5 Nonrisonanza e grado topologico

5.1 L'uso del Teorema di Schauder

In questo capitolo, torniamo a studiare il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

Ricordiamo che esso si può scrivere come un problema di punto fisso

$$x = (L - \lambda I)^{-1}(N - \lambda I)x\,,$$

come spiegato all'inizio del Capitolo 3. Verifichiamo che $(L-\lambda I)^{-1}(N-\lambda I)$ è completamente continuo. Se $(y_n)_n$ è una successione limitata in H, allora $((N-\lambda I)y_n)_n$ è anch'essa limitata. ponendo $x_n = (L-\lambda I)^{-1}(N-\lambda I)y_n = \Psi_\lambda((N-\lambda I)(y_n))$, si ha che $(x_n)_n$ è limitata in $W^{2,2}(0,T)$. Avendo $W^{2,2}(0,T)$ immersione compatta in H, esiste una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ che converge in H.

Teorema 5.1 (Dolph, 1949) *Supponiamo che si possa scrivere*

$$g(t,x) = \gamma(t,x)x + r(t,x)\,,$$

dove γ, r sono funzioni continue tali che esistano a, b, c reali per cui

$$a \le \gamma(t,x) \le b\,,$$

e

$$|r(t,x)| \le c\,,$$

per ogni (t,x). Se inoltre

$$[a,b] \cap \sigma(L) = \emptyset\,,$$

allora il problema (P) ha una soluzione.

Dimostrazione. Si ha

$$g(t,x) - \frac{a+b}{2}x = \left(\gamma(t,x) - \frac{a+b}{2}\right) x + r(t,x)\,,$$

con

$$\left|\gamma(t,x) - \frac{a+b}{2}\right| \le \frac{b-a}{2}\,.$$

Inoltre, vale (3), per cui è ben definito l'operatore di Nemitzki N. Ne segue che

$$\left\| \left(N - \frac{a+b}{2} I\right) x \right\|_2 \le \frac{b-a}{2}\|x\|_2 + C\,,$$

per una certa costante $C > 0$. Ricordando l'operatore

$$M = \left(L - \frac{a+b}{2} I \right)^{-1} \left(N - \frac{a+b}{2} I \right) ,$$

introdotto nella dimostrazione del Teorema 3.3, usando (6) si ottiene

$$\|Mx\|_2 \leq \alpha \|x\|_2 + C' ,$$

con $\alpha < 1$. Ne segue che esiste un $R > 0$ sufficientemente grande tale che M manda la palla chiusa $\bar{B}_R$ in B_R. Inoltre, M è completamente continuo. Per il Teorema di Schauder,

$$d(I - M, B_R) = 1 ,$$

e M ha un punto fisso in B_R. ∎

Corollario 5.2 *Supponiamo che, per a, b reali, si abbia*

$$a \leq \liminf_{|x|\to\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq \limsup_{|x|\to\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq b,$$

uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$, e

$$[a, b] \cap \sigma(L) = \emptyset .$$

Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ per cui

$$[a - \varepsilon, b + \varepsilon] \cap \sigma(L) = \emptyset .$$

Sia $R > 0$ tale che

$$|x| \geq R \;\Rightarrow\; a - \varepsilon \leq \frac{g(t,x)}{x} \leq b + \varepsilon ,$$

per ogni $t \in [0, T]$. Definiamo

$$\gamma(t,x) = \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} & \text{se } |x| \leq R, \\ \dfrac{a+b}{2} + \left(\dfrac{g(t,x)}{x} - \dfrac{a+b}{2} \right) (|x| - R) & \text{se } R \leq |x| \leq R+1, \\ \dfrac{g(t,x)}{x} & \text{se } |x| \geq R+1. \end{cases}$$

e

$$r(t,x) = g(t,x) - \gamma(t,x)x.$$

Allora $\gamma(t,x)$, $r(t,x)$ sono continue e si ha

$$g(t,x) = \gamma(t,x)x + r(t,x),$$

Inoltre, $r(t,x)$ è limitata (perché nulla quando $|x| \geq R+1$) e

$$a - \varepsilon \leq \gamma(t,x) \leq b + \varepsilon ,$$

per ogni (t,x). Per il teorema precedente, il problema (P) ha almeno una soluzione. ∎

5.2 Sotto-soluzioni e sopra-soluzioni

Diremo che una funzione α di classe C^2 è una sotto-soluzione del problema (P) se

$$\begin{cases} -\alpha''(t) \leq g(t, \alpha(t))\,, \\ \alpha(0) = \alpha(T)\,, \quad \alpha'(0) \geq \alpha'(T)\,; \end{cases}$$

una funzione β di classe C^2 è una sopra-soluzione del problema (P) se

$$\begin{cases} -\beta''(t) \geq g(t, \beta(t))\,, \\ \beta(0) = \beta(T)\,, \quad \beta'(0) \leq \beta'(T)\,. \end{cases}$$

Teorema 5.3 (Knobloch, 1963) *Siano α una sotto-soluzione e e β una sopra-soluzione di (P) tali che $\alpha \leq \beta$. Allora esiste una soluzione x di (P) tale che $\alpha \leq x \leq \beta$.*

Dimostrazione. Sia $\eta : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\eta(t,x) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } x \leq \alpha(t)\,, \\ x & \text{se } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\,, \\ \beta(t) & \text{se } \beta(t) \leq x\,, \end{cases}$$

e

$$h(t,x) = g(t, \eta(t,x)) + \eta(t,x) - x\,.$$

Il problema

$$(P)_{mod} \qquad \begin{cases} x'' + h(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

ha una soluzione, per il Teorema 5.1, prendendo $\gamma(t,x) = -1$ e $r(t,x) = g(t, \eta(t,x)) + \eta(t,x)$. Sia $x(t)$ una soluzione. Dimostriamo che $\alpha \leq x$. Sia $u0x - \alpha$.

Per assurdo, supponiamo che il minimo di u sia negativo, e sia t_0 un punto di minimo. Se $t_0 \in]0,T[$ allora, essendo $x(t_0) < \alpha(t_0)$,

$$\begin{aligned} 0 \leq u''(t_0) &= x''(t_0) - \alpha''(t_0) = -h(t_0, x(t_0)) - \alpha''(t_0) \\ &= -g(t_0, \alpha(t_0)) - \alpha(t_0) + x(t_0) - \alpha''(t_0) < 0\,, \end{aligned}$$

una contraddizione. Se invece $t_0 = 0$ o $t_0 = T$, allora u raggiunge il suo minimo sul bordo di $[0,T]$, per cui $u'(0) \geq 0 \geq u'(T)$, ossia

$$x'(0) - \alpha'(0) \geq 0 \geq x'(T) - \alpha'(T)\,.$$

Ma $\alpha'(0) \geq \alpha'(T)$ e $x'(0) = x'(T)$, per cui deve essere $x'(0) = \alpha'(0)$ e $x'(T) = \alpha'(T)$, ossia $u'(0) = u'(T) = 0$. Allora

$$u'(t) = \int_0^t u''(s)\, ds = \int_0^t (x''(s) - \alpha''(s))\, ds = \int_0^t (-h(s, x(s)) - \alpha''(s))\, ds\,,$$

e per $s > 0$ sufficientemente piccolo,

$$-h(s, x(s)) - \alpha''(s) = -g(s, \alpha(s)) - \alpha(s) + x(s) - \alpha''(s) < 0\,.$$

Quindi $u'(t) < 0$, per $t > 0$ piccolo, una contraddizione col fatto che 0 è punto di minimo di u.

In modo analogo si dimostra che $x \leq \beta$. In conclusione, si ha che x, soluzione di $(\mathrm{P})_{mod}$, soddisfa $\alpha \leq x \leq \beta$, per cui $\eta(t,x) = x$ e x è soluzione di (P). ■

Corollario 5.4 *Siano α, β due numeri reali tali che $\alpha \leq \beta$ e*

$$g(t,\alpha) \geq 0 \geq g(t,\beta)\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$. Allora esiste una soluzione x di (P) tale che $\alpha \leq x \leq \beta$.

Dimostrazione. Basta notare che α è una sotto-soluzione (costante) e β è una sopra-soluzione di (P). ■

Corollario 5.5 (Hammerstein, 1930) *Se*

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq b < 0\,,$$

uniformemente in $t \in [0,T]$, allora (P) ha soluzione.

