4 Il grado topologico

In questo capitolo svilupperemo la teoria del grado topologico. Tratteremo dapprima il caso della dimensione finita, costruendo il cosiddetto "grado di Brouwer". Estenderemo poi tale costruzione al caso degli spazi di dimensione infinita, proponendo il "grado di Leray-Schauder".

4.1 Il grado di Brouwer

Teorema 4.1 (esistenza e unicità del grado) *Esiste ed è unica una funzione d che associa ad ogni aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e ad ogni funzione continua $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$ un numero reale*

$$d(f, \Omega)\,,$$

con le seguenti tre proprietà:

• *A*1 *(normalizzazione). Se $0 \in \Omega$, allora $d(I, \Omega) = 1$;* [3]

• *A*2 *(additività). Se Ω_1 e Ω_2 sono due sottoinsiemi aperti disgiunti di Ω tali che $0 \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2)$;*

• *A*3 *(invarianza per omotopie). Se $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$, allora $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$* [4] *è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.*

Il numero $d(f, \Omega)$ si chiama **grado topologico** (o semplicemente **grado**) di f relativo all'insieme Ω. Prima di mostrare la costruzione del grado, ne assumeremo l'esistenza e ne trarremo alcune conseguenze dirette, dalle quali deriverà l'unicità del grado stesso.

Come nell'enunciato del teorema, sarà essenziale supporre che:
▷ Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$,
▷ $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua,
▷ $0 \notin f(\partial\Omega)$.

Osserviamo che, prendendo $\Omega_1 = \Omega$ e $\Omega_2 = \emptyset$, da $A2$ segue che

$$d(f, \emptyset) = 0\,.$$

Inoltre, sempre da $A2$, con $\Omega_2 = \emptyset$, segue la proprietà

• *P*1 (excisione). *Se Ω_1 è un sottoinsieme aperto di Ω tale che $0 \notin f(\overline{\Omega} \backslash \Omega_1)$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1)$.*

In particolare, prendendo $\Omega_1 = \emptyset$, si ha

• *P*2. *Se $0 \notin f(\overline{\Omega})$, allora $d(f, \Omega) = 0$.*

Equivalentemente, tenendo presente che $0 \notin f(\partial\Omega)$,

• *P*2′ (esistenza). *Se $d(f, \Omega) \neq 0$, allora esiste un $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$.*

---

[3] I sta a indicare la funzione identità.

[4] $F(\cdot, \lambda) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è la funzione definita da $x \mapsto F(x, \lambda)$, per ogni $\lambda \in [0, 1]$.

Come conseguenza di $A3$, abbiamo la proprietà

• $P3$ (di Rouché). *Se* $\max_{\partial\Omega} \|f - g\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$, *allora* $d(f, \Omega) = d(g, \Omega)$.

In effetti, basta considerare la funzione continua $F(x, \lambda) = (1-\lambda)f(x)+\lambda g(x)$ e osservare che, se $x \in \partial\Omega$ e $\lambda \in [0, 1]$, allora [5]

$$\|F(x, \lambda)\| = \|f(x) - \lambda(f(x) - g(x))\| \geq \|f(x)\| - \lambda\|f(x) - g(x)\| > 0\,.$$

Quindi, $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$ e, per $A3$,

$$d(f, \Omega) = d(F(\cdot, 0), \Omega) = d(F(\cdot, 1), \Omega) = d(g, \Omega)\,.$$

In particolare, si ha

• $P4$. *Se* $f = g$ *su* $\partial\Omega$, *allora* $d(f, \Omega) = d(g, \Omega)$.

Vediamo ora il caso di una funzione lineare $f = \mathcal{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Si noti che, se $\ker \mathcal{A} \neq \{0\}$ e $\ker \mathcal{A} \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$, allora anche $\ker \mathcal{A} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, per cui il grado $d(\mathcal{A}, \Omega)$ risulta non definito. Se invece $\ker \mathcal{A}\cap\overline{\Omega} =\emptyset$, per $P2$ si ha $d(\mathcal{A}, \Omega) = 0$.

