7 Il metodo variazionale

In questo capitolo introdurremo alcune tecniche variazionali, con lo scopo di ottenere ulteriori risultati di esistenza di soluzioni per il problema periodico

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Essendo l'argomento molto vasto, ci accontenteremo di esporre solo alcuni risultati basilari.

7.1 Definizione del funzionale

Lavoreremo con lo spazio H^1_T delle funzioni $x \in W^{1,2}(0,T)$ tali che $x(0) = x(T)$, con prodotto scalare

$$\langle u|v\rangle = \int_0^T u(t)v(t)\,dt + \int_0^T u'(t)v'(t)\,dt\,,$$

e norma

$$\|x\| = \langle x|x\rangle^{1/2} = (\|x\|_2^2 + \|x'\|_2^2)^{1/2}.$$

Si tratta di uno spazio di Hilbert. Consideriamo il problema periodico

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

dove $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Posto $G(t,x) = \int_0^x g(t,u)\,du$, sia $F : H^1_T \to \mathbb{R}$ il funzionale definito da

$$F(x) = \int_0^T \left[\tfrac{1}{2}\,x'(t)^2 - G(t,x(t))\right]\,dt\,.$$

Lemma 7.1 *Il funzionale F è di classe C^1 e per ogni $h \in H^1_T$ si ha*

$$F'(x)h = \int_0^T [x'(t)h'(t) - g(t,x(t))h(t)]\,dt\,.$$

Se $F'(x) = 0$, allora x è soluzione di (P).

Dimostrazione. Per $h \in H^1_T$ con $\|h\| = 1$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{F(x+\tau h) - F(x)}{\tau} &= \frac{1}{\tau}\bigg(\frac{1}{2}\int_0^T [(x'(t)+\tau h'(t))^2 - x'(t)^2]\,dt \\ &\qquad - \int_0^T [G(t,x(t)+\tau h(t)) - G(t,x(t))]\,dt\bigg) \\ &= \int_0^T x'(t)h'(t)\,dt + \tau\int_0^T h'(t)^2\,dt - \\ &\qquad - \int_0^T \frac{G(t,x(t)+\tau h(t)) - G(t,x(t))}{\tau}\,dt\,, \end{aligned}$$

per ogni $\tau \in [-1,1] \setminus \{0\}$. Per il Teorema di Lagrange, esiste un $\xi \in]0,\tau[$ per cui

$$\frac{G(t,x(t)+\tau h(t)) - G(t,x(t))}{\tau} = g(t,x(t)+\xi h(t))\, h(t)\,,$$

ed essendo tutte le funzioni coinvolte continue, si ha che

$$\sup\{|g(t,x(t)+\xi h(t))\, h(t)| : t \in [0,T],\, \xi \in]-1,1[\,\} < +\infty\,.$$

Pertanto, usando il teorema della convergenza dominata,

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{F(x+\tau h) - F(x)}{\tau} = \int_0^T x'(t)h'(t)\,dt - \int_0^T g(t,x(t))h(t)\,dt\,.$$

Vediamo così che F è quasi-differenziabile, con

$$\Psi_F(x)(h) = \int_0^T x'(t)h'(t)\,dt - \int_0^T g(t,x(t))h(t)\,dt\,.$$

Siccome $\Psi_F : H_T^1 \to \mathcal{L}(H_T^1,\mathbb{R})$ è continua, la funzione F è di classe C^1.

Supponiamo ora che sia $F'(x) = 0$. Allora

$$\int_0^T x'(t)h'(t)\,dt = \int_0^T g(t,x(t))h(t)\,dt\,, \tag{18}$$

per ogni $h \in H_T^1$. Pertanto, ponendo $v(t) = -g(t,x(t))$, si ha che x' ha derivata debole $v \in C([0,T])$, quindi

$$x'(t) = x'(0) + \int_0^t v(s)\,ds = x'(0) - \int_0^t g(s,x(s))\,ds\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$. Ne segue che x' è di classe C^1 e

$$x''(t) = -g(t,x(t))\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$. Inoltre, prendendo la funzione costante $h(t) = 1$ in (18), si ha che $\int_0^T g(t,x(t))\,dt = 0$, da cui $x'(0) = x'(T)$. ■

Diremo che x è un **punto critico** di F se $F'(x) = 0$; in tal caso, $F(x)$ si dirà **valore critico** di F.