Nota. Nel Teorema 5.3 e nei suoi corollari non è necessario richiedere l'ipotesi di crescita (3). Per questo motivo, nel Corollario 5.5, non si chiede che il rapporto $\frac{g(t,x)}{x}$ sia limitato inferiormente.

Nel caso in cui si possa scrivere $g(t,x) = g(x) - e(t)$, con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $e : [0,T] \to \mathbb{R}$ continue, abbiamo il seguente

Corollario 5.6 *Siano α, β due numeri reali tali che $\alpha \leq \beta$ e*

$$g(\alpha) \geq e(t) \geq g(\beta)\,, \tag{11}$$

per ogni $t \in [0,T]$. Allora esiste una soluzione x di

$$(Q) \qquad \begin{cases} x'' + g(x) = e(t)\,, \\ x(0) = x(T), \ \ x'(0) = x'(T), \end{cases}$$

tale che $\alpha \leq x \leq \beta$.

Si noti che l'ipotesi $\alpha \leq \beta$ non è eliminabile. Ad esempio, il problema

$$\begin{cases} x'' + x = \sin t\,, \\ x(0) = x(2\pi)\,, \ \ x'(0) = x'(2\pi)\,, \end{cases}$$

non ha soluzioni, ma $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ soddisfano (11).

Esempi. 1) Il problema

$$\begin{cases} x'' - x^3 = e(t)\,, \\ x(0) = x(T)\,, \ \ x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

ha soluzione per ogni funzione continua $e(t)$. Basta prendere $\alpha \leq (\min e)^{1/3}$ e $\beta \geq (\max e)^{1/3}$.

2) Così non è per

$$\begin{cases} x'' - \arctan x = e(t)\,, \\ x(0) = x(T)\,,\ \ x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Infatti, integrando l'equazione si vede che una condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione è che

$$-\frac{\pi}{2} < \bar{e} < \frac{\pi}{2}\,,$$

dove, lo ricordiamo,

$$\bar{e} = \frac{1}{T}\int_0^T e(t)\,dt\,.$$

Vedremo in seguito che questa è anche una condizione sufficiente. Usando il Corollario 5.6, si vede che esiste una soluzione se

$$-\frac{\pi}{2} < e(t) < \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{per ogni } t \in [0,T]\,.$$

3) Il problema

$$\begin{cases} x'' + x^2\sin(x) = e(t)\,, \\ x(0) = x(T)\,,\ \ x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

ha infinite soluzioni, poiché si possono trovare sotto-soluzioni e sopra-soluzioni costanti arbitrariamente grandi, sia positive che negative.

4) Il pendolo forzato

$$x'' + a\,\sin x = e(t)\,,$$

con $e(t)$ continua e T-periodica, ha una soluzione T-periodica se

$$-a \le e(t) \le a\,, \quad \text{per ogni } t \in [0,T]\,.$$

Anche qui, in realtà, ci sarebbero infinite soluzioni. Ma è chiaro che, essendo $\sin x$ una funzione 2π-periodica, se $x(t)$ è una soluzione, anche $x(t) + 2\pi k$ è una soluzione, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Nel caso dell'esempio 2, è possibile essere più precisi.

Teorema 5.7 *Se esiste un $R > 0$ tale che*

$$|x| \ge R \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sgn}(x)g(x) \le \bar{e}\,,$$

allora il problema (Q) ha soluzione.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che $\bar{e} = 0$ e che

$$|x| \ge R \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sgn}(x)g(x) \le 0\,.$$

Sia $x_e(t)$ una soluzione di

$$\begin{cases} x'' = e(t)\,, \\ x(0) = x(T)\,,\ \ x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Prendendo $\alpha(t) = -k + x_e(t)$, con $k > 0$ sufficientemente grande avremo che $\alpha(t) \leq -R$, per cui

$$-\alpha''(t) = -e(t) \leq g(\alpha(t)) - e(t)\,,$$

per ogni $t \in [0, T]$. Essendo inoltre $\alpha(0) = \alpha(T)$ e $\alpha'(0) = \alpha'(T)$, si ha che α è una sotto-soluzione di (Q).

In modo analogo si vede che, prendendo $\beta(t) = k + x_e(t)$, con $k > 0$ sufficientemente grande, si ha che $\beta(t) \geq R$ per ogni $t \in [0, T]$, e tale β è una sopra-soluzione di (Q). ∎

Corollario 5.8 *Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è decrescente, allora (Q) ha soluzione se e solo se*

$$\bar{e} \in g(\mathbb{R})\,.$$

5.3 Il principio di continuazione

Si tratta di considerare una famiglia di equazioni con un parametro $\sigma \in [0, 1]$:

$$(P_\sigma) \qquad \begin{cases} x'' + g(t, x; \sigma) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,. \end{cases}$$

Qui $g : [0, T] \times \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, con

$$g(t, x, 0) = \lambda x\,, \qquad g(t, x; 1) = g(t, x)\,,$$

e $\lambda \notin \sigma(L)$. In questo modo, (P_0) è lineare e ha solo la soluzione nulla, mentre (P_1) corrisponde a (P).

Teorema 5.9 (Leray - Schauder, 1934) *Se esiste un $R > 0$ tale che ogni (eventuale) soluzione x di (P_σ) è tale che $\|x\|_\infty < R$, allora (P) ha almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Non avendo supposto che g sia a crescita al più lineare, conviene ridefinire gli operatori, non più su $H = L^2(0, T)$, ma su $X = C([0, T])$. Avremo quindi $L : D(L) \subseteq X \to X$, con

$$\begin{aligned} &D(L) = \{x \in C^2([0, T]) : x(0) = x(T)\,,\ x'(0) = x'(T)\}\,, \\ &Lx = -x''\,, \end{aligned}$$

e $N : X \to X$ definito da

$$(Nx)(t) = g(t, x(t))\,.$$

Si vede facilmente che N è continuo e manda limitati in limitati. Inoltre, $(L - \lambda I)^{-1}(N - \lambda I) : X \to X$ è completamente continuo.

Sia $N_\sigma : X \to X$ definito da

$$(N_\sigma x)(t) = g(t, x(t); \sigma)\,,$$

per cui $N_1 = N$. Abbiamo

$$d(I-(L-\lambda I)^{-1}(N_1-\lambda I), B_R) = d(I-(L-\lambda I)^{-1}(N_0-\lambda I), B_R) = d(I, B_R) = 1\,.$$

Pertanto, esiste un $x \in B_R$ tale che $Lx = N_1 x$. ∎

Vediamo come si può usare questo principio per ridimostrare il Teorema 5.1. Prendiamo

$$g(t, x; \sigma) = (1-\sigma)\frac{a+b}{2}x + \sigma g(t, x)\,.$$

Supponiamo per assurdo che esistano una successione $(\sigma_n)_n$ in $[0,1]$ e una successione $(x_n)_n$ di soluzioni di (P_{σ_n}) tale che $\|x_n\|_\infty \to +\infty$. Allora $v_n = x_n/\|x_n\|_\infty$ verifica

$$\begin{cases} v_n''(t) + \alpha_n(t)v_n(t) + \sigma_n \dfrac{r(t, x_n(t))}{\|x_n\|_\infty} = 0\,, \\ v_n(0) = v_n(T)\,, \quad v_n'(0) = v_n'(T)\,, \end{cases}$$

dove

$$\alpha_n(t) = (1-\sigma_n)\frac{a+b}{2} + \sigma_n \gamma(t, x_n(t))\,.$$

Siccome $\alpha_n(t) \in [a,b]$, per ogni $t \in [0,T]$ e $(v_n)_n$ è limitata in norma C^2, esistono tre sottosuccessioni, $(\sigma_{n_k})_k$, $(\alpha_{n_k})_k$ e $(v_{n_k})_k$, un numero $\sigma \in [0,1]$, una funzione $\alpha \in L^2(0,T)$ e una funzione $v \in C^1([0,T])$ tali che $\sigma_{n_k} \to \sigma$, $\alpha_{n_k} \rightharpoonup \alpha$ debolmente in $L^2(0,T)$ e $v_{n_k} \to v$ in $C^1([0,T])$.

