6 Giocando attorno alla risonanza

Consideriamo il solito problema

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

dove $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

6.1 La disuguaglianza di Wirtinger

Avremo bisogno della seguente disuguaglianza.

Proposizione 6.1 *Se* $\tilde{x} \in W^{1,2}(0,T)$ *è tale che* $\int_0^T \tilde{x}(t)\,dt = 0$, *allora*

$$\|\tilde{x}\|_2 \leq \frac{T}{2\pi}\,\|\tilde{x}'\|_2\,.$$

(**disuguaglianza di Wirtinger**).

Dimostrazione. Siccome $\tilde{x}$ ha media nulla, abbiamo la serie di Fourier

$$\tilde{x}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \cos\Big(\frac{2\pi k}{T} t\Big) + b_k \sin\Big(\frac{2\pi k}{T} t\Big)\Big)\,,$$

in cui manca il termine costante, e

$$\tilde{x}'(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi k}{T} \Big(- a_k \sin\Big(\frac{2\pi k}{T} t\Big) + b_k \cos\Big(\frac{2\pi k}{T} t\Big)\Big).$$

Per l'identità di Parseval,

$$\|\tilde{x}'\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2 (a_k^2 + b_k^2) \geq \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \|\tilde{x}\|_2^2\,.$$

■

Nel seguito, per ogni funzione x, scriveremo

$$x(t) = \bar{x} + \tilde{x}(t)\,,$$

dove $\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$ è la media di x, e $\tilde{x}$ ha media nulla.

6.2 Condizioni di Landesman - Lazer per l'oscillatore simmetrico

6.2.1 Risonanza con il primo autovalore

Teorema 6.2 *Supponiamo che g sia limitata: esiste un $C > 0$ per cui*

$$|g(t,x)| \le C\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre

$$\int_0^T \limsup_{x\to-\infty} g(t,x)\,dt < 0 < \int_0^T \liminf_{x\to+\infty} g(t,x)\,dt\,,$$

allora (P) ha una soluzione.

Dimostrazione. Consideriamo, per $\sigma \in [0,1]$,

$$(P_\sigma) \qquad \begin{cases} x'' + (1-\sigma)\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 x + \sigma g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Supponiamo che esistano $(x_n)_n$ e $(\sigma_n)_n$ soluzioni con $\|x_n\|_\infty \to \infty$. Moltiplico per $\tilde{x}_n$ e integro:

$$\|\tilde{x}_n'\|_2^2 \le (1-\sigma_n)\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 \|\tilde{x}_n\|_2^2 + \sigma_n \|\tilde{x}_n\|_2 \Big(\int_0^T |g(t,x_n(t))|^2\,dt\Big)^{1/2}.$$

Usando la disuguaglianza di Wirtinger, essendo g limitata, si vede che $(\|\tilde{x}_n'\|_2)_n$ è limitata. Allora $\min x_n \to +\infty$ oppure $\max x_n \to -\infty$. Ma, integrando l'equazione differenziale in (P_{σ_n}),

$$\int_0^T \Big((1-\sigma_n)\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 x_n(t) + \sigma_n g(t,x_n(t))\Big)dt = 0\,.$$

Supponiamo che $\min x_n \to +\infty$. Usando il Lemma di Fatou, si ha che

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_n \int_0^T \Big((1-\sigma_n)\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 x_n(t) + \sigma_n g(t,x_n(t))\Big)dt \\ &\ge \int_0^T \liminf_n \Big((1-\sigma_n)\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 x_n(t) + \sigma_n g(t,x_n(t))\Big)dt > 0\,, \end{aligned}$$

una contraddizione. Analogamente se $\max x_n \to -\infty$. ■

In modo analogo si dimostra il seguente risultato, simmetrico al precedente.

Teorema 6.3 *Supponiamo che g sia limitata: esiste un $C > 0$ per cui*

$$|g(t,x)| \le C\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre

$$\int_0^T \liminf_{x\to-\infty} g(t,x)\,dt > 0 > \int_0^T \limsup_{x\to+\infty} g(t,x)\,dt\,,$$

allora (P) ha una soluzione.

6.2.2 Risonanza con un autovalore successivo

Vediamo ora una situazione in cui la nonlinearità sta "vicina" ad un autovalore λ_N, con $N \geq 1$.