Lemma 7.2 *Il funzionale F è debolmente semi-continuo inferiormente: se $(x_n)_n$ è una successione che converge debolmente in H_T^1 ad una funzione x, allora*

$$F(x) \le \liminf_n F(x_n)\,.$$

Dimostrazione. Si ha $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$, con

$$F_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^T x'(t)^2, dt\,, \qquad F_2(x) = -\int_0^T G(t, x(t))\,dt\,.$$

Sia $(x_n)_n$ in H^1_T tale che $x_n \rightharpoonup x$. Sia $c > \liminf_n F_1(x_n)$. Passando a una sottosuccessione, possiamo supporre che $F_1(x_n) < c$, per ogni n. Per il Teorema di Mazur, esiste una successione $(v_n)_n$ di combinazioni convesse,

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n_k} x_k\,,$$

con $\alpha_{n_k} \geq 0$ e $\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n_k} = 1$, tale che $v_n \to x$, fortemente in H^1_T. Essendo F_1 convessa e continua,

$$F_1(x) = \lim_n F_1(v_n) \leq \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n_k} F_1(x_k) \right) \leq \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n_k} c \right) = c\,.$$

Essendo $c > \liminf_n F_1(x_n)$ arbitrario, si ha che $F_1(x) \leq \liminf_n F_1(x_n)$.

D'altra parte, se $x_n \rightharpoonup x$ in H^1_T, allora $(x_n)_n$ converge a x uniformemente. Essendo G continua,

$$\lim_n \int_0^T G(t, x_n(t))\,dt = \int_0^T G(t, x(t))\,dt\,,$$

per cui anche $F_2(x) \leq \liminf_n F_2(x_n)$. Ne segue la tesi. ■

7.2 Minimizzazione

Teorema 7.3 *Supponiamo che g sia limitata: esiste un $C > 0$ per cui*

$$|g(t, x)| \leq C\,, \qquad \text{per ogni } (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre

$$\lim_{|x|\to\infty} \int_0^T G(t, x)\,dt = -\infty\,, \tag{19}$$

allora (P) ha una soluzione.

Dimostrazione. Se x è una funzione di H^1_T, scriviamo $x = \bar{x} + \tilde{x}$, dove

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

è la media di x. Allora

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_0^T x'(t)^2 dt - \int_0^T G(t, \bar{x})\,dt - \int_0^T [G(t, x(t)) - G(t, \bar{x})]\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^T x'(t)^2 dt - \int_0^T G(t,\bar{x})\,dt - \int_0^T \int_{\bar{x}}^{x(t)} g(t,u)\,du\,dt \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^T x'(t)^2 dt - \int_0^T G(t,\bar{x})\,dt - C\int_0^T |\tilde{x}(t)|\,dt \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^T x'(t)^2 dt - \int_0^T G(t,\bar{x})\,dt - C\sqrt{T}\,\|\tilde{x}\|_2\,.
\end{aligned}
$$

Usando la disuguaglianza di Wirtinger, si trovano due costanti positive c, c' per cui

$$F(x) \geq c\|\tilde{x}\|^2 - \int_0^T G(t,\bar{x})\,dt - c'\,.$$

Ne segue che F è coerciva:

$$\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = +\infty\,.$$

Sia $(x_n)_n$ una successione tale che $\lim_n F(x_n) = \inf F$. Essendo F coerciva, tale successione deve essere limitata. Pertanto, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che converge debolmente ad una certa x in H^1_T. Essendo F debolmente semi-continua inferiormente, si ha

$$F(x) \leq \liminf_k F(x_{n_k}) = \lim_n F(x_n) = \inf F\,,$$

per cui x è un punto di minimo per F. Quindi, $F'(x) = 0$, ossia x è soluzione di (P). ■