L'insieme delle funzioni u tali che $u(t) \in [a,b]$ per quasi ogni $t \in [0,T]$ è convesso e chiuso in $L^2(0,T)$, pertanto è debolmente chiuso. Pertanto, sarà $\alpha(t) \in [a,b]$, per quasi ogni t. Scrivendo

$$v_{n_k} = (L+I)^{-1}\left(\alpha_{n_k} v_{n_k} + \sigma_{n_k}\frac{r(t, x_{n_k})}{\|x_{n_k}\|_\infty} + v_{n_k}\right),$$

sappiamo che $(L+I)^{-1} : L^2(0,T) \to L^2(0,T)$, essendo un operatore compatto, manda successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti, per cui, passando al limite,

$$v = (L+I)^{-1}(\alpha v + v)\,.$$

Quindi, v verifica

$$(A) \qquad \begin{cases} v'' + \alpha(t)v = 0\,, \\ v(0) = v(T)\,, \quad v'(0) = v'(T)\,. \end{cases}$$

Per poter concludere, abbiamo bisogno del seguente risultato.

Lemma 5.10 *Se $a \le \alpha(t) \le b$ per quasi ogni $t \in [0,T]$ e*

$$[a,b] \cap \sigma(L) = \emptyset\,,$$

allora il problema (A) ha solo la soluzione nulla.

Dimostrazione. Distinguiamo due casi.
I caso: $b < 0$. Moltiplicando per v nell'equazione e integrando, si ha

$$0 = \int_0^T [-(v')^2 + \alpha(t)v^2]\,dt \le \int_0^T [-(v')^2 + bv^2]\,dt\,,$$

da cui segue che $v = 0$.
II caso: $(\frac{2\pi N}{T})^2 < a \le b < (\frac{2\pi(N+1)}{T})^2$. Utilizzando la serie di Fourier

$$v(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right),$$

scriviamo $v = v_1 + v_2$, con

$$v_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right),$$
$$v_2(t) \sim \sum_{k=N+1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right).$$

Avremo che

$$v_1'(t) = \sum_{k=1}^{N}\frac{2\pi k}{T}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right),$$
$$v_2'(t) \sim \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{2\pi k}{T}\left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right).$$

Per l'identità di Parseval,

$$\|v_1'\|_2 \le \frac{2\pi N}{T}\|v_1\|_2\,, \qquad \|v_2'\|_2 \ge \frac{2\pi(N+1)}{T}\|v_2\|_2\,. \tag{12}$$

Moltiplicando l'equazione per $v_2 - v_1$ e integrando, si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T [(-(v_2')^2 + (v_1')^2) + \alpha(t)(v_2^2 - v_1^2)]\,dt \\
&\le \int_0^T \left[-(v_2')^2 + bv_2^2\right] dt - \int_0^T \left[-(v_1')^2 + av_1^2\right] dt \\
&\le \left[b - \left(\frac{2\pi(N+1)}{T}\right)^2\right]\|v_2\|_2^2 + \left[\left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2 - a\right]\|v_1\|_2^2\,,
\end{aligned}$$

da cui segue che $v_1 = v_2 = 0$. ■

In conclusione, si deve avere che $v = 0$, in contraddizione col fatto che $\|v_{n_k}\|_\infty = 1$ e $v_{n_k} \to v$ uniformemente in $[0, T]$. La dimostrazione del teorema è così completa.

Osservazione 5.11 Supponiamo che α sia una sotto-soluzione e β sia una sopra-soluzione, e che sia $\alpha(t) < \beta(t)$, per ogni $t \in [0, T]$. Consideriamo l'insieme aperto e limitato

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \{x \in C([0,T]) : \alpha(t) < x(t) < \beta(t), \text{ per ogni } t \in [0,T]\}.$$

Supponendo che non ci siano soluzioni di $Lx = Nx$ in $\partial\Omega_{\alpha,\beta}$, è possibile considerare il grado

$$d(I - (L - \lambda I)^{-1}(N - \lambda I), \Omega_{\alpha,\beta}).$$

Ripercorrendo la dimostrazione del Teorema 5.3, si ha che, per il problema modificato, esiste un $\bar{R} > 0$ tale che, per ogni $R \geq \bar{R}$,

$$d(I - (L - \lambda I)^{-1}(\tilde{N} - \lambda I), B_R) = 1.$$

Prendiamo $R > 0$ in modo che $\Omega_{\alpha,\beta}$ sia contenuto in B_R. Abbiamo visto che ogni soluzione del problema modificato sta in $\Omega_{\alpha,\beta}$. Quindi,

$$d(I - (L - \lambda I)^{-1}(\tilde{N} - \lambda I), \Omega_{\alpha,\beta}) = d(I - (L - \lambda I)^{-1}(\tilde{N} - \lambda I), B_R).$$

D'altra parte, N e $\tilde{N}$ coincidono su $\Omega_{\alpha,\beta}$, quindi

$$d(I - (L - \lambda I)^{-1}(N - \lambda I), \Omega_{\alpha,\beta}) = d(I - (L - \lambda I)^{-1}(\tilde{N} - \lambda I), \Omega_{\alpha,\beta}).$$

In conclusione, se non ci sono soluzioni di $Lx = Nx$ in $\partial\Omega_{\alpha,\beta}$, si ha

$$d(I - (L - \lambda I)^{-1}(N - \lambda I), \Omega_{\alpha,\beta}) = 1.$$

5.4 Oscillatori asimmetrici

Consideriamo l'equazione differenziale scalare

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = e(t), \tag{13}$$

dove $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e T-periodica e μ, ν sono due numeri reali. Qui

$$x^+ = \max\{x, 0\} = \frac{x + |x|}{2}, \qquad x^- = \max\{-x, 0\} = \frac{-x + |x|}{2}.$$

Si noti che $x = x^+ - x^-$, mentre $|x| = x^+ + x^-$. Se $\mu = \nu$, abbiamo l'equazione lineare, che è stata studiata nella Sezione 1.

Se μ e ν sono positivi, le soluzioni dell'equazione

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = 0 \tag{14}$$

sono tutte periodiche di periodo

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} \,.$$

Una soluzione è data da

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu} t) & \text{se } t \in \left[0\,,\, \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right]\,, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\Big(\sqrt{\nu}\Big(\dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}} - t\Big)\Big) & \text{se } t \in \left[\dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}}\,,\, \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right]\,, \end{cases}$$

estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da risultare τ-periodica. Tutte le altre soluzioni di (14) sono del tipo $x(t) = \rho\phi(t + \theta)$, con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, \tau[\,$.

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y\,, \\ y' = -\mu x^+ + \nu x^-\,, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono curve chiuse che circondano l'origine, il quale pertanto è un centro isocrono. Ognuna di queste curve è ottenuta incollando assieme due semi-ellissi, ossia

$$\{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } y^2 + \mu x^2 = c\} \cup \{\,(x, y) : x \leq 0 \text{ e } y^2 + \nu x^2 = c\}\,,$$

con $c \geq 0$.

Come nel caso lineare abbiamo considerato gli autovalori dell'operatore differenziale, così qui possiamo considerare l'insieme Σ delle coppie (μ, ν) per cui l'equazione (14) ha soluzioni T-periodiche non nulle. Si vede allora che Σ contiene, oltre ai due assi cartesiani $\{\mu = 0\}$ e $\{\nu = 0\}$, una successione $(C_N)_{N\geq 1}$ di curve:

$$C_N = \left\{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \mu > 0,\, \nu > 0,\, N\left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right) = T\right\}\,.$$

L'insieme Σ è spesso chiamato **spettro di Dancer - Fucík**.

A differenza dell'equazione lineare, non è pensabile di scrivere le soluzioni T-periodiche di (13) in modo esplicito.

5.4.1 Non risonanza nonlineare

Consideriamo di nuovo il problema periodico

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t, x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \;\; x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

dove $g : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Teorema 5.12 (Drabek - Invernizzi, 1986) *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \gamma_1(t,x)x^+ - \gamma_2(t,x)x^- + r(t,x)\,,$$

con γ_1, γ_2 *e* r *continue tali che*

$$a_1 \le \gamma_1(t,x) \le b_1\,, \quad a_2 \le \gamma_2(t,x) \le b_2\,,$$

e

$$|r(t,x)| \le c\,,$$

per ogni (t,x)*, dove tutte le costanti sono positive. Se*

$$(\,[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]\,) \cap \Sigma = \emptyset \;,$$

allora (P) ha almeno una soluzione.