• $P5$. *Sia* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *lineare e invertibile. Se* $0 \in \Omega$, *allora*

$$d(\mathcal{A}, \Omega) = \mathrm{sgn}(\det \mathcal{A})\,.$$

Dimostrazione. Se un'applicazione lineare si annulla solo in 0, la proprietà $P1$ ci assicura che il suo grado topologico è lo stesso per tutti gli aperti che contengono 0. Per semplicità, prendiamo $\Omega = B_R$. Supporremo noto il seguente

Lemma 4.2 *Siano* $\lambda_1, ..., \lambda_p$ *gli (eventuali) autovalori reali negativi di* $\mathcal{A}$. *Allora* $\mathbb{R}^N = \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}$, *dove* $\mathcal{N}$ *e* $\mathcal{M}$ *sono sottospazi tali che:*
(i) $\mathcal{A}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ *e* $\mathcal{A}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$*;*
(ii) $\lambda_1, ..., \lambda_p$ *sono i soli autovalori di* $\mathcal{A}|_{\mathcal{N}}$*;*
(iii) $\mathcal{A}|_{\mathcal{M}}$ *non ha autovalori reali negativi.*

Essendo $\mathcal{A}$ una applicazione lineare reale, gli autovalori complessi appaiono a coppie del tipo λ, λ^*, per cui si avrà

$$\mathrm{sgn}(\det \mathcal{A}) = (-1)^m\,,$$

con $m = \dim\mathcal{N} = \sum_{k=1}^p m_k$, dove $m_1, ..., m_p$ sono le molteplicità degli autovalori negativi $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

Se $m = 0$, ossia se $\mathcal{A}$ non ha autovalori reali negativi, consideriamo la funzione continua $F(x, \lambda) = (1 - \lambda)\mathcal{A}x + \lambda x$. [6] Siccome gli autovalori delle applicazioni lineari $(1-\lambda)\mathcal{A}+\lambda I$, con $\lambda \in [0, 1]$, stanno sui segmenti nel piano

[5] Qui e nel seguito, $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^N$.

[6] Le omotopie in questa dimostrazione, per mancanza di fantasia, si denoteranno tutte con $F(x, \lambda)$ o con $G(x, \lambda)$.

complesso che congiungono gli autovalori di $\mathcal{A}$ con il punto 1, essi non possono essere nulli, per alcun $\lambda \in [0,1]$, e da $A3$ e $A1$ segue che

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(I, B_R) = 1 = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A})\,.$$

Supponiamo ora $m \geq 1$. Siano $\mathcal{P} : \mathbb{R}^N \to \mathcal{N}$ e $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P} : \mathbb{R}^N \to \mathcal{M}$ le due proiezioni associate alla decomposizione $\mathbb{R}^N = \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}$. Consideriamo la funzione continua $F(x,\lambda) = (1-\lambda)\mathcal{A}x + \lambda(-\mathcal{P} + \mathcal{Q})x$, e vediamo quando si annulla. Se $\lambda = 1$, deve essere $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Se $\lambda \in [0,1[$, per (i) abbiamo

$$F(x,\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}\mathcal{P}x = \frac{\lambda}{1-\lambda}\mathcal{P}x \quad \text{e} \quad \mathcal{A}\mathcal{Q}x = -\frac{\lambda}{1-\lambda}\mathcal{Q}x\,,$$

e per (ii) e (iii) deve essere ancora $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Per $A3$,

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(-\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R)\,.$$

Considereremo ora separatamente i casi in cui m sia pari o dispari.