Osservazioni. Vediamo che (19) è soddisfatta se g è limitata e vale la condizione

$$\int_0^T \liminf_{x\to-\infty} g(t,x)\,dt > 0 > \int_0^T \limsup_{x\to+\infty} g(t,x)\,dt\,, \tag{20}$$

già introdotta nel Teorema 6.3. Infatti, per il Lemma di Fatou,

$$\liminf_{x\to-\infty} \int_0^T g(t,x)\,dt \geq \int_0^T \liminf_{x\to-\infty} g(t,x)\,dt\,,$$

per cui esistono $a > 0$ e $R > 0$ tali che

$$u < -R \quad \Rightarrow \quad \int_0^T g(t,u)\,dt \geq a.$$

Allora, per $x < -R$, usando il Teorema di Fubini,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T G(t,x)\,dt &= \int_0^T G(t,-R)\,dt + \int_0^T \int_{-R}^{x} g(t,u)\,du\,dt \\
&= \int_0^T G(t,-R)\,dt + \int_{-R}^{x} \int_0^T g(t,u)\,dt\,du \\
&\leq \int_0^T G(t,-R)\,dt + a(x+R)\,,
\end{aligned}
$$

da cui

$$\lim_{x\to-\infty}\int_0^T G(t,x)\,dt = -\infty\,.$$

Analogamente lo si vede per $x \to +\infty$. Il teorema ora dimostrato generalizza quindi il Teorema 6.3.

Notiamo inoltre che, se $g(t,x)$ è limitata e decrescente in x, allora (19) e (20) sono equivalenti. Infatti, sia $R > 0$ tale che $\int_0^T G(t,-R)\,dt < 0$. Allora

$$\int_0^T g(t,-R)\,dt \geq \int_0^T \frac{1}{R}\int_{-R}^0 g(t,u)\,du\,dt = -\frac{1}{R}\int_0^T G(t,-R)\,dt > 0\,,$$

da cui segue la prima disuguaglianza in (20). Analogamente per la seconda.

7.3 Il principio di Ekeland

Il risultato seguente è di importanza fondamentale.

Teorema 7.4 (Ekeland, 1974) *Supponiamo che M sia uno spazio metrico completo e che $\Phi : M \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua e limitata inferiormente. Per ogni $\varepsilon > 0$, se $u \in M$ è tale che*

$$\Phi(u) \leq \inf_M \Phi + \varepsilon\,,$$

esiste un $v \in M$ tale che $\Phi(v) \leq \Phi(u)$, $d(v,u) \leq \sqrt{\varepsilon}$ e

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\,d(w,v)\,, \quad \text{per ogni } w \neq v\,.$$

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, definiamo la seguente relazione su M:

$$v_1 \preceq v_2 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(v_1) \leq \Phi(v_2) - \sqrt{\varepsilon}\,d(v_2,v_1)\,.$$

Si vede che è una relazione d'ordine:

$$\begin{array}{l} v_1 \preceq v_1\,; \\ [v_1 \preceq v_2 \text{ e } v_2 \preceq v_1] \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2\,; \\ [v_1 \preceq v_2 \text{ e } v_2 \preceq v_3] \quad \Rightarrow \quad v_1 \preceq v_3\,. \end{array}$$

Sia $u \in M$ fissato tale che $\Phi(u) \leq \inf_M \Phi + \varepsilon$. Definiamo per induzione la successione $(u_n)_n$ in questo modo: poniamo $u_0 = u$ e, una volta definito u_n, per un certo $n \in \mathbb{N}$, consideriamo l'insieme

$$S_n = \{w \in M : w \preceq u_n\}\,.$$

Tale S_n è non vuoto, in quanto $u_n \in S_n$. Scegliamo allora u_{n+1} in S_n tale che

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1}\,.$$

La successione $(u_n)_n$ così costruita è decrescente per la relazione d'ordine sopra definita. Gli insiemi S_n sono chiusi e si ha:

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots \supseteq S_n \supseteq S_{n+1} \supseteq \ldots$$

Vediamo che $\lim_n \operatorname{diam}(S_n) = 0$. Infatti, preso un $w \in S_{n+1}$, si ha $w \preceq u_{n+1} \preceq u_n$, per cui

$$\sqrt{\varepsilon}\, d(u_{n+1}, w) \leq \Phi(u_{n+1}) - \Phi(w) \leq \inf_{S_n} \Phi + \frac{1}{n+1} - \Phi(w) \leq \frac{1}{n+1}\,;$$

da ciò segue che

$$\operatorname{diam}(S_n) \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}\,(n+1)}\,.$$