<u>Dimostrazione</u>. Useremo il principio di continuazione. Sia (μ,ν) definito da

$$\mu = \frac{a_1+b_1}{2}\,, \qquad \nu = \frac{a_2+b_2}{2}\,.$$

Consideriamo, per $\sigma \in [\frac{1}{2},1]$,

$$g(t,x;\sigma) = (2\sigma-1)g(t,x) + (2-2\sigma)(\mu x^+ - \nu x^-)\,.$$

Dimostriamo che esiste un $R > 0$ tale che, per ogni soluzione x di

$$\begin{cases} x'' + g(t,x;\sigma) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \;\; x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

si ha che $\|x\|_\infty \le R$. Se così non fosse, esisterebbero due successioni $(\sigma_n)_n$ in $[\frac{1}{2},1]$ e $(x_n)_n$ soluzioni con $\|x_n\|_\infty \to +\infty$. Ponendo $v_n = x_n/\|x_n\|_\infty$, abbiamo che

$$\begin{cases} v_n''(t) + \alpha_n(t)v_n^+(t) - \beta_n(t)v_n^-(t) + (2\sigma_n-1)\dfrac{r(t,x_n(t))}{\|x_n\|_\infty} = 0\,, \\ v_n(0) = v_n(T)\,, \;\; v_n'(0) = v_n'(T)\,, \end{cases}$$

dove

$$\alpha_n(t) = (2\sigma_n-1)\gamma_1(t,x_n(t)) + 2(1-\sigma_n)\mu\,,$$

$$\beta_n(t) = (2\sigma_n-1)\gamma_2(t,x_n(t)) + 2(1-\sigma_n)\nu\,,$$

Siccome $\alpha_n(t) \in [a_1,b_1]$, $\beta_n(t) \in [a_2,b_2]$, per ogni $t \in [0,T]$ e $(v_n)_n$ è limitata in norma C^2, esistono $(\sigma_{n_k})_k$, $(\alpha_{n_k})_k$, $(\beta_{n_k})_k$ e $(v_{n_k})_k$, un numero $\sigma \in [0,1]$, due funzioni $\alpha,\beta \in L^2(0,T)$ e una funzione $v \in C^1([0,T])$ tali che $\sigma_{n_k} \to \sigma$, $\alpha_{n_k} \rightharpoonup \alpha$ e $\beta_{n_k} \rightharpoonup \beta$ debolmente in $L^2(0,T)$ e $v_{n_k} \to v$ in $C^1([0,T])$.

Dato un intervallo $[a,b]$, l'insieme delle funzioni u tali che $u(t) \in [a,b]$ per quasi ogni $t \in [0,T]$ è convesso e chiuso in $L^2(0,T)$, pertanto è debolmente chiuso. Pertanto, sarà $\alpha(t) \in [a_1,b_1]$ e $\beta(t) \in [a_2,b_2]$, per quasi ogni $t \in [0,T]$. Scrivendo

$$v_{n_k} = (L+I)^{-1}\Big(\alpha_{n_k} v_{n_k}^+ - \beta_{n_k} v_{n_k}^- + (2\sigma_{n_k} - 1)\frac{r(t,x_{n_k})}{\|x_{n_k}\|_\infty} + v_{n_k}\Big),$$

sappiamo che $(L+I)^{-1} : L^2(0,T) \to L^2(0,T)$, essendo un operatore compatto, manda successioni debolmente convergenti in successioni fortemente convergenti, per cui, passando al limite,

$$v = (L+I)^{-1}\big(\alpha v^+ - \beta v^- + v\big)\,.$$

Quindi, v verifica

$$(B) \qquad \begin{cases} v'' + \alpha(t)v^+ - \beta(t)v^- = 0\,, \\ v(0) = v(T)\,, \quad v'(0) = v'(T)\,. \end{cases}$$

Per poter concludere, abbiamo bisogno del seguente risultato.

Lemma 5.13 *Se*

$$a_1 \le \alpha(t) \le b_1\,, \qquad a_2 \le \beta(t) \le b_2\,,$$

per quasi ogni $t \in [0,T]$ e

$$(\,[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]\,) \cap \Sigma = \emptyset\,,$$

il problema (B) ha solo la soluzione nulla.

Dimostrazione. Consideriamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y\,, \\ y' = -\alpha(t)x^+ + \beta(t)x^-\,, \end{cases}$$

e passiamo alle coordinate polari

$$(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,.$$

Otteniamo

$$-\theta'(t) = \begin{cases} \sin^2\theta(t) + \alpha(t)\cos^2\theta(t) & \text{se } \theta(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\,, \\ \\ \sin^2\theta(t) + \beta(t)\cos^2\theta(t) & \text{se } \theta(t) \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\,, \end{cases}$$

con periodicità 2π. Quindi le soluzioni girano sempre in senso orario. Siano $t_0 < t_1$ sono tali che $\theta(t_0) = \frac{\pi}{2}$, $\theta(t_1) = -\frac{\pi}{2}$ e

$$-\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \frac{\pi}{2}\,, \qquad \text{per ogni } t \in]t_0, t_1[\,.$$

Si ha
$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{-\theta'(t)\,dt}{\sin^2\theta(t) + \alpha(t)\cos^2\theta(t)} = \int_{t_0}^{t_1} 1\,dt = t_1 - t_0\,,$$
per cui
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta + b_1\cos^2\theta} < t_1 - t_0 < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta + a_1\cos^2\theta}\,.$$
Essendo
$$\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta + \omega\cos^2\theta} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{\omega}}\right)\,,$$
si ha che
$$\frac{\pi}{\sqrt{b_1}} < t_1 - t_0 < \frac{\pi}{\sqrt{a_1}}\,.$$
Analogamente si dimostra che, se $t_1 < t_2$ tali che $\theta(t_1) = -\frac{\pi}{2}$, $\theta(t_2) = -\frac{3\pi}{2}$ e
$$-\frac{3\pi}{2} < \theta(t) < -\frac{\pi}{2}\,, \qquad \text{per ogni } t \in \,]t_1, t_2[\,,$$
allora si ha che
$$\frac{\pi}{\sqrt{b_2}} < t_2 - t_1 < \frac{\pi}{\sqrt{a_2}}\,.$$
Quindi, in definitiva,
$$\frac{\pi}{\sqrt{b_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{b_2}} < t_2 - t_0 < \frac{\pi}{\sqrt{a_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{a_2}}\,.$$
Se la soluzione è T-periodica, essa compie un certo numero N di giri attorno all'origine nel tempo T. Da quanto sopra, dovrà essere
$$N\left(\frac{\pi}{\sqrt{b_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{b_2}}\right) < T < N\left(\frac{\pi}{\sqrt{a_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{a_2}}\right)\,.$$
Ma allora esiste un $(\mu, \nu) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ tale che
$$N\left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right) = T\,,$$
il che è impossiblie. ∎

Ora consideriamo la parte di curva
$$C_{(\mu,\nu)} = \left\{(u,v) : \frac{\pi}{\sqrt{u}} + \frac{\pi}{\sqrt{v}} = \tau\right\}\,,$$
con $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$, che va da $((\frac{2\pi}{\tau})^2, (\frac{2\pi}{\tau})^2)$ a (μ, ν) e la parametrizziamo con $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$. Ad esempio, definiamo
$$\sigma \mapsto (\mu(\sigma), \nu(\sigma)) = (\rho(\sigma)\cos\theta(\sigma), \rho(\sigma)\sin\theta(\sigma))\,,$$

con

$$\theta(\sigma) = (1-2\sigma)\,\frac{\pi}{4} + 2\sigma \arctan\left(\frac{\nu}{\mu}\right),$$

$$\rho(\sigma) = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\cos\theta(\sigma)}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\theta(\sigma)}}\right)^2.$$

Allora

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu(\sigma)}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu(\sigma)}} = \tau\,,$$

per cui il problema

$$\begin{cases} x'' + \mu(\sigma)x^+ + \nu(\sigma)x^- = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla, per ogni $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$. Il principio di continuazione si applica e permette di concludere. ∎

Corollario 5.14 *Supponiamo che, per a_1, a_2, b_1, b_2 reali e positivi, si abbia*

$$a_1 \le \liminf_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} \le \limsup_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} \le b_1\,,$$

$$a_2 \le \liminf_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \le \limsup_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \le b_2\,,$$

uniformemente rispetto a $t \in [0,T]$, e

$$(\,[a_1,b_1] \times [a_2,b_2]\,) \cap \Sigma = \emptyset\ .$$

Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ per cui

$$(\,[a_1-\varepsilon, b_1+\varepsilon] \times [a_2-\varepsilon, b_2+\varepsilon]\,) \cap \Sigma = \emptyset\,.$$