Supponiamo m pari. Sia $\mathcal{B} : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ un'applicazione lineare che non abbia autovalori reali: ad esempio, possiamo prenderla in modo che $\mathcal{B}^2 = -I : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, cosicché i suoi autovalori sono $\pm i$. Questo si può fare scegliendo una base ortogonale in $\mathcal{N}$ e la matrice $m \times m$ associata a $\mathcal{B}$ a blocchi sulla diagonale del tipo $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Consideriamo la funzione continua

$$F(x,\lambda) = (1-\lambda)(-\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q})x\,,$$

e vediamo quando si annulla. Se $\lambda = 0$, deve essere $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Se $\lambda \in]0,1]$, abbiamo

$$F(x,\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B}\mathcal{P}x = \frac{1-\lambda}{\lambda}\mathcal{P}x \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}x = 0\,,$$

per cui deve essere ancora $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Per $A3$, si ha

$$d(-\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R)\,.$$

Consideriamo infine la funzione continua

$$F(x,\lambda) = (1-\lambda)(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(\mathcal{P} + \mathcal{Q})x\,,$$

e in modo analogo vediamo che, se $\lambda \in [0,1]$, essa si annulla solo per $x = 0$. Quindi, per $A3$,

$$d(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R)\,.$$

In defiinitiva, siccome $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$, per $A1$ si ha che

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(I, B_R) = 1 = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A})\,.$$

Supponiamo ora m dispari. Scriviamo $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$, con $\dim\mathcal{N}_1 = 1$, e siano $\mathcal{P}_1 : \mathcal{N} \to \mathcal{N}_1$ e $\mathcal{P}_2 = I - \mathcal{P}_1 : \mathcal{N} \to \mathcal{N}_2$ le due proiezioni associate. Si noti che

$$-\mathcal{P} + \mathcal{Q} = -\mathcal{P}_1\mathcal{P} - \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}\,.$$

Consideriamo la funzione continua

$$F(x,\lambda) = (1-\lambda)(-\mathcal{P}+\mathcal{Q})x + \lambda(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q})x\,,$$

dove $\mathcal{B} : \mathcal{N}_2 \to \mathcal{N}_2$ è un'applicazione lineare che non abbia autovalori reali (vedi sopra). Vediamo quando F si annulla. Se $\lambda = 0$, deve essere $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Se $\lambda \in]0,1]$, abbiamo

$$F(x,\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_1\mathcal{P}x = 0\,, \quad \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P}x = \frac{1-\lambda}{\lambda}\mathcal{P}_2\mathcal{P}x \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}x = 0\,,$$

per cui deve essere anche $\mathcal{P}_2\mathcal{P}x = 0$ e quindi $x = 0$. Pertanto, con $A3$ si ha

$$d(-\mathcal{P}+\mathcal{Q}, B_R) = d(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R)\,.$$

Se poi consideriamo la funzione continua

$$F(x,\lambda) = (1-\lambda)(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q})x\,,$$

in modo analogo vediamo che

$$d(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(-\tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2, B_R)\,,$$

dove $\tilde{\mathcal{P}}_1 = \mathcal{P}_1\mathcal{P} : \mathbb{R}^N \to \mathcal{N}_1$ e $\tilde{\mathcal{P}}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q} : \mathbb{R}^N \to \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{M}$ sono le proiezioni associate alla decomposizione $\mathbb{R}^N = \mathcal{N}_1 \oplus [\mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{M}]$. Poniamo

$$\tilde{B}^1_R = B_R \cap \mathcal{N}_1\,, \qquad \tilde{B}^2_R = B_R \cap (\mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{M})\,.$$

Usando $P1$, ho che

$$d(-\tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2, B_R) = d(-\tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2, \tilde{B}^1_R + \tilde{B}^2_R)\,.$$

Definiamo ora una funzione $\tilde{d}$ che associa a ogni aperto limitato $U \subseteq \mathcal{N}_1$ e a ogni funzione continua $g : \bar{U} \to \mathcal{N}_1$ tale che $0 \notin g(\partial U)$ il numero reale

$$\tilde{d}(g,U) = d(g \circ \tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2\,,\, U + \tilde{B}^2_R)\,.$$

Possiamo verificare che valgono le seguenti proprietà:
$\tilde{A}1$ (normalizzazione). Se $0 \in U$, allora $\tilde{d}(I,U) = 1$.
$\tilde{A}2$ (additività). Se U_1 e U_2 sono due sottoinsiemi aperti disgiunti di U tali che $0 \notin g(\bar{U}\backslash(U_1 \cup U_2))$, allora $\tilde{d}(g,U) = \tilde{d}(g,U_1) + \tilde{d}(g,U_2)$;
$\tilde{A}3$ (invarianza per omotopie). Se $G : \bar{U} \times [0,1] \to \mathcal{N}_1$ è una funzione continua tale che $0 \notin G(\partial U \times [0,1])$, allora $\tilde{d}(G(\cdot,\lambda),U)$ è indipendente da $\lambda \in [0,1]$.