Teorema 6.4 (Landesman - Lazer, 1970) *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \lambda_N x + h(t,x)\,,$$

con $\lambda_N = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$ *e che* h *sia limitata: esiste un* $C > 0$ *per cui*

$$|h(t,x)| \leq C\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre, per ogni $v \in \ker(L - \lambda_N I)$ *non nullo si ha*

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x \to -\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \liminf_{x \to +\infty} h(t,x)v(t)\,dt > 0\,,$$

allora (P) ha una soluzione.

<u>Dimostrazione</u>. Consideriamo, per $\sigma \in [0,1]$,

$$(P_\sigma) \qquad \begin{cases} x'' + (1-\sigma)\dfrac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2}x + \sigma g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \;\; x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Supponiamo che esistano $(\sigma_n)_n$ e $(x_n)_n$ soluzioni con $\|x_n\|_\infty \to \infty$. Sia $v_n = x_n/\|x_n\|_\infty$. Allora v_n verifica

$$\begin{cases} v_n''(t) + \Big[(1-\sigma_n)\dfrac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2} + \sigma_n \lambda_N\Big]v_n + \sigma_n \dfrac{h(t,x_n)}{\|x_n\|_\infty} = 0\,, \\ v_n(0) = v_n(T)\,, \;\; v_n'(0) = v_n'(T)\,. \end{cases}$$

Per una sottosuccessione, $v_n \to v$ in $C^1([0,T])$ e $\sigma_n \to \bar\sigma \in [0,1]$, e si ha

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0\,, \\ v(0) = v(T)\,, \;\; v'(0) = v'(T)\,, \end{cases}$$

con $\lambda_N \leq \lambda \leq \frac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2}$ e $\|v\|_\infty = 1$. Pertanto, deve essere $\bar\sigma = 1$, $\lambda = \lambda_N$ e $v \in \ker(L - \lambda_N I)$.

Scriviamo (x_n, x_n') in coordinate polari modificate in questo modo:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}\rho_n \cos\theta_n\,, \quad x_n' = \rho_n \sin\theta_n\,.$$

Siccome $v_n \to v$ in C^1, per n grande avremo che

$$\lambda_N (x_n(t))^2 + (x_n'(t))^2 > 0\,, \qquad \text{per ogni } t \in [0,T]\,,$$

e si verifica facilmente che

$$\theta_n' = \sqrt{\lambda_N}\, \frac{x_n'' x_n - (x_n')^2}{\lambda_N x_n^2 + (x_n')^2}\,.$$

Inoltre, per n grande, deve essere $\theta_n(T) = \theta_n(0) - 2\pi N$, per cui

$$\begin{aligned} 2\pi N &= \sqrt{\lambda_N} \int_0^T \frac{\left[(1-\sigma_n)\frac{\lambda_N + \lambda_{N+1}}{2} + \sigma_n \lambda_N\right] x_n^2 + \sigma_n h(t,x_n) x_n + (x_n')^2}{\lambda_N x_n^2 + (x_n')^2} \\ &\geq \sqrt{\lambda_N} \int_0^T \left(1 + \frac{\sigma_n h(t,x_n) x_n}{\lambda_N x_n^2 + (x_n')^2}\right)\,, \end{aligned}$$

ossia

$$\int_0^T \frac{h(t,x_n)x_n}{\lambda_N x_n^2 + (x_n')^2} \leq 0\,.$$

Quindi anche

$$\int_0^T \frac{h(t,x_n)v_n}{\lambda_N v_n^2 + (v_n')^2} \leq 0\,.$$

e, per il Lemma di Fatou,

$$0 = \liminf_n \int_0^T \frac{h(t,x_n)v_n}{\lambda_N v_n^2 + (v_n')^2} \geq \int_0^T \liminf_n \frac{h(t,x_n)v_n}{\lambda_N v_n^2 + (v_n')^2}\,.$$

Siccome $\lambda_N(v(t))^2 + (v'(t))^2$ è costante in t e

$$\lim_n (\lambda_N v_n^2 + (v_n')^2) = \lambda_N v^2 + (v')^2\,,$$

uniformemente in $t \in [0,T]$, deve essere

$$\int_0^T \liminf_n h(t,x_n)v_n \leq 0\,,$$

da cui

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \liminf_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\,dt \leq 0\,,$$

in contraddizione con l'ipotesi. ∎

In modo simmetrico, si dimostra anche il seguente

Teorema 6.5 *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \lambda_N x + h(t,x)\,,$$

con $\lambda_N = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$*, e che* h *sia limitata: esiste un* $C > 0$ *per cui*

$$|h(t,x)| \leq C\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre, per ogni $v \in \ker(L - \lambda_N I)$ *non nullo si ha*

$$\int_{\{v<0\}} \liminf_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \limsup_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\,dt < 0\,,$$

allora (P) ha una soluzione.