Essendo M completo, per quanto visto sopra c'è un unico elemento $v \in M$ che appartiene a tutti gli S_n. (Si osservi che $(u_n)_n$ è di Cauchy e $\lim_n u_n = v$.) Essendo $v \in S_0$, si ha che $v \preceq u$, ossia

$$\Phi(u) - \Phi(v) \geq \sqrt{\varepsilon}\, d(u, v)\,.$$

Ne segue che $\Phi(v) \leq \Phi(u)$; inoltre,

$$d(u, v) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\Phi(u) - \Phi(v)) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Big(\inf_M \Phi + \varepsilon - \Phi(v)\Big) \leq \sqrt{\varepsilon}\,.$$

Osserviamo ora che, se per un certo $w \in M$ si ha che $w \preceq v$, allora $w \preceq u_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi w appartiene a tutti gli S_n, per cui deve essere $w = v$.

Quindi, se $w \neq v$, non può essere $w \preceq v$, per cui deve essere

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\, d(v, w)\,,$$

e il teorema è dimostrato. ■

7.4 La ricerca dei punti di sella

Sia H uno spazio di Hilbert e $F : H \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Sia $Y \subseteq H$ un sottospazio di dimensione finita. Usiamo le seguenti notazioni:

$$B_R = \{y \in Y : \|y\| < R\}\,,$$
$$\bar{B}_R = \{y \in Y : \|y\| \leq R\}\,,$$
$$S_R = \{y \in Y : \|y\| = R\}\,.$$

Definiamo inoltre l'insieme

$$M = \{u \in C(\bar{B}_R, H) : u_{|S_R} = id\}\,,$$

che risulta uno spazio metrico completo, con la distanza usuale

$$d(u, v) = \max_{y \in \bar{B}_R} \|u(y) - v(y)\|\,.$$

Teorema 7.5 *Siano*

$$c = \inf_{u\in M} \max_{y\in \bar{B}_R} F(u(y))\,, \quad c' = \max_{y\in S_R} F(y)\,.$$

Se $c' < c$, allora esiste una successione $(x_n)_n$ in H tale che

$$\lim_n F(x_n) = c\,, \qquad \lim_n F'(x_n) = 0\,.$$

Dimostrazione. Sia $\Phi : M \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\Phi(\gamma) = \max_{s\in \bar{B}_R} F(\gamma(s))\,.$$

Si vede che Φ è continua e limitata inferiormente:

$$\inf_M \Phi = c > c'\,.$$

Sia $\varepsilon \in]0, c-c'[$ e $u \in M$ tale che

$$\Phi(u) \le c + \varepsilon\,.$$

Per il principio di Ekeland, esiste una $v \in M$ tale che $\Phi(v) \le \Phi(u)$, $d(v,u) < \sqrt{\varepsilon}$ e

$$\Phi(w) > \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\, d(w,v)\,, \quad \text{per ogni } w \ne v\,.$$

Dimostreremo ora che esiste un $\bar{s} \in \bar{B}_R$ tale che

$$c - \varepsilon \le F(v(\bar{s}) \le c + \varepsilon\,, \quad \|\nabla F(v(\bar{s}))\| \le \sqrt{\varepsilon}\,,$$

da cui segue immediatamente la conclusione. Per assurdo, supponiamo che non sia così. Siccome sicuramente

$$F(v(s)) \le \Phi(v) \le \Phi(u) \le c + \varepsilon\,,$$

per ogni $s \in \bar{B}_R$, scriviamo

$$S = \{s \in \bar{B}_R : F(v(s)) \ge c - \varepsilon\}$$

e supponiamo per assurdo che, per ogni $s \in S$, si abbia $\|\nabla F(v(s))\| > \sqrt{\varepsilon}$. (Si noti che $S \ne \emptyset$ perché $\Phi(v) \ge c$.) Allora, per ogni $s \in S$, esiste un $\nu_s \in H$ tale che $\|\nu_s\| = 1$ e