Da esse seguono inoltre le analoghe delle $P1-P4$, che indicheremo con $\tilde{P}1-\tilde{P}4$. Resta da dimostrare che

$$d(-\tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2, \tilde{B}^1_R + \tilde{B}^2_R) = \tilde{d}(-I, \tilde{B}^1_R) = -1\,.$$

Sia $\mathcal{N}_1 = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$, per un certo $e \in \mathbb{R}^N$ con $\|e\| = 1$. Si noti che, per $\rho > 0$,

$$\tilde{B}^1_\rho =]-\rho e, \rho e[= \{\alpha e : \alpha \in]-\rho, \rho[\,\}\,.$$

Definiamo in $\mathcal{N}_1$ gli aperti

$$U =]-2e, 2e[\,, \qquad U_1 =]-2e, 0[\,, \qquad U_2 =]0, 2e[\,.$$

Consideriamo la funzione continua $G : \bar{U} \times [0,1] \to \mathcal{N}_1$ definita da

$$G(\alpha e, \lambda) = (1-\lambda)e + \lambda(|\alpha| - 1)e\,.$$

Si noti che $G(\cdot, 0)$ è costante, con $G(\alpha e, 0) = e \neq 0$, per ogni α. Per $\tilde{P}2$, si ha $\tilde{d}(G(\cdot,0), U) = 0$. D'altra parte, se $\alpha e \in \partial U$, ossia $|\alpha| = 2$, si ha che $G(\alpha e, \lambda) = e \neq 0$. Per $\tilde{A}3$,

$$0 = \tilde{d}(G(\cdot,0), U) = \tilde{d}(G(\cdot,1), U)\,.$$

Ora, poniamo $G(\cdot, 1) = h : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$; essa è definita da

$$h(\alpha e) = (|\alpha| - 1)e\,.$$

Inoltre, per $\tilde{A}2$,

$$0 = \tilde{d}(h, U) = \tilde{d}(h, U_1) + \tilde{d}(h, U_2) = \tilde{d}(h_1, U) + \tilde{d}(h_2, U)\,,$$

dove

$$h_1(\alpha e) = -(\alpha + 1)e\,, \qquad h_2(\alpha e) = (\alpha - 1)e\,.$$

Consideriamo ora le funzioni continue

$$G_1(\alpha e, \lambda) = -(\alpha + 1 - \lambda)e\,, \qquad G_2(\alpha e, \lambda) = (\alpha - 1 + \lambda)e\,,$$

e con $\tilde{A}3$ vediamo che

$$\tilde{d}(h_1, U) = \tilde{d}(-I, U)\,, \qquad \tilde{d}(h_2, U) = \tilde{d}(I, U)\,.$$

Quindi, per $\tilde{A}1$,

$$0 = \tilde{d}(-I, U) + \tilde{d}(I, U) = \tilde{d}(-I, U) + 1\,,$$

da cui

$$\tilde{d}(-I, U) = -1\,.$$

In definitiva, essendo $\tilde{d}(-I, \tilde{B}^1_R) = \tilde{d}(-I, U)$, si ha

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(-I, \tilde{B}^1_R) = -1 = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A})\,.$$

■

Supponiamo ora che $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ sia di classe C^1. Indichiamo con $df(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ il differenziale di f nel punto x e con $J_f(x)$ il suo determinante. Diremo che $y \in \mathbb{R}^N$ è un **valore regolare** per f se

$$x \in f^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad J_f(x) \neq 0\,.$$

In particolare, se $f^{-1}(y) = \emptyset$, allora y è un valore regolare. Dimostriamo la seguente proprietà

• $P6$. *Se* 0 *è un valore regolare per* f *e* $0 \notin f(\partial\Omega)$, *allora*

$$d(f,\Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_f(x))\,,$$

e tale somma è finita.