6.2.3 La condizione di Lazer - Leach

Per quanto riguarda il problema

$$(Q) \qquad \begin{cases} x'' + g(x) = e(t)\,, \\ x(0) = x(T), \;\; x'(0) = x'(T), \end{cases}$$

si ha il seguente

Corollario 6.6 (Lazer - Leach, 1969) *Supponiamo che sia*

$$g(x) = \lambda_N x + h(x)\,,$$

con $\lambda_N = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$*, e che per* h *esistano i limiti*

$$h(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} h(x)\,, \qquad h(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} h(x)\,.$$

con $h(-\infty) \neq h(+\infty)$*. Se i coefficienti di Fourier*

$$a_N = \frac{2}{T}\int_0^T e(s)\cos\left(\frac{2\pi N}{T}\,s\right)ds\,, \quad b_N = \frac{2}{T}\int_0^T e(s)\sin\left(\frac{2\pi N}{T}\,s\right)ds\,,$$

verificano la disuguaglianza

$$\sqrt{a_N^2 + b_N^2} < \frac{2}{\pi}\,|h(+\infty) - h(-\infty)|\,,$$

allora il problema (Q) ha una soluzione.

<u>Dimostrazione</u>. Trattiamo dapprima il caso in cui $h(-\infty) < h(+\infty)$. Scrivendo $v(t) = \sin\left(\sqrt{\lambda_N}\,(t+\theta)\right)$, si vede che

$$\int_{\{v>0\}} v = \int_{\{v<0\}} (-v) = \frac{T}{\pi}\,.$$

Pertanto,

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty}\; (h(x) - e(t))v(t)\,dt =$$
$$= -\frac{T}{\pi}h(-\infty) - \int_{\{v<0\}} e(t)\sin\left(\sqrt{\lambda_N}\,(t+\theta)\right)\,dt\,,$$

$$\int_{\{v>0\}} \liminf_{x\to+\infty}\; (h(x) - e(t))v(t)\,dt =$$
$$= \frac{T}{\pi}h(+\infty) - \int_{\{v>0\}} e(t)\sin\left(\sqrt{\lambda_N}\,(t+\theta)\right)\,dt\,,$$

da cui, ponendo $h(t,x) = h(x) - e(t)$,

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \liminf_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\,dt =$$
$$= \frac{T}{\pi}(h(+\infty) - h(-\infty)) - \int_0^T e(t)\sin\left(\sqrt{\lambda_N}\,(t+\theta)\right)\,dt\,.$$

Essendo

$$\int_0^T e(t)\sin\left(\sqrt{\lambda_N}\,(t+\theta)\right)\,dt = \frac{Ta_N}{2}\sin\left(\sqrt{\lambda_N}\,\theta\right) + \frac{Tb_N}{2}\cos\left(\sqrt{\lambda_N}\,\theta\right)$$
$$= \frac{T}{2}\sqrt{a_N^2 + b_N^2}\,\sin\left(\sqrt{\lambda_N}\,\theta + \eta\right)\,,$$

per un certo η, si ha che

$$\left|\int_0^T e(t)\sin\left(\sqrt{\lambda_N}\,(t+\theta)\right)\,dt\right| \le \frac{T}{2}\sqrt{a_N^2 + b_N^2} < \frac{T}{\pi}(h(+\infty) - h(-\infty))\,,$$

per ogni θ, per cui

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \liminf_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\,dt > 0\,,$$

e la condizione di Landesman-Lazer è soddisfatta, e si applica il Teorema 6.4.