$$\langle \nabla F(v(s)|\nu_s\rangle < -\sqrt{\varepsilon}\,;$$

per la continuità di ∇F, esistono $\delta_s > 0$ e $\rho_s > 0$ tali che

$$\langle \nabla F(v(y) + x)|\nu_s\rangle < -\sqrt{\varepsilon}\,,$$

per ogni $y \in \bar{B}_R$ con $\|y - s\| \le \rho_s$ e $x \in H$ con $\|x\| \le \delta_s$. Essendo S compatto, esistono $s_1, \ldots, s_k$ in S per cui

$$S \subseteq B(s_1, \rho_{s_1}) \cup \ldots \cup B(s_k, \rho_{s_k})\,.$$

Sia $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ una partizione dell'unità associata a tale ricoprimento: le funzioni continue $\psi_j : \bar{B}_R \to \mathbb{R}$ soddisfano

(i) $0 \le \psi_j(y) \le 1$,
(ii) $\psi_j(y) = 0$ se $y \notin B(s_j, \rho_{s_j})$,
(iii) $\sum_{j=1}^k \psi_j(y) = 1$ per ogni $y \in S$.
Sia inoltre $\psi : \bar{B}_R \to \mathbb{R}$ la funzione continua così definita:

$$\psi(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } F(v(y)) \le c - \varepsilon\,, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}(F(v(y)) - c + \varepsilon) & \text{se } c - \varepsilon \le F(v(y)) \le c\,, \\ 1 & \text{se } F(v(y)) \ge c\,. \end{cases}$$

Si noti che $0 \le \psi \le 1$ e $\psi_{|S_R} = 0$. Poniamo $\delta = \min\{\delta_{s_1}, \dots, \delta_{s_k}\}$ e definiamo

$$w(y) = v(y) + \delta\psi(y) \sum_{j=1}^k \psi_j(y)\nu_{s_j}\,.$$

Siccome ψ è nulla su S_R, si ha che $w_{|S_R} = v_{|S_R} = id$, per cui $w \in M$. Inoltre,

$$d(w, v) \le \delta\,.$$

Sia $\bar{y} \in \bar{B}_R$ tale che $F(w(\bar{y})) = \Phi(w)$. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t) = F\Big(v(\bar{y}) + t\,\delta\psi(\bar{y}) \sum_{j=1}^k \psi_j(\bar{y})\nu_{s_j}\Big)\,.$$

Esiste un $\xi \in]0, 1[$ tale che $f(1) = f(0) + f'(\xi)$, per cui

$$\begin{aligned} F(w(\bar{y})) &= F(v(\bar{y})) + \Big\langle \nabla F\Big(v(\bar{y}) + \xi\delta\psi(\bar{y}) \sum_{j=1}^k \psi_j(\bar{y})\nu_{s_j}\Big) \Big| \delta\psi(\bar{y}) \sum_{j=1}^k \psi_j(\bar{y})\nu_{s_j} \Big\rangle \\ &\le F(v(\bar{y})) - \sqrt{\varepsilon}\,\delta\psi(\bar{y})\,. \end{aligned}$$

In particolare, $F(v(\bar{y})) \ge F(w(\bar{y})) \ge c$, per cui $\psi(\bar{y}) = 1$ e quindi $w \ne v$. Ne segue che

$$\begin{aligned} \Phi(w) &\le \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\,\delta \\ &\le \Phi(v) - \sqrt{\varepsilon}\,d(w, v)\,, \end{aligned}$$

una contraddizione. ■

Diremo che F soddisfa la **condizione di Palais-Smale** se, presa una successione $(x_n)_n$ in H, se

$$(F(x_n))_n \ \text{ è limitata, e } \lim_n F'(x_n) = 0\,,$$

allora $(x_n)_n$ ha una sottosuccessione convergente.