Dimostrazione. Se $f^{-1}(0) = \emptyset$, la formula segue dalla proprietà $P2$. Supporremo quindi $f^{-1}(0)$ non vuoto. Per il teorema del diffeomorfismo locale, l'insieme $f^{-1}(0)$ è costituito da punti isolati e quindi, essendo contenuto in $\overline{\Omega}$ che è compatto, è un insieme finito:

$$f^{-1}(0) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}\,.$$

In ognuno degli x_j è centrata una palla aperta U_j su cui f è un diffeomorfismo e, per $A2$,

$$d(f,\Omega) = \sum_{j=1}^{m} d(f, U_j)\,.$$

Sappiamo inoltre che, per $j = 1, 2, ..., m$, essendo $f(x_j) = 0$,

$$f(x) = \mathcal{A}_j(x - x_j) + r_j(x)\,, \quad \text{con} \quad \lim_{x \to x_j} \frac{r_j(x)}{\|x - x_j\|} = 0\,,$$

dove abbiamo posto $\mathcal{A}_j = df(x_j)$. Essendo quest'ultima applicazione lineare invertibile, esiste un $c_j > 0$ tale che, per ogni $h \in \mathbb{R}^N$,

$$\|\mathcal{A}_j(h)\| \geq c_j \|h\|\,.$$

Restringendo eventualmente i raggi delle palle U_j, possiamo supporre che, per ogni $x \in \bar{U}_j$,

$$\|r_j(x)\| < c_j \|x - x_j\|\,.$$

Considerando la funzione continua $F_j : \bar{U}_j \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ definita da

$$F_j(x,\lambda) = (1-\lambda) f(x) + \lambda \mathcal{A}_j(x - x_j)\,,$$

si ha

$$\begin{aligned} \|F_j(x,\lambda)\| &\geq \|\mathcal{A}_j(x - x_j)\| - (1-\lambda)\|f(x) - \mathcal{A}_j(x - x_j)\| \\ &\geq c_j \|x - x_j\| - \|r_j(x)\| > 0\,, \end{aligned}$$

e quindi, per $A3$,
$$d(f, U_j) = d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), U_j)\,.$$
Siccome x_j è l'unico punto in cui $\mathcal{A}_j(\cdot - x_j)$ si annulla, per $A2$ si ha

$$d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), U_j) = d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), B_R)\,,$$

dove B_R è una palla centrata in 0 che contiene U_j. Consideriamo la funzione continua $F_j : \bar{B}_R \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$, con

$$\begin{aligned} F_j(x,\lambda) &= (1-\lambda)\mathcal{A}_j(x - x_j) + \lambda \mathcal{A}_j x \\ &= \mathcal{A}_j(x - (1-\lambda)x_j)\,. \end{aligned}$$

Se $x \in \partial B_R$ e $\lambda \in [0,1]$, siccome $(1-\lambda)x_j \in B_R$, si ha che $x - (1-\lambda)x_j \neq 0$, per cui $F_j(x,\lambda) \neq 0$. Quindi, per $A3$ e la proprietà $P5$,

$$d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), B_R) = d(\mathcal{A}_j, B_R) = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A}_j) = \operatorname{sgn}(J_f(x_j))\,.$$

In conclusione,
$$d(f,\Omega) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{sgn}(J_f(x_j))\,.$$

■

Supponiamo ora $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continua. Sia $q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una funzione polinomiale tale che
$$\max_{\overline{\Omega}} \|f - q\| \leq \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} \|f\|\,,$$
la cui esistenza è assicurata dal Teorema di Stone - Weierstrass. Allora $J_q(x)$ è un polinomio in N variabili, a valori reali.