Simmetricamente, nel caso in cui $h(-\infty) < h(+\infty)$, si dimostra che

$$\int_{\{v<0\}} \liminf_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \limsup_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\,dt < 0\,,$$

e si applica il Teorema 6.5. ■

6.3 Condizioni di Landesman - Lazer per l'oscillatore asimmetrico

Teorema 6.7 (Fabry, 1995) *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \mu x^+ - \nu x^- + h(t,x)\,,$$

con $\mu > 0$, $\nu > 0$ tali che

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{T}{N}\,,$$

e che h sia limitata: esiste un $C > 0$ per cui

$$|h(t,x)| \le C\,, \qquad \text{per ogni } (t,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}\,.$$

Se inoltre, per ogni v non nullo soluzione di

$$(P_0) \quad \begin{cases} v'' + \mu v^+ - \nu v^- = 0\,, \\ v(0) = v(T)\,,\ \ v'(0) = v'(T)\,, \end{cases}$$

si ha

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \liminf_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\,dt > 0\,,$$

allora (P) ha una soluzione.

<u>Dimostrazione</u>. Consideriamo, per $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$(P_\sigma) \qquad \begin{cases} x'' + (2-2\sigma)((\mu+\varepsilon)x^+ - (\nu+\varepsilon)x^-) + (2\sigma-1)g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \ \ x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Supponiamo che esistano $(\sigma_n)_n$ e $(x_n)_n$ soluzioni con $\|x_n\|_\infty \to \infty$. Sia $v_n = x_n/\|x_n\|_\infty$. Allora v_n verifica

$$\begin{cases} v_n''(t) + [(2-2\sigma_n)(\mu+\varepsilon) + (2\sigma_n-1)\mu]\, v_n^+ - \\ \qquad - [(2-2\sigma_n)(\nu+\varepsilon) + (2\sigma_n-1)\mu]\, v_n^- + (2\sigma_n-1)\dfrac{h(t,x_n)}{\|x_n\|_\infty} = 0\,, \\ v_n(0) = v_n(T)\,, \ \ v_n'(0) = v_n'(T)\,. \end{cases}$$

Per una sottosuccessione, $v_n \to v$ in $C^1([0,T])$ e $\sigma_n \to \bar\sigma \in [0,1]$, e si ha

$$\begin{cases} v'' + \tilde\mu v^+ - \tilde\nu v^- = 0\,, \\ v(0) = v(T)\,, \ \ v'(0) = v'(T)\,, \end{cases}$$

con $\mu \le \tilde\mu \le \mu+\varepsilon$, $\nu \le \tilde\nu \le \nu+\varepsilon$, e $\|v\|_\infty = 1$. Pertanto, deve essere $\bar\sigma = 1$, $\tilde\mu = \mu$, $\tilde\nu = \nu$, e v soluzione di (P_0).

Scriviamo (x_n, x_n') in coordinate polari modificate in questo modo:
se $x_n \ge 0$,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\rho_n \cos\theta_n\,, \quad x_n' = \rho_n \sin\theta_n\,,$$

se $x_n \le 0$,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{\nu}}\rho_n \cos\theta_n\,, \quad x_n' = \rho_n \sin\theta_n\,,$$

Per n grande, avremo che

$$x_n(t)^2 + x_n'(t)^2 > 0\,, \qquad \text{per ogni } t \in [0,T]\,,$$

e si verifica facilmente che

$$\theta_n' = \begin{cases} \sqrt{\mu}\,\dfrac{x_n''x_n - (x_n')^2}{\mu x_n^2 + (x_n')^2} & \text{se } x_n > 0\,, \\[2ex] \sqrt{\nu}\,\dfrac{x_n''x_n - (x_n')^2}{\nu x_n^2 + (x_n')^2} & \text{se } x_n < 0\,. \end{cases}$$