Sia $R > 0$ tale che

$$x \ge R \;\Rightarrow\; a_1 - \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{g(t,x)}{x} \le b_1 + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$x \le -R \;\Rightarrow\; a_2 - \frac{\varepsilon}{2} \le \frac{g(t,x)}{x} \le b_2 + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$. Definiamo

$$\gamma_1(t,x) = \begin{cases} \dfrac{a_1+b_1}{2} & \text{se } x \le R, \\ \dfrac{a_1+b_1}{2} + \left(\dfrac{g(t,x)}{x} - \dfrac{a_1+b_1}{2}\right)(x-R) & \text{se } R \le x \le R+1, \\ \dfrac{g(t,x)}{x} & \text{se } x \ge R+1. \end{cases}$$

$$\gamma_2(t,x) = \begin{cases} \dfrac{a_2+b_2}{2} & \text{se } x \geq -R, \\ \dfrac{a_2+b_2}{2} + \left(\dfrac{a_2+b_2}{2} - \dfrac{g(t,x)}{x}\right)(x+R) & \text{se } -R-1 \leq x \leq -R, \\ \dfrac{g(t,x)}{x} & \text{se } x \leq -R-1. \end{cases}$$

e

$$r(t,x) = g(t,x) - \gamma_1(t,x)x^+ + \gamma_2(t,x)x^-.$$

Allora $\gamma_1(t,x)$, $\gamma_2(t,x)$, $r(t,x)$ sono continue e si ha

$$g(t,x) = \gamma_1(t,x)x^+ - \gamma_2(t,x)x^- + r(t,x)\,;$$

inoltre, $r(t,x)$ è limitata (perché nulla quando $|x| \geq R+1$) e

$$a_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \gamma_1(t,x) \leq b_1 + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$a_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \gamma_2(t,x) \leq b_2 + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$ e $x \in \mathbb{R}$. Per il teorema precedente, il problema (P) ha almeno una soluzione. ■

Corollario 5.15 *Se μ e ν hanno lo stesso segno e $(\mu,\nu) \notin \Sigma$, allora l'equazione*

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = e(t)$$

ha almeno una soluzione T-periodica.

Dimostrazione. Se $\mu < 0$ e $\nu < 0$, si usa il teorema sulle sotto e sopra-soluzioni. Se $\mu > 0$ e $\nu > 0$, basta applicare il Teorema 5.12. ■

Osservazione 5.16 Si noti che la soluzione non è necessariamente unica. Ad esempio, prendendo $e(t) = 1$, costante, abbiamo un punto di equilibrio $x = \frac{1}{\mu}$. In un intorno di questo punto, le soluzioni risolvono l'equazione lineare

$$x'' + \mu x = 0$$

e sono pertanto periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. D'altra parte, le soluzioni di grande ampiezza hanno un periodo che si avvicina a τ. Supponiamo che sia $\nu < \mu$. Se n è un intero positivo tale che

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} < \frac{T}{n} < \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\,,$$

troviamo in corrispondenza una soluzione T-periodica, di periodo minimo $\frac{T}{n}$. Di tali n ce ne possono essere molti.

5.4.2 Condizioni non bilaterali

Nel risultato seguente il controllo bilaterale sulla funzione $g(t,x)$ è richiesto solo per gli x negativi, mentre per gli x positivi si ha solo il controllo da un lato.

Teorema 5.17 (Fabry - Habets, 1993) *Supponiamo che sia*

$$g(t,x) = \gamma_1(t,x)x^+ - \gamma_2(t,x)x^- + r(t,x)\,,$$

con γ_1, γ_2 e r continue tali che

$$a_1 \le \gamma_1(t,x)\,, \quad a_2 \le \gamma_2(t,x) \le b_2\,,$$

e

$$|r(t,x)| \le c\,,$$

per ogni (t,x), dove tutte le costanti sono positive. Se

$$\mathrm{dist}(\,[a_1,+\infty[\,\times[a_2,b_2]\,,\,\Sigma) > 0\,,^9$$

allora (P) ha almeno una soluzione.

Dimostrazione. Useremo ancora il principio di continuazione. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{T}{N+1} < \frac{\pi}{\sqrt{b_2}} < \frac{\pi}{\sqrt{a_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{a_2}} < \frac{T}{N}$$

(se $N = 0$, conveniamo che l'ultima disuguaglianza sia automaticamente soddisfatta). Consideriamo, per $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$g(t,x;\sigma) = (2\sigma - 1)g(t,x) + (2 - 2\sigma)(a_1x^+ - a_2x^-)\,.$$

Supponiamo per assurdo che esistano due successioni $(\sigma_n)_n$ in $[\frac{1}{2}, 1]$ e $(x_n)_n$, con $\|x_n\|_\infty \to +\infty$, tali che

$$\begin{cases} x_n'' + g(t,x_n;\sigma_n) = 0\,, \\ x_n(0) = x_n(T)\,, \ \ x_n'(0) = x_n'(T)\,, \end{cases}$$

Dimostriamo dapprima che esiste un $R > 0$ tale che $\min(x_n^2 + (x_n')^2) \le R^2$, per ogni n.

[9] Qui e in seguito, la "distanza" tra due insiemi A e B è intesa come

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A,\, b \in B\}\,.$$

Scriviamo l'equazione differenziale nel sistema equivalente

$$\begin{cases} x_n' = y_n \,, \\ y_n' = -g(t, x_n; \sigma_n)\,. \end{cases} \tag{15}$$

e studiamo il comportamento delle soluzioni, supponendo per assurdo che, per una sottosuccessione, $\lim_n (x_n^2(t) + y_n^2(t)) = +\infty$, uniformemente in $t \in [0, T]$. Passando a coordinate polari modificate

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a_1}}\, \rho_n(t) \cos\theta_n(t) & \text{se } x_n(t) \geq 0\,, \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{a_2}}\, \rho_n(t) \cos\theta_n(t) & \text{se } x_n(t) \leq 0\,, \end{cases} \qquad y_n(t) = \rho_n(t) \sin\theta_n(t)\,,$$

si avrebbe

$$\theta_n'(t) = \begin{cases} \sqrt{a_1}\, \dfrac{y_n'(t)x_n(t) - x_n'(t)y_n(t)}{a_1 x_n^2(t) + y_n^2(t)}\,, & \text{se } x_n(t) \geq 0\,, \\ \\ \sqrt{a_2}\, \dfrac{y_n'(t)x_n(t) - x_n'(t)y_n(t)}{a_2 x_n^2(t) + y_n^2(t)}\,, & \text{se } x_n(t) \leq 0\,. \end{cases}$$

Sia K il numero di rotazioni che la soluzione $(x_n(t), y_n(t))$ compie attorno all'origine nel tempo T, e sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$\varepsilon < 1 - \frac{N}{T}\Big(\frac{\pi}{\sqrt{a_1}} + \frac{\pi}{\sqrt{a_2}} \Big)\,.$$

Essendo $r(t, x)$ limitata, possiamo scegliere $R > 0$ in modo che

$$x^2 + y^2 \geq R^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{r(t,x)\, x}{a_i\, x^2 + y^2} \right| \leq \varepsilon\,,$$

per $i = 1, 2$. Indichiamo brevemente con $\{x_n > 0\}$ l'insieme

$$\{t \in [0, T] : x_n(t) > 0\}\,,$$

e analogamente per $\{x_n < 0\}$. Integrando $-\theta_n'(t)$ rispettivamente su $\{x_n > 0\}$ e su $\{x_n < 0\}$, per n sufficientemente grande si ottiene

$$\begin{aligned} \pi K &= \sqrt{a_1} \int_{\{x_n > 0\}} \frac{[(2\sigma_n - 1)\gamma_1(t, x_n) + (2 - 2\sigma_n)a_1]\, x_n^2 + y_n^2}{a_1 x_n^2 + y_n^2} + \\ &\quad + \sqrt{a_1} \int_{\{x_n > 0\}} \frac{(2\sigma_n - 1) r(t, x_n) x_n}{a_1 x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{a_1}(1 - \varepsilon) \mathrm{meas}\{x_n > 0\}\,, \\ \pi K &= \sqrt{a_2} \int_{\{x_n < 0\}} \frac{[(2\sigma_n - 1)\gamma_2(t, x_n) + (2 - 2\sigma_n)a_2]\, x_n^2 + y_n^2}{a_2 x_n^2 + y_n^2} + \\ &\quad + \sqrt{a_2} \int_{\{x_n < 0\}} \frac{(2\sigma_n - 1) r(t, x_n) x_n}{a_2 x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{a_2}(1 - \varepsilon) \mathrm{meas}\{x_n < 0\}\,. \end{aligned}$$