Se J_q non è identicamente nullo, l'insieme

$$E = \{x \in \mathbb{R}^N : J_q(x) \neq 0\}$$

è denso in $\mathbb{R}^N$, poichè un tale polinomio non può annullarsi su alcun insieme con interno non vuoto. Per continuità, $q(E)$ è denso in $q(\mathbb{R}^N)$. Quindi, l'insieme dei valori regolari di q,
$$q(E) \cup (\, \mathbb{R}^N \backslash q(\mathbb{R}^N)\,)\,,$$
è denso in $\mathbb{R}^N$. Esiste pertanto un valore regolare $v \in \mathbb{R}^N$ per q tale che $\|v\| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} \|f\|$. Ponendo $p(x) = q(x) - v$, si ha che 0 è un valore regolare per p e $\max_{\overline{\Omega}} \|f - p\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$. Per la proprietà $P3$ di Rouché e per la $P6$,

$$d(f,\Omega) = d(p,\Omega) = \sum_{x \in p^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_p(x))\,.$$

Se invece J_q è identicamente nullo, possiamo perturbare di poco $q(x)$ e ricondurci alla situazione precedente. Per fare questo, abbiamo bisogno del seguente lemma, di facile dimostrazione.

Lemma 4.3 *Dato un qualunque vettore* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ *in* $\mathbb{R}^N$, *se* ε *è un numero reale non nullo tale che* $\varepsilon + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N \neq 0$, *allora i vettori*

$$(\alpha_1 + \varepsilon, \alpha_2, ..., \alpha_N)\,, \;\; (\alpha_1, \alpha_2 + \varepsilon, ..., \alpha_N)\,, \;\; (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N + \varepsilon)$$

sono linearmente indipendenti.

Scriviamo ora $p(x) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_N(x))$. I vettori gradiente

$$\nabla p_1(0)\,,\ \nabla p_2(0)\,,\ \dots\ ,\nabla p_N(0)$$

costituiscono le righe della matrice jacobiana di p in 0. Usando il lemma, posso ottenere da ognuno di essi una base di $\mathbb{R}^N$, aggiungendo un opportuno ε alle singole componenti. Tale ε può essere scelto uguale per tutti e arbitrariamente piccolo. Otterrò così N basi di $\mathbb{R}^N$: la prima è costituita da N vettori vicini a $\nabla p_1(0)$, la seconda da N vettori vicini a $\nabla p_2(0)$, ecc. A questo punto, al posto di $\nabla p_1(0)$ scelgo uno degli N vettori della base a lui vicina: lo indico con $\nabla p_1^\varepsilon(0)$. Al posto di $\nabla p_2(0)$ scelgo uno degli N vettori della base a lui vicina, che sia linearmente indipendente con $\nabla p_1^\varepsilon(0)$: lo indico con $\nabla p_2^\varepsilon(0)$. Al posto di $\nabla p_3(0)$ scelgo uno degli N vettori della base a lui vicina, che sia linearmente indipendente con $\nabla p_1^\varepsilon(0)$ e con $\nabla p_2^\varepsilon(0)$: lo indico con $\nabla p_3^\varepsilon(0)$. E così via, per induzione, avendo cura di scegliere a ogni passo, tra gli N vettori della base vicina, uno che sia linearmente indipendente da tutti quelli già scelti. La matrice le cui righe sono i vettori $\nabla p_1^\varepsilon(0), \nabla p_2^\varepsilon(0), ..., \nabla p_N^\varepsilon(0)$ così ottenuti ha determinante non nullo, ed è la matrice jacobiana in 0 di una funzione polinomiale ottenuta sommando a $p(x)$ un termine lineare in x, che risulterà una piccola perturbazione sul compatto $\partial\Omega$.

A questo punto, abbiamo dimostrato che una funzione d che verifichi le proprietà $A1$, $A2$ e $A3$ è univocamente determinata e possiamo concludere con

• $P7$. Il valore di $d(f, \Omega)$ è sempre un intero.