Integrando rispettivamente su $\{x_n > 0\}$ e su $\{x_n < 0\}$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\pi N &= \sqrt{\mu} \int_{\{x_n>0\}} \frac{[(1-\sigma_n)(\mu+\varepsilon)+\sigma_n\mu]\, x_n^2 + \sigma_n h(t,x_n)x_n + (x_n')^2}{\mu x_n^2 + (x_n')^2} \\
&\geq \sqrt{\mu} \int_{\{x_n>0\}} \left(1 + \frac{\sigma_n h(t,x_n)x_n}{\mu x_n^2 + (x_n')^2} \right) , \\
\pi N &= \sqrt{\nu} \int_{\{x_n<0\}} \frac{[(1-\sigma_n)(\nu+\varepsilon)+\sigma_n\nu]\, x_n^2 + \sigma_n h(t,x_n)x_n + (x_n')^2}{\nu x_n^2 + (x_n')^2} \\
&\geq \sqrt{\nu} \int_{\{x_n<0\}} \left(1 + \frac{\sigma_n h(t,x_n)x_n}{\nu x_n^2 + (x_n')^2} \right) .
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\int_{\{x_n>0\}} \frac{\sigma_n h(t,x_n)x_n}{\mu x_n^2 + (x_n')^2} &\leq \frac{\pi N}{\sqrt{\mu}} - \operatorname{meas}\{x_n > 0\} , \\
\int_{\{x_n<0\}} \frac{\sigma_n h(t,x_n)x_n}{\nu x_n^2 + (x_n')^2} &\leq \frac{\pi N}{\sqrt{\nu}} - \operatorname{meas}\{x_n < 0\} .
\end{aligned}$$

Siccome v ha solo zeri semplici e $v_n \to v$ in $C^1([0,T])$, anche v_n ha solo zeri semplici, per n grande, e pertanto l'insieme dei punti dove x_n si annulla ha misura pari a zero. Ne segue che

$$\int_0^T \frac{\sigma_n h(t,x_n)x_n}{\mu(x_n^+)^2 + \nu(x_n^-)^2 + (x_n')^2} \leq \frac{\pi N}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi N}{\sqrt{\nu}} - T = 0 .$$

Quindi anche

$$\int_0^T \frac{h(t,x_n)v_n}{\mu(v_n^+)^2 + \nu(v_n^-)^2 + (v_n')^2} \leq 0 .$$

e, per il Lemma di Fatou,

$$\int_0^T \liminf_n \frac{h(t,x_n)v_n}{\mu(v_n^+)^2 + \nu(v_n^-)^2 + (v_n')^2} \leq 0 .$$

Siccome $\mu v^+(t)^2 + \nu v^-(t)^2 + v'(t)^2$ è costante in t e

$$\lim_n (\mu(v_n^+)^2 + \nu(v_n^-)^2 + (v_n')^2) = \mu(v^+)^2 + \nu(v^-)^2 + (v')^2 ,$$

deve essere

$$\int_0^T \liminf_n h(t,x_n)v_n \leq 0 ,$$

da cui

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\, dt + \int_{\{v>0\}} \liminf_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\, dt \leq 0 ,$$

in contraddizione con l'ipotesi.

Per $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$, si procede come nella dimostrazione del Teorema 5.12, collegando il punto $(\mu+\varepsilon, \nu+\varepsilon)$ con la diagonale tramite una curva che non tocchi l'insieme Σ. La dimostrazione è così completa. ■

In modo del tutto simmetrico, abbiamo:

Teorema 6.8 *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \mu x^+ - \nu x^- + h(t,x)\,,$$

con $\mu > 0$, $\nu > 0$ *tali che*

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{T}{N}\,,$$

e che h *sia limitata: esiste un* $C > 0$ *per cui*

$$|h(t,x)| \leq C\,, \qquad \textit{per ogni } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}\,.$$

Se inoltre, per ogni v *non nullo soluzione di*

$$\begin{cases} v'' + \mu v^+ - \nu v^- = 0\,, \\ v(0) = v(T)\,,\ \ v'(0) = v'(T)\,, \end{cases}$$

si ha

$$\int_{\{v<0\}} \liminf_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \limsup_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\,dt < 0\,,$$

allora (P) ha una soluzione.

6.3.1 Condizioni di Lazer - Leach per l'oscillatore asimmetrico

Consideriamo ora il problema (Q) e supponiamo che sia

$$g(x) = \mu x^+ - \nu x^- + h(x)\,,$$

con $\mu > 0$, $\nu > 0$ tali che

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{T}{N}\,,$$

e che per h esistano i limiti

$$h(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} h(x)\,, \qquad h(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} h(x)\,.$$

Consideriamo, come sopra,

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu}t) & \text{se } t \in \left[0\,,\, \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right]\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\Big(\sqrt{\nu}\Big(\dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}} - t\Big)\Big) & \text{se } t \in \left[\dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}}\,,\, \tau\right]\,, \end{cases}$$

con

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\,,$$

estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da risultare τ-periodica. Definiamo la funzione τ-periodica

$$\Phi(\theta) = 2N\left(\frac{h(+\infty)}{\mu} - \frac{h(-\infty)}{\nu}\right) - \int_0^T e(t)\phi(t+\theta)\,dt\,.$$

Nel seguente corollario si generalizza la condizione di Lazer - Leach.