Essendo $x_n^2(t) + y_n^2(t) > 0$ per ogni t, si ha che x_n ha solo zeri semplici, per cui

$$\text{meas}\{x_n > 0\} + \text{meas}\{x_n < 0\} = T\,.$$

Quindi,

$$\frac{\pi K}{\sqrt{a_1}} + \frac{\pi K}{\sqrt{a_2}} \geq (1-\varepsilon)T > \frac{\pi N}{\sqrt{a_1}} + \frac{\pi N}{\sqrt{a_2}}\,,$$

da cui $K > N$. Similmente, prendendo $\varepsilon' > 0$ tale che

$$\varepsilon' < \frac{\pi(N+1)}{T\sqrt{b_2}} - 1\,,$$

possiamo eventualmente aumentare $R > 0$ in modo che

$$x^2 + y^2 \geq R^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{r(t,x)\,x}{b_2\,x^2 + y^2}\right| \leq \varepsilon'\,,$$

e si vede che, per n sufficientemente grande,

$$\begin{aligned}\pi K &= \sqrt{b_2}\int_{\{x_n<0\}} \frac{[(2\sigma_n - 1)\gamma_2(t,x_n) + (2-2\sigma_n)b_2]\,x_n^2 + y_n^2}{b_2x_n^2 + y_n^2} + \\ &\quad + \sqrt{b_2}\int_{\{x_n<0\}} \frac{(2\sigma_n-1)r(t,x_n)x_n}{b_2x_n^2+y_n^2} \leq \sqrt{b_2}(1+\varepsilon')\text{meas}\{x_n<0\} \\ &\quad < \frac{\pi(N+1)}{T}\text{meas}\{x_n<0\} < \pi(N+1)\,,\end{aligned}$$

da cui $K < N+1$. Abbiamo così dimostrato che, se $\min(x_n^2 + y_n^2) \geq R$, la soluzione del sistema gira più di N volte e meno di $N+1$ volte attorno all'origine, nel tempo T. Tale soluzione non può quindi essere T-periodica, il che è assurdo.

Costruiamo ora una curva Γ che ci permetterà di "controllare" le soluzioni di grande ampiezza. A tal scopo, definiamo due funzioni continue e strettamente crescenti $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$g_1(x) + 1 \leq g(t,x;\sigma) \leq g_2(x) - 1\,,$$

per le quali, considerate le loro primitive

$$G_1(x) = \int_0^x g_1(u)\,du\,, \qquad G_2(x) = \int_0^x g_2(u)\,du\,,$$

si abbia che

$$\lim_{|x|\to\infty} G_1(x) = \lim_{|x|\to\infty} G_2(x) = +\infty\,.$$

Per quanto riguarda la funzione g_1, possiamo prendere

$$g_1(x) = \tfrac{1}{2}a_1x^+ - \tfrac{3}{2}a_2x^- - c\,,$$

per un'opportuna costante $c > 0$. Per g_2 la costruzione è un po' più laboriosa: per $x \leq 0$ si può prendere

$$g_2(x) = \tfrac{1}{2} b_2 x^- + c'\,,$$

per un'opportuna costante $c' > 0$. Per $x \geq 0$, si può procedere così: consideriamo delle costanti $c_j > 0$ tali che la successione $(c_j)_j$ sia strettamente crescente, con $c_0 \geq c'$ e

$$g(t, x; \sigma) + 1 \leq c_j \quad \text{ se } x \in [j, j+1]\,.$$

Possiamo ora supporre c' uguale a c_0, eventualmente aumentando c' di un po'. Prendiamo poi la spezzata che congiunge i punti (j, c_j) e otteniamo così il grafico di g_2 per $x \geq 0$.

Sia $d > 0$ tale che

$$|x| \geq d \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(x) g(t, x; \sigma) \geq 2\,.$$

Definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_N &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\}\,, & \mathcal{Z}_E &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1,\ x \geq d\}\,, \\ \mathcal{Z}_S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq -1\}\,, & \mathcal{Z}_W &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1,\ x \leq -d\}\,. \end{aligned}$$

Costruiamo la curva Γ a partire dal punto $(\alpha_0, 1)$, con $\alpha_0 \leq -d$ tale che $G(\alpha_0) \geq G(d)$. Su $\mathcal{Z}_N$ sarà una curva di livello della funzione strettamente convessa $\frac{1}{2}y^2 + G_1(x)$. Si arriva così al punto $(\alpha_1, 1)$, con $\alpha_1 > 0$ tale che $G_1(\alpha_1) = G_1(\alpha_0)$. Per come abbiamo scelto α_0, si ha che $\alpha_1 \geq d$. A questo punto, la curva attraversa $\mathcal{Z}_E$ in modo rettilineo, con pendenza $-m_1$, con $m_1 \in]0, 1]$ da fissarsi. Si arriva così al punto $(\alpha_2, -1)$, con $\alpha_2 = \alpha_1 + 2/m_1$. A questo punto, su $\mathcal{Z}_S$ la curva diventa una curva di livello della funzione strettamente convessa $\frac{1}{2}y^2 + G_2(x)$, fino ad arrivare al punto $(\alpha_3, -1)$, con $\alpha_3 < 0$ tale che $G_2(\alpha_3) = G_2(\alpha_2)$. Su $\mathcal{Z}_W$ la curva sarà di nuovo rettilinea, con pendenza $-m_1$, fino ad arrivare al punto $(\alpha_4, 1)$, con $\alpha_4 = \alpha_3 - 2/m_1$. Ed ecco che la scelta di m_1 deve essere tale che $\alpha_4 \leq \alpha_0 - 1$. Ora si ricomincia allo stesso modo, scegliendo per il secondo giro una opportuna pendenza $-m_2$ su $\mathcal{Z}_E$ e $\mathcal{Z}_W$, con $m_2 \in]0, m_1]$ e così via, in modo che la curva così costruita spiraleggi con un'ampiezza via via maggiore, che tende all'infinito, se la si percorre in senso orario.

Vediamo che ogni soluzione $(x_n(t), y_n(t))$ del nostro sistema che intersechi la curva Γ lo deve fare dall'esterno verso l'interno. Infatti, su $\mathcal{Z}_N$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}y_n^2(t) + G_1(x_n(t)\Big) &= y_n(t) y_n'(t) + g_1(x_n(t)) x_n'(t) \\ &= y_n(t)(g_1(x_n(t)) - g(t, x_n(t); \sigma_n)) \\ &\leq -1 < 0\,. \end{aligned}$$

Analogamente, su $\mathcal{Z}_S$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\tfrac{1}{2}y_n^2(t) + G_2(x_n(t)\Big) &= y_n(t)y_n'(t) + g_2(x_n(t))x_n'(t)\\ &= y_n(t)(g_2(x_n(t)) - g(t, x_n(t); \sigma_n))\\ &\le -1 < 0\,.\end{aligned}$$

Inoltre, su $\mathcal{Z}_E$,

$$\begin{pmatrix} y_n(t) \\ -g(t, x_n(t); \sigma_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \end{pmatrix} = m_1 y_n(t) - g_n(t, x_n(t); \sigma_n) \le -1 < 0\,,$$

mentre, su $\mathcal{Z}_W$,

$$\begin{pmatrix} y_n(t) \\ -g(t, x_n(t); \sigma_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -m_1 \\ -1 \end{pmatrix} = -m_1 y_n(t) + g(t, x_n(t); \sigma_n) \le -1 < 0\,.$$