Dimostrata l'unicità, vediamo ora come si può definire il grado topologico. Ricordiamo le ipotesi:

▷ Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$,
▷ $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua,
▷ $0 \notin f(\partial\Omega)$.

Cominciamo con il supporre f di classe C^2. In tal caso, poniamo

$$d(f, \Omega) = \int_\Omega c(\|f(x)\|) J_f(x)\, dx\,,$$

dove $c : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che

(i) $\mathrm{supp}(c) \subseteq \left]0, \min_{\partial\Omega} \|f\|\right[$,
(ii) $\int_{\mathbb{R}^N} c(\|x\|)\, dx = 1$.

Qui supp(c) sta a indicare il supporto di c, ovvero la chiusura dell'insieme dei punti su cui c è non nulla. Si noti che (ii) è equivalente a

(ii') $\int_0^{+\infty} c(r) r^{N-1}\, dr = \frac{1}{\mu_{N-1}}$,

dove μ_{N-1} è la misura $(N-1)-$dimensionale della sfera unitaria in $\mathbb{R}^N$.

Dobbiamo verificare che quella data è una buona definizione. Prendiamo dunque una funzione $\tilde{c}$ con le stesse proprietà (i), (ii) di c, e vediamo che l'integrale che definisce $d(f,\Omega)$ resta lo stesso. Sia $a = c - \tilde{c} : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, per cui

$$\operatorname{supp}(a) \subseteq \Big]0, \min_{\partial\Omega} \|f\|\Big[, \qquad \int_0^{+\infty} a(r) r^{N-1}\, dr = 0\,.$$

Definiamo, per $r > 0$,

$$A(r) = \frac{1}{r^N} \int_0^r a(s) s^{N-1}\, ds\,,$$

e poniamo $A(0) = 0$, cosicché $A : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 e supp$A \subseteq \Big]0, \min_{\partial\Omega} \|f\|\Big[$. Consideriamo le forme differenziali [7]

$$\begin{aligned} \omega_a(x) &= a(\|x\|)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N \\ &= a(\|x\|)\, \omega_1(x)\,, \end{aligned}$$

dove

$$\omega_1(x) = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N\,,$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_A(x) &= A(\|x\|) \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} x_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N \\ &= A(\|x\|)\, \sigma_1(x)\,, \end{aligned}$$

dove

$$\sigma_1(x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} x_j\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N\,.$$

Essendo

$$d\sigma_1(x) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} dx_j \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_N = N\omega_1(x)\,,$$

e

$$rA'(r) + NA(r) = a(r)\,,$$

[7] Il lettore che non avesse molta familiarità con le forme differenziali può trovarne un compendio nell'Appendice 1.

per ogni $r \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned}
d\sigma_A(x) &= d[A(\|x\|)] \wedge \sigma_1(x) + A(\|x\|) d\sigma_1(x) \\
&= A'(\|x\|) \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{\|x\|}\, dx_k \wedge \sigma_1(x) + NA(\|x\|)\omega_1(x) \\
&= (\|x\| A'(\|x\|) + NA(\|x\|))\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N \\
&= a(\|x\|)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_N \\
&= \omega_a(x)\,.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega c(\|f(x)\|) J_f(x)\, dx - \int_\Omega \tilde{c}(\|f(x)\|) J_f(x)\, dx &= \int_\Omega a(\|f(x)\|) J_f(x)\, dx \\
&= \int_\Omega f * \omega_a = \int_\Omega f * d\sigma_A = \int_\Omega d(f * \sigma_A)\,.
\end{aligned}$$

Estendiamo $f * \sigma_A$ a tutto $\mathbb{R}^N$ ponendo $f * \sigma_A(x) = 0$ se $x \notin \overline{\Omega}$. Siccome $f * \sigma_A$ ha supporto contenuto in Ω, otteniamo una forma differenziale di classe C^1. Se B_R è una palla contenente Ω, per la formula di Stokes-Cartan,

$$\int_\Omega d(f * \sigma_A) = \int_{B_R} d(f * \sigma_A) = \int_{\partial B_R} f * \sigma_A = 0\,.$$

Abbiamo così verificato che si tratta di una buona definizione.

