)| \le C\,, \qquad \text{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Teorema 8.7 (Mawhin - Willem, 1984) *Supponiamo che*

$$G(t, x + 2\pi) = G(t,x)\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre

$$\bar{e} := \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt = 0\,,$$

Allora $(\tilde{P})$ ha almeno due soluzioni geometricamente distinte.

<u>Dimostrazione</u>. Il funzionale $F : H_T^1 \to \mathbb{R}$ è definito da

$$F(x) = \int_0^T \left[\tfrac{1}{2}\,x'(t)^2 - G(t, x(t)) + e(t)x(t)\right]\,dt\,.$$

Esso è limitato inferiormente e tale che

$$F(x + 2\pi) = F(x)\,, \qquad \text{per ogni } x \in H_T^1\,.$$

Sia $(x_n)_n$ una successione in H_T^1 tale che $F(x_n) \to \inf F$. Essendo $(F(x_n))_n$ limitata e

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T x_n'(t)^2\,dt &\le F(x_n) + \int_0^T G(t, x_n(t))\,dt + \left|\int_0^T e(t)\tilde{x}_n(t)\,dt\right| \\ &\le F(x_n) + TC + \|e\|_2\|\tilde{x}_n\|_2\,,\end{aligned}$$

si ha che $(\tilde{x}_n)_n$ è limitata. Possiamo ora definire una nuova successione $(y_n)_n$ in questo modo: $\tilde{y}_n = \tilde{x}_n$, $\bar{y}_n \in [0, 2\pi]$ e $\bar{y}_n - \bar{x}_n \in 2\pi\mathbb{Z}$. Pertanto, $F(y_n) = F(x_n) \to \inf F$ e $(y_n)_n$ è limitata. Usando il fatto che F è debolmente semicontinua inferiormente se ne deduce, come nella dimostrazione del Teorema 7.3, che esiste un $x \in H_T^1$ tale che $F(x) = \inf F$. Quindi x è un punto di minimo e $F'(x) = 0$.

Se x non è un punto di minimo isolato, ci sono infiniti punti di minimo vicini a x. In questo caso, ci sono infiniti punti critici che non differiscono da x di un multiplo di 2π.

Se invece x è un punto di minimo isolato, esiste un $r \in]0, 2\pi[$ tale che

$$F(u) > \min F\,, \qquad \text{per ogni } u \in \overline{B}(x,r) \setminus \{x\}\,.$$

Dimostriamo che

$$\inf_{\partial B(x,r)} F > \min F\,.$$

Per assurdo, supponiamo esista una successione $(x_n)_n$ in $\partial B(x,r)$ tale che $F(x_n) \le \min F + \frac{1}{n}$. Usando il principio di Ekeland, con $\varepsilon = \frac{1}{n}$, è possibile trovare una successione $(y_n)_n$ in H^1_T tale che $F(y_n) \le F(x_n)$, $\|y_n - x_n\| \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ e, per ogni $w \ne x_n$,

$$F(w) > F(y_n) - \frac{1}{\sqrt{n}}\|w - y_n\| \,.$$

Essendo F differenziabile, esiste un $\delta_n > 0$ tale che, se $h \in B(0, \delta_n)$,

$$|F(y_n + h) - F(y_n) - F'(y_n)h| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|h\| \,.$$

Prendendo $w = y_n + h$, ne segue che, per ogni $h \in B(0, \delta_n)$,

$$F'(y_n)h \ge F(y_n + h) - F(y_n) - \frac{1}{\sqrt{n}}\|h\| \ge -\frac{2}{\sqrt{n}}\|h\| \,,$$

il che implica che $\|F'(y_n)\| \le \frac{2}{\sqrt{n}}$. Abbiamo così una successione limitata $(y_n)_n$ tale che $F(y_n) \to \min F$ e $F'(y_n) \to 0$. Per il Lemma 8.1, esiste una sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ che converge ad un certo $y \in H^1_T$. Da quanto sopra, $y \in \partial B(x, r)$ e $F(y) = \min F$, una contraddizione.

Prendendo $\Omega = B(x, r)$, $x_0 = x$ e $x_1 = x + 2\pi$, si ha che

$$F(x_0) = F(x_1) < \inf_{s \in \partial\Omega} F(s) \,,$$

per cui si applica il Teorema 7.7. Posto

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0, 1], H) : \gamma(0) = x_1 \,, \gamma(1) = x_2\}$$

e

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} F(\gamma(t)) \,,$$

esiste una successione $(x_n)_n$ in H^1_T tale che

$$\lim_n F(x_n) = c \,, \qquad \lim_n F'(x_n) = 0 \,.$$

Procedendo come nella prima parte della dimostrazione, si vede che $(\tilde{x}_n)_n$ è limitata e possiamo definire una nuova successione $(y_n)_n$ limitata tale che $F(y_n) = F(x_n) \to c$, $F'(y_n) = F'(x_n) \to 0$. Usando di nuovo il Lemma 8.1, si vede che esiste una sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ che converge ad un certo $y \in H^1_T$. Da quanto sopra, $F(y) = c$, e $F'(y) = 0$. Come dimostrato per il Teorema 7.7, $F(y) = c > F(x)$, per cui sicuramente F ha almeno due punti critici, x e y, che non differiscono tra loro di un multiplo di 2π. ■

Corollario 8.8 *Il pendolo forzato*

$$x'' + a \sin x = e(t) \,,$$

con $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e T-periodica, tale che

$$\bar{e} = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\, dt = 0 \,,$$

ha almeno due soluzioni T-periodiche geometricamente distinte.

Dimostrazione. Essendo $g(x) = a \sin x$, abbiamo che $G(x) = a(1 - \cos x)$, e possiamo applicare il teorema precedente. ■