Sappiamo che $\min(x_n^2+y_n^2) \le R^2$ e $\max(x_n^2+y_n^2) = R_n \to +\infty$. Estendendo la soluzione per T-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, possiamo prendere $t_n' < t_n''$, con $t_n'' - t_n' < T$, tali che

$$x_n^2(t_n') + y_n^2(t_n') = R^2\,, \qquad x_n^2(t_n'') + y_n^2(t_n'') = R_n^2\,,$$

e

$$x_n^2(t) + y_n^2(t) > R^2 \quad \text{per ogni } t \in]t_n', t_n''[\,.$$

Prendiamo R_n così grande che, per andare in direzione radiale dalla circonferenza di raggio R a quella di raggio R_n, si debba incontrare la curva Γ almeno $N+4$ volte. Siccome la nostra soluzione non può intersecare la curva dall'interno verso l'esterno, al variare di t da t_n' a t_n'' essa dovrà seguire l'andamento a spirale della curva Γ e compiere almeno $N+2$ rotazioni attorno all'origine. Sia

$$A_n = \{t \in [t_n', t_n''] : x_n(t) < 0\}\,.$$

Scegliendo $\varepsilon' > 0$ e $R > 0$ come sopra, integrando $-\theta_n'(t)$ su A_n, si vede che

$$\begin{aligned}\pi(N+2) &\le \sqrt{b_2}\int_{A_n} \frac{[(2\sigma_n - 1)\gamma_2(t, x_n) + (2 - 2\sigma_n)b_2]\, x_n^2 + y_n^2}{b_2 x_n^2 + y_n^2} + \\ &\quad + \sqrt{b_2}\int_{A_n} \frac{(2\sigma_n - 1)r(t, x_n)x_n}{b_2 x_n^2 + y_n^2} \le \sqrt{b_2}(1+\varepsilon')\mathrm{meas}(A_n)\\ &< \frac{\pi(N+1)}{T}\mathrm{meas}(A_n) < \pi(N+1)\,,\end{aligned}$$

una contraddizione.

Abbiamo così dimostrato che non può essere $\|x_n\|_\infty \to +\infty$. Quindi, per $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1]$, abbiamo una stima a priori delle soluzioni. La dimostrazione del teorema si conclude ora come per il Teorema 5.12, riportando con una ulteriore omotopia, per $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$, il punto (a_1, a_2) sulla bisettrice degli assi. ∎

Corollario 5.18 *Supponiamo che, per a_1, a_2, b_2 reali e positivi, si abbia*

$$a_1 \leq \liminf_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x}\,,$$
$$a_2 \leq \liminf_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq \limsup_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq b_2\,,$$

uniformemente rispetto a $t \in [0,T]$. Se

$$\mathrm{dist}(\,[a_1,+\infty[\,\times[a_2,b_2]\,,\,\Sigma) > 0\,,$$

Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ per cui

$$\mathrm{dist}(\,[a_1,+\infty[\,\times[a_2,b_2]\,,\,\Sigma) \geq \varepsilon\,.$$

Sia $R > 0$ tale che

$$x \geq R \;\Rightarrow\; a_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{g(t,x)}{x}\,,$$
$$x \leq -R \;\Rightarrow\; a_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{g(t,x)}{x} \leq b_2 + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$. Definiamo

$$\gamma_1(t,x) = \begin{cases} a_1 & \text{se } x \leq R, \\ a_1 + \left(\dfrac{g(t,x)}{x} - a_1\right)(x-R) & \text{se } R \leq x \leq R+1, \\ \dfrac{g(t,x)}{x} & \text{se } x \geq R+1. \end{cases}$$

$$\gamma_2(t,x) = \begin{cases} \dfrac{a_2+b_2}{2} & \text{se } x \geq -R, \\ \dfrac{a_2+b_2}{2} + \left(\dfrac{a_2+b_2}{2} - \dfrac{g(t,x)}{x}\right)(x+R) & \text{se } -R-1 \leq x \leq -R, \\ \dfrac{g(t,x)}{x} & \text{se } x \leq -R-1. \end{cases}$$

e

$$r(t,x) = g(t,x) - \gamma_1(t,x)x^+ + \gamma_2(t,x)x^-.$$

Allora $\gamma_1(t,x)$, $\gamma_2(t,x)$, $r(t,x)$ sono continue e si ha

$$g(t,x) = \gamma_1(t,x)x^+ - \gamma_2(t,x)x^- + r(t,x)\,;$$

inoltre, $r(t,x)$ è limitata (perché nulla quando $|x| \geq R+1$) e

$$a_1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \gamma_1(t,x)\,,$$
$$a_2 - \frac{\varepsilon}{2} \leq \gamma_2(t,x) \leq b_2 + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$ e $x \in \mathbb{R}$. Infine,

$$\mathrm{dist}(\,[a_1 - \tfrac{\varepsilon}{2}, +\infty[\,\times[a_2 - \tfrac{\varepsilon}{2}, b_2 + \tfrac{\varepsilon}{2}]\,,\,\Sigma) > 0\,.$$

Per il teorema precedente, il problema (P) ha almeno una soluzione. ■

Corollario 5.19 (Mawhin - Ward, 1983) *Supponiamo che*

$$0 < a_1 \leq \liminf_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x}\,,$$
$$0 < a_2 \leq \liminf_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq \limsup_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq b_2 < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2\,,$$

uniformemente rispetto a $t \in [0,T]$. *Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che

$$\mathrm{dist}(\,[a_1,+\infty[\,\times[a_2,b_2]\,,\,\Sigma) = \min\left\{a_1\,,\,a_2\,,\,\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 - b_2\right\},$$

e applicare il Corollario 5.18. ∎

Corollario 5.20 *Supponiamo che*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} = +\infty\,,$$

ed esista un intero $N \geq 1$ *tale che, per* a_2, b_2 *reali e positivi, si abbia*

$$\left(\frac{N\pi}{T}\right)^2 < a_2 \leq \liminf_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq \limsup_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq b_2 < \left(\frac{(N+1)\pi}{T}\right)^2\,,$$

uniformemente rispetto a $t \in [0,T]$. *Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Prendendo $a_1 > 0$ sufficientemente grande, si verifica che

$$\mathrm{dist}(\,[a_1,+\infty[\,\times[a_2,b_2]\,,\,\Sigma) \geq \min\left\{\left(\frac{(N+1)\pi}{T}\right)^2 - b_2\,,\,\frac{1}{2}\left(a_2 - \left(\frac{N\pi}{T}\right)^2\right)\right\},$$

per cui si può applicare il Corollario 5.18. ∎

Tutti i risultati di questa sezione hanno i loro corrispettivi in cui sono scambiate le ipotesi per $x > 0$ con quelle per $x < 0$. Ad esempio, per quanto riguarda il Corollario 5.18, abbiamo il seguente.

Corollario 5.21 *Supponiamo che, per* a_1, a_2, b_1 *reali e positivi, si abbia*

$$a_1 \leq \liminf_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq \limsup_{x\to+\infty} \frac{g(t,x)}{x} \leq b_1\,,$$
$$a_2 \leq \liminf_{x\to-\infty} \frac{g(t,x)}{x}\,,$$

uniformemente rispetto a $t \in [0,T]$. *Se*

$$\mathrm{dist}(\,[a_1,b_1] \times [a_2,+\infty[\,,\,\Sigma) > 0\,,$$

Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.

5.4.3 Il problema di Ambrosetti - Prodi

Consideriamo infine il caso in cui μ e ν abbiano segno opposto. Ad esempio, sia $\mu > 0$, $\nu < 0$. Il problema

$$\begin{cases} x'' + \mu x^+ + \nu x^- = s\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

ha due punti di equilibrio se $s > 0$, uno solo se $s = 0$ e nessuno se $s < 0$. Lo studio di questo tipo di situazioni ha avuto inizio in un lavoro di Ambrosetti e Prodi, nel 1972. Citiamo il seguente risultato molto generale.

Teorema 5.22 (Fabry - Mawhin - Nkashama, 1985) *Supponiamo che*

$$\lim_{|x|\to\infty} g(t,x) = +\infty\,,$$

uniformemente in $t \in [0,T]$. Allora esiste un $s_0 \in \mathbb{R}$ tale che il problema

$$(P_s) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = s\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

non ha soluzioni per $s < s_0$, ha almeno una soluzione per $s = s_0$ e ha almeno due soluzioni per $s > s_0$.