Corollario 7.6 *Se, oltre alle ipotesi del teorema precedente, vale la condizione di Palais-Smale, allora esiste un $x \in H$ tale che $F(x) = c$ e $F'(x) = 0$.*

Dimostrazione. Il teorema fornisce una successione $(x_n)_n$ in H tale che

$$\lim_n F(x_n) = c\,, \qquad \lim_n F'(x_n) = 0\,.$$

Per la condizione di Palais-Smale, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ e un punto $x \in H$ tale che $\lim_k x_{n_k} = x$. Siccome F è di classe C^1, si ha

$$F(x) = \lim_k F(x_{n_k}) = c\,, \quad F'(x) = \lim_k F'(x_{n_k}) = 0\,.$$

■

Teorema 7.7 (Ambrosetti - Rabinowitz, 1973) *Siano x_0, x_1 due punti in H e Ω un intorno di x_0, che non contenga x_1, tale che*

$$\max\{F(x_0), F(x_1)\} < \inf_{s\in\partial\Omega} F(s)\,.$$

Sia

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = x_1\,, \gamma(1) = x_2\}$$

e

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} F(\gamma(t))\,.$$

Allora esiste una successione $(x_n)_n$ in H tale che

$$\lim_n F(x_n) = c\,, \qquad \lim_n F'(x_n) = 0\,.$$

Se inoltre vale la condizione di Palais-Smale, allora esiste un $x \in H$ tale che $F(x) = c$ e $F'(x) = 0$.

Dimostrazione. Effettuando una traslazione in H, possiamo supporre che sia $x_0 = -x_1$. Consideriamo la retta passante per x_0 e x_1, cioè il sottospazio Y di dimensione 1 generato da x_0. Sia $R = \|x_0\|$, cosicché $\bar{B}_R$ è il segmento $[x_0, x_1]$ congiungente x_0 con x_1. Ogni $u \in M$ è una funzione continua da $[x_0, x_1]$ in H tale che $u(x_0) = x_0$ e $u(x_1) = x_1$. Ad essa corrisponde la curva $\gamma \in \Gamma$ definita da

$$\gamma(t) = u(x_0 + t(x_1 - x_0))\,.$$

Gli insiemi M e Γ sono pertanto in corrispondenza biunivoca. Ponendo

$$c' = \max\{F(x_0), F(x_1)\}\,,$$

dimostriamo che $c' < c$. Infatti, presa una curva $\gamma \in \Gamma$, essendo la sua immagine un insieme connesso, esiste un $\bar{t} \in]0,1[$ tale che $\gamma(\bar{t}) \in \partial\Omega$. Quindi,

$$\max_{t\in[0,1]} F(\gamma(t)) \geq \inf_{s\in\partial\Omega} F(s)\,,$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$. Ne segue che

$$c \geq \inf_{s\in\partial\Omega} F(s)\,,$$

e la conclusione $c' < c$ segue dall'ipotesi. Possiamo quindi applicare il Teorema 7.5 e il Corollario 7.6. ■

Teorema 7.8 (Rabinowitz, 1978) *Sia Y un sottospazio di H avente dimensione finita tale che, se $Z = Y^\perp$ è il suo sottospazio ortogonale, si abbia*

$$\max_{y \in S_R} F(y) < \inf_{z \in Z} F(z) .$$

Sia

$$c = \inf_{u \in M} \max_{y \in \bar{B}_R} F(u(y)) .$$

Allora esiste una successione $(x_n)_n$ in H tale che

$$\lim_n F(x_n) = c , \qquad \lim_n F'(x_n) = 0 .$$

Se inoltre vale la condizione di Palais-Smale, allora esiste un $x \in H$ tale che $F(x) = c$ e $F'(x) = 0$.

Dimostrazione. Verifichiamo che $c' < c$, dove

$$c' = \max_{y \in S_R} F(y) .$$

Preso $u \in M$ e considerata la proiezione ortogonale P_Y sul sottospazio Y, abbiamo che $P_Y \circ u : \bar{B}_R \to Y$ è una funzione continua che coincide con l'identità sul bordo S_R. Pertanto, il grado topologico $d(P_Y \circ u, B_R)$ vale 1 e c'è almeno un punto $\bar{y} \in B_R$ in cui la funzione $P_Y \circ u$ si annulla, ossia $u(\bar{y}) \in Z$. Quindi,

$$\max_{y \in \bar{B}_R} F(u(y)) \geq \inf_{z \in Z} F(z) ,$$

per ogni $u \in M$. Ne segue che

$$c \geq \inf_{z \in Z} F(z) ,$$

e la conclusione $c' < c$ segue dall'ipotesi. Possiamo quindi applicare il Teorema 7.5 e il Corollario 7.6. ∎