Corollario 6.9 (Dancer, 1976) *Se*

$$\Phi(\theta) \neq 0\,, \qquad \textit{per ogni } \theta \in [0,\tau]\,,$$

allora il problema (Q) ha soluzione.

Dimostrazione. Supponiamo, ad esempio, $\Phi(\theta) > 0$ per ogni $\theta \in [0,\tau]$. Scrivendo $v(t) = \phi(t+\theta)$, si vede che

$$\int_{\{v>0\}} v = \frac{2N}{\mu}\,, \qquad \int_{\{v<0\}} (-v) = \frac{2N}{\nu}\,. \tag{16}$$

Pertanto,

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty}\,(h(x)-e(t))v(t)\,dt = \\ = -\frac{2N}{\nu}h(-\infty) - \int_{\{v<0\}} e(t)\phi(t+\theta)\,dt\,,$$

$$\int_{\{v>0\}} \limsup_{x\to+\infty}\,(h(x)-e(t))v(t)\,dt = \\ = \frac{2N}{\mu}h(+\infty) - \int_{\{v>0\}} e(t)\phi(t+\theta)\,dt\,,$$

da cui, ponendo $h(t,x) = h(x) - e(t)$,

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{x\to-\infty} h(t,x)v(t)\,dt + \int_{\{v>0\}} \liminf_{x\to+\infty} h(t,x)v(t)\,dt = \\ = 2N\left(\frac{h(+\infty)}{\mu} - \frac{h(-\infty)}{\nu}\right) - \int_0^T e(t)\phi(t+\theta)\,dt > 0\,,$$

per cui la condizione di Landesman-Lazer è soddisfatta. ■

6.3.2 Condizioni più fini di non risonanza

Supporremo ora h localmente lipschitziana e, come sopra, che esistano i limiti

$$h(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} h(x)\,, \qquad h(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} h(x)\,.$$

Scrivendo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y\,, \\ y' = -\mu x^+ + \nu x^- - h(x) + e(t)\,, \end{cases}$$

indichiamo con $(x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ la soluzione avente punto iniziale

$$x(0; x_0, y_0) = x_0\,, \qquad y(0; x_0, y_0) = y_0\,.$$

È quindi ben definita la funzione di Poincaré $\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in questo modo:

$$\mathcal{P}(x_0, y_0) = (x(T; x_0, y_0), y(T; x_0, y_0))\,.$$

Vogliamo trovare un punto fisso di $\mathcal{P}$. A questo scopo, calcoleremo il grado di Brouwer di $\mathcal{P} - I$ sull'insieme

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ (r\phi(s), r\phi'(s)) : 0 \le r < \frac{1}{\varepsilon},\ s \in [0, \tau] \right\}\,,$$

con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, dove ϕ è la funzione definita più sopra. Con il cambio di variabili

$$x(t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon} \phi(t + \theta(t))\,, \qquad y(t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon} \phi'(t + \theta(t))\,,$$

otteniamo

$$\begin{cases} \rho'\phi(t+\theta) + \rho\phi'(t+\theta)(1+\theta') = \rho\phi'(t+\theta)\,, \\ \rho'\phi'(t+\theta) + \rho\phi''(t+\theta)(1+\theta') = \\ \qquad\qquad = -\mu\rho\phi^+(t+\theta) + \nu\rho\phi^-(t+\theta) - \varepsilon h\Big(\dfrac{\rho}{\varepsilon}\phi(t+\theta)\Big) + \varepsilon e(t)\,, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \rho'\phi(t+\theta) + \rho\phi'(t+\theta)\theta' = 0\,, \\ \rho'\phi'(t+\theta) + \rho\phi''(t+\theta)\theta' = -\varepsilon h\Big(\dfrac{\rho}{\varepsilon}\phi(t+\theta)\Big) + \varepsilon e(t)\,. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\phi'(t+\theta)$, la seconda per $\phi(t+\theta)$ e sottraendo, otteniamo

$$\rho[\phi'(t+\theta)^2 - \phi(t+\theta)\phi''(t+\theta)]\theta' = \varepsilon h\Big(\frac{\rho}{\varepsilon}\phi(t+\theta)\Big)\phi(t+\theta) - \varepsilon e(t)\phi(t+\theta)\,.$$