Dimostrazione. Sia

$$m_g = \min\{g(t,x) : t \in [0,T],\, x \in \mathbb{R}\}\,.$$

Vediamo che, se $s < m_g$, il problema (P_s) non ha soluzione. Infatti, se x fosse una soluzione, sarebbe $x''(t) = -g(t,x(t)) - s < 0$ per ogni $t \in [0,T]$, per cui x sarebbe strettamente convessa, e non potrebbe verificare le condizioni $x(0) = x(T)$, $x'(0) = x'(T)$.

Sia ora

$$s_1 = \max\{g(t,0) : t \in [0,T]\}\,.$$

Se $s \geq s_1$, la costante $\beta = 0$ è una sopra-soluzione per (P_s). D'altra parte, esiste $R_s > 0$ tale che

$$|x| > R_s \quad \Rightarrow \quad g(t,x) > s\,, \quad \text{per ogni } t \in [0,T]\,.$$

Ne segue che, se $s \geq s_1$, la costante $\alpha = -R_s$ è una sotto-soluzione per (P_s). Per tali s, esiste quindi almeno una soluzione di (P_s) tra $-R_s$ e 0. Sia

$$s_0 = \inf\{s \in \mathbb{R} : (P_s) \text{ ha almeno una soluzione}\}\,.$$

Da quanto visto sopra, $s_0 \in [m_g, s_1]$. Vediamo ora che, per ogni $s > s_0$, il problema (P_s) ha soluzione. Infatti, sia $\varepsilon \in]0, s - s_0[$ per cui $(P_{s_0+\varepsilon})$ ha una soluzione $\hat{x}(t)$. Allora $\hat{x}$ è una sopra-soluzione per (P_s). Prendendo una costante $\alpha \leq -R_s$ tale che $\alpha \leq \min \hat{x}$, si ha che α è una sotto-soluzione, quindi (P_s) ha una soluzione tra α e $\hat{x}$.

Fissiamo ora un $\bar{s} > s_0$, e prendiamo $s \leq \bar{s}$. Dimostreremo che esiste una costante $K_{\bar{s}} > 0$ tale che, per ogni soluzione $x(t)$ con $s \leq \bar{s}$, si ha che $\|x\|_\infty < K_{\bar{s}}$. Sia $x(t)$ una tale soluzione. Scriviamo $x(t) = \bar{x} + \tilde{x}(t)$, dove $\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$ è la media di x. Integrando l'equazione, si vede che

$$\frac{1}{T}\int_0^T g(t, x(t))\,dt = s\,.$$

Ne segue che esiste un $t_0 \in [0, T]$ tale che $x(t_0) \in [-R_{\bar{s}}, R_{\bar{s}}]$. D'altra parte, moltiplicando per $\tilde{x}(t)$ e integrando, si ha

$$\begin{aligned}\|x'\|_2^2 &= \int_0^T \tilde{x}(t) g(t, x(t))\,dt = \int_0^T \tilde{x}(t)(g(t, x(t)) - m_g)\,dt \\ &\leq \|\tilde{x}\|_\infty \int_0^T |g(t, x(t)) - m_g|\,dt = \|\tilde{x}\|_\infty T(s - m_g) \leq \|\tilde{x}\|_\infty T(\bar{s} - m_g)\,.\end{aligned}$$

Essendo $\tilde{x}$ a media nulla, esiste un $t_1 \in [0, T]$ per cui $\tilde{x}(t_1) = 0$. Quindi,

$$|\tilde{x}(t)| = \left|\tilde{x}(t_1) + \int_{t_0}^t \tilde{x}'(s)\,ds\right| \leq \sqrt{T}\|\tilde{x}'\|_2\,.$$

Siccome $\tilde{x}'(t) = x'(t)$, abbiamo che $\|\tilde{x}\|_\infty \leq \sqrt{T}\|x'\|_2$. Ne segue che $\|x'\|_2 \leq C_{\bar{s}}$, con $C_{\bar{s}} = T^{3/2}(\bar{s} - m_g)$. Abbiamo quindi che

$$|x(t)| = \left|x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s)\,ds\right| \leq |x(t_0)| + \sqrt{T}\|x'\|_2 \leq R_{\bar{s}} + \sqrt{T}C_{\bar{s}}\,,$$

per ogni $t \in [0, T]$, ossia $\|x\|_\infty < K_{\bar{s}}$, con $K_{\bar{s}} = R_{\bar{s}} + T^2(\bar{s} - m_g)$.

Sia $X = C([0, T])$, definiamo l'operatore $L : D(L) \subseteq X \to X$ al solito modo, e poniamo

$$\begin{aligned}&N_s : X \to X\,,\\ &(N_s x)(t) = g(t, x(t)) - s\,.\end{aligned}$$

Sia $\Omega_s = \{x \in X : \|x\|_\infty < K_s\}$, e prendiamo un $\lambda \notin \sigma(L)$. Siccome per $s < m_g$ il problema non ha soluzione, usando l'invarianza del grado per omotopie, si ha

$$d(I - (L - \lambda I)^{-1}(N_s - \lambda I), \Omega_s) = 0\,,$$

per ogni $s \leq \bar{s}$. Prendiamo ora $s \in]s_0, \bar{s}]$. Come abbiamo visto sopra, prendendo $\varepsilon \in]0, s - s_0[$, $(P_{s_0+\varepsilon})$ ha una soluzione $\hat{x}(t)$, che risulta essere una sopra-soluzione per (P_s). Prendendo una costante $\alpha \leq -R_s$ tale che $\alpha < \min \hat{x}$, si ha che α è una sotto-soluzione. Sia

$$\Omega^{(1)} = \{x \in C([0, T]) : \alpha < x(t) < \hat{x}(t),\ \text{per ogni } t \in [0, T]\}\,.$$

Dimostriamo che (P_s) non ha soluzioni in $\partial\Omega^{(1)}$. Infatti, sia x una soluzione di (P_s) tale che $\alpha \leq x(t) \leq \hat{x}(t)$, per ogni $t \in [0, T]$. Dimostriamo che $\alpha < x(t)$, per ogni $t \in [0,T]$. Se fosse $\alpha = x(\tau)$, per un certo $\tau \in [0,T]$, allora sarebbe $x'(\tau) = 0$ e $x''(\tau) \geq 0$. D'altra parte,

$$x''(\tau) = -g(\tau, x(\tau)) + s = -g(\tau, \alpha) + s < 0\,,$$

una contraddizione. D'altra parte, se esistesse un $\sigma \in [0,T]$ per cui $x(\sigma) = \hat{x}(\sigma)$, allora sarebbe $x'(\sigma) = \hat{x}'(\sigma)$ e $x''(\sigma) \geq \hat{x}''(\sigma)$. D'altra parte,

$$x''(\sigma) = -g(\sigma, x(\sigma)) + s = -g(\sigma, \hat{x}(\sigma)) + s < \hat{x}''(\sigma)\,,$$

e ritroviamo una contraddizione.

Dall'Osservazione 5.11 segue allora che

$$d(I - (L - \lambda I)^{-1}(N_s - \lambda I), \Omega^{(1)}) = 1\,.$$

Ponendo $\Omega^{(2)} = \Omega_s \backslash \overline{\Omega}^{(1)}$, siccome il grado su Ω è nullo, si ha che

$$d(I - (L - \lambda I)^{-1}(N_s - \lambda I), \Omega^{(2)}) = -1\,.$$

Quindi, per $s \in]s_0, \bar{s}]$, esistono almeno due soluzioni di (P_s), una in $\Omega^{(1)}$ e una in $\Omega^{(2)}$. Avendo scelto $\bar{s} > s_0$ arbitrariamente, abbiamo così dimostrato che, per ogni $s > s_0$, esistono almeno due soluzioni di (P_s).

Resta da dimostrare che per $s = s_0$ il problema (P_s) ha almeno una soluzione. Sia $(s_n)_n$ una successione tale che $s_n \in]s_0, \bar{s}]$ per ogni $n \geq 1$ e $\lim_n s_n = s_0$. Sia x_n una soluzione di (P_{s_n}). Abbiamo visto che esiste una costante $K > 0$ tale che $\|x_n\|_\infty < K$, per ogni n. Allora $(x_n)_n$ è limitata in $C^2([0,T])$, e per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione che converge uniformemente ad una certa funzione $x(t)$. Essendo $x_n = (L - \lambda I)^{-1}(N_{s_n} - \lambda I)x_n$, passando al limite si ha che $x = (L - \lambda I)^{-1}(N_{s_0} - \lambda I)x$, per cui x è soluzione di (P_{s_0}). ■