Tornando al sistema, moltiplicando la prima equazione per $\phi''(t+\theta)$, la seconda per $\phi'(t+\theta)$ e sottraendo, otteniamo

$$\rho'[\phi(t+\theta)\phi''(t+\theta) - \phi'(t+\theta)^2] = \varepsilon h\Big(\frac{\rho}{\varepsilon}\phi(t+\theta)\Big)\phi'(t+\theta) - \varepsilon e(t)\phi'(t+\theta)\,.$$

Essendo, per ogni $s \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(s)^2 - \phi(s)\phi''(s) = 1\,,$$

abbiamo

$$\begin{cases} \theta' = \dfrac{\varepsilon}{\rho}\left[h\Big(\dfrac{\rho}{\varepsilon}\phi(t+\theta)\Big)\phi(t+\theta) - e(t)\phi(t+\theta)\right]\,, \\ \rho' = -\varepsilon\left[h\Big(\dfrac{\rho}{\varepsilon}\phi(t+\theta)\Big)\phi'(t+\theta) - e(t)\phi'(t+\theta)\right]\,. \end{cases}$$

Sia $(\theta(t;\theta_0), \rho(t;\theta_0))$ la soluzione con punto iniziale $\theta(0;\theta_0) = \theta_0 \in [0,\tau]$, $\rho(0;\theta_0) = 1$. Si vede che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \theta(t;\theta_0) = \theta_0\,, \qquad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \rho(t;\theta_0) = 1\,, \tag{17}$$

uniformemente in $t \in [0,T]$. Quindi, se $\varepsilon > 0$ è piccolo, allora $\rho(t;\theta_0) > 0$ per ogni $t \in [0,T]$.

Lemma 6.10 *Si ha*[10]

$$\begin{cases} \theta(T;\theta_0) = \theta_0 + \varepsilon\Phi(\theta_0) + o(\varepsilon)\,, \\ \\ \rho(T;\theta_0) = 1 - \varepsilon\Phi'(\theta_0) + o(\varepsilon)\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^T \frac{1}{\rho(t)}\Big[h\Big(\frac{\rho(t)}{\varepsilon}\phi(t+\theta(t))\Big)\phi(t+\theta(t)) - e(t)\phi(t+\theta(t))\Big]dt = \Phi(\theta_0)\,,$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^T \Big[h\Big(\frac{\rho(t)}{\varepsilon}\phi(t+\theta(t))\Big)\phi'(t+\theta(t)) - e(t)\phi'(t+\theta(t))\Big]dt = \Phi'(\theta_0)\,,$$

uniformemente rispetto a $\theta_0 \in [0,\tau]$. Usando (17), si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^T e(t)\phi(t+\theta(t))\,dt = \int_0^T e(t)\phi(t+\theta_0)\,dt\,,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^T e(t)\phi'(t+\theta(t))\,dt = \int_0^T e(t)\phi'(t+\theta_0)\,dt\,,$$

[10] Usiamo qui la notazione $o(\varepsilon)$ con questo significato: per una certa funzione $R(\varepsilon;\theta_0)$,

$$R(\varepsilon;\theta_0) = o(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} R(\varepsilon;\theta_0) = 0\,, \quad \text{uniformemente per } \theta_0 \in [0,\tau].$$

D'altra parte, usando (16), si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^T & \frac{1}{\rho(t)} h\Big(\frac{\rho(t)}{\varepsilon}\phi(t+\theta(t))\Big)\phi(t+\theta(t))\,dt = \\
&= \int_{\{\phi(\cdot\,+\theta_0)<0\}} h(-\infty)\phi(t+\theta_0)\,dt + \int_{\{\phi(\cdot\,+\theta_0)>0\}} h(+\infty)\phi(t+\theta_0)\,dt \\
&= -h(-\infty)\frac{2N}{\nu} + h(+\infty)\frac{2N}{\mu}\,, \\
\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^T & h\Big(\frac{\rho(t)}{\varepsilon}\phi(t+\theta(t))\Big)\phi'(t+\theta(t))\,dt = \\
&= \int_{\{\phi(\cdot\,+\theta_0)<0\}} h(-\infty)\phi'(t+\theta_0)\,dt + \int_{\{\phi(\cdot\,+\theta_0)>0\}} h(+\infty)\phi'(t+\theta_0)\,dt \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

Tutti i limiti sono uniformi in $\theta_0 \in [0,\tau]$, da cui la conclusione. ■

Introduciamo il vettore

$$\varphi(t) = (\phi(t), \phi'(t))\,.$$

Deduciamo dal Lemma 6.10 che, se $(x_0, y_0) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\theta_0)$, allora

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\theta_0)\Big) &= \frac{\rho(T;\theta_0)}{\varepsilon}\varphi(\theta(T;\theta_0)) \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big[(1-\varepsilon\Phi'(\theta_0))\varphi(\theta_0+\varepsilon\Phi(\theta_0)) + o(\varepsilon)\Big] \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\Big[(1-\varepsilon\Phi'(\theta_0))(\varphi(\theta_0)+\varepsilon\Phi(\theta_0)\varphi'(\theta_0)) + o(\varepsilon)\Big] \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\theta_0) + \Big[\Phi(\theta_0)\varphi'(\theta_0) - \Phi'(\theta_0)\varphi(\theta_0)\Big] + \frac{1}{\varepsilon}o(\varepsilon)\,,
\end{aligned}
$$

per cui

$$(\mathcal{P}-I)\Big(\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\theta_0)\Big) = \Phi(\theta_0)\varphi'(\theta_0) - \Phi'(\theta_0)\varphi(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon}o(\varepsilon)\,.$$

Si noti che i due vettori $\varphi'(\theta_0), \varphi(\theta_0)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^2$ che ruota nel tempo, compiendo una rotazione completa in senso orario nel tempo τ. In questa base, le coordinate di $(\mathcal{P}-I)(\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\theta_0))$ sono

$$\Big(\Phi(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon}o(\varepsilon), -\Phi'(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon}o(\varepsilon)\Big).$$

Supporremo ora che sia

$$\Phi(\theta_0)^2 + \Phi'(\theta_0)^2 \neq 0\,, \qquad \text{per ogni } \theta_0 \in [0,\tau]\,.$$

Allora, la curva

$$\theta_0 \mapsto (\Phi(\theta_0), -\Phi'(\theta_0))$$

compie, nel tempo τ, un certo numero ζ di rotazioni attorno all'origine, in senso antiorario. Se ε è piccolo, lo stesso avverrà per la curva

$$\theta_0 \mapsto \Big(\Phi(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon}o(\varepsilon), -\Phi'(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon}o(\varepsilon)\Big),$$

per la proprietà di Rouché. In conclusione, al variare di θ_0 tra 0 e τ, la curva

$$\theta_0 \mapsto (\mathcal{P} - I)\Big(\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\theta_0)\Big)$$

ruota esattamente $1 - \zeta$ volte in senso orario attorno all'origine, per ε sufficientemente piccolo. Abbiamo quindi calcolato il grado:

$$d(\mathcal{P} - I, \Omega_\varepsilon) = 1 - \zeta\,.$$

Notiamo che la funzione Φ si annulla esattamente 2ζ volte nell'intervallo $[0, \tau[\,$.

Teorema 6.11 (Fabry - Fonda, 1998) *Se gli zeri della funzione Φ nell'intervallo $[0, \tau[$ sono tutti semplici ed il loro numero non è esattamente 2, allora (Q) ha soluzione.*

<u>Dimostrazione</u>. Da quanto sopra, la funzione Φ si annulla esattamente 2ζ volte nell'intervallo $[0, \tau[\,$. Se $\zeta \neq 1$, il grado di Brouwer di $\mathcal{P} - I$ sull'insieme Ω_ε è non nullo, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Pertanto, $\mathcal{P} - I$ ha almeno uno zero, cioè $\mathcal{P}$ ha almeno un punto fisso. ∎

Se $\zeta = 0$, la funzione Φ deve avere segno costante e ritroviamo il risultato del Corollario 6.9: in questo caso, il grado vale 1.