Dimostriamo ora le tre proprietà $A1$, $A2$, $A3$ nel caso delle funzioni di classe C^2. Se $0 \in \Omega$,

$$d(I, \Omega) = \int_\Omega c(\|x\|)\, dx = 1\,,$$

per le proprietà della funzione c.

Siano ora Ω_1 e Ω_2 sottoinsiemi aperti di Ω per cui $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Scegliendo una funzione c tale che $\operatorname{supp}(c) \subseteq \left]0, \min_{\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)} \|f\|\right[$, si ha che

$$\begin{aligned}
d(f, \Omega) &= \int_\Omega c(\|f(x)\|) J_f(x)\, dx \\
&= \int_{\Omega_1} c(\|f(x)\|) J_f(x)\, dx + \int_{\Omega_2} c(\|f(x)\|) J_f(x)\, dx \\
&= d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2)\,.
\end{aligned}$$

Resta da dimostrare l'invarianza per omotopie. Sia $F : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ di classe C^2 tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$, e sia c tale che $\operatorname{supp}(c) \subseteq \left]0, \min_{\partial\Omega\times[0,1]} \|F\|\right[$. Sarà conveniente definire la funzione

$$h(x) = c(\|x\|)\,,$$

per cui scriveremo brevemente

$$d(F(\cdot,\lambda),\Omega) = \int_\Omega h(F(x,\lambda))J_{F(\cdot,\lambda)}(x,\lambda)\,dx = \int_\Omega (h\circ F)\,dF_1\wedge ...\wedge dF_N\,.$$

Vogliamo dimostrare che la derivata rispetto a λ di tale espressione è sempre nulla. A tal fine, abbiamo il seguente risultato di J. Mawhin:

Lemma 4.4 *Si ha*

$$\partial_\lambda[(h\circ F)\,dF_1\wedge ...\wedge dF_N] = d\tilde\omega\,,$$

con

$$\tilde\omega = (h\circ F)\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1}\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge ...\wedge \widehat{dF_j}\wedge ...\wedge dF_N\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per ogni $j=1,..,N$,

$$\partial_\lambda[dF_j] = \partial_\lambda\left[\sum_{k=1}^N \partial_k F_j dx_k\right] = \sum_{k=1}^N \partial_\lambda\partial_k F_j dx_k = \sum_{k=1}^N \partial_k\partial_\lambda F_j dx_k = d[\partial_\lambda F_j]\,.$$

Iniziamo il calcolo:

$$\begin{aligned}&\partial_\lambda[(h\circ F)\ dF_1\wedge ...\wedge dF_N] =\\ &\qquad = [\partial_\lambda(h\circ F)]\,dF_1\wedge ...\wedge dF_N + (h\circ F)\,\partial_\lambda[dF_1\wedge ...\wedge dF_N]\,,\end{aligned}$$

e si ha

$$\begin{aligned}&[\partial_\lambda(h\circ F)]\ dF_1\wedge ...\wedge dF_N =\\ &\qquad = \left[\sum_{j=1}^N(\partial_j h\circ F)\,\partial_\lambda F_j\right] dF_1\wedge ...\wedge dF_N\\ &\qquad = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1}(\partial_j h\circ F)\,dF_j\wedge\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge ...\wedge\widehat{dF_j}\wedge ...\wedge dF_N\\ &\qquad = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1}\left[\sum_{k=1}^n(\partial_k h\circ F)\,dF_k\right]\wedge\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge ...\wedge\widehat{dF_j}\wedge ...\wedge dF_N\\ &\qquad = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} d[h\circ F]\wedge\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge ...\wedge\widehat{dF_j}\wedge ...\wedge dF_N\\ &\qquad = d[h\circ F]\wedge\left[\sum_{j=1}^N(-1)^{j-1}\partial_\lambda F_j\,dF_1\wedge ...\wedge\widehat{dF_j}\wedge ...\wedge dF_N\right],\end{aligned}$$

mentre

$$
\begin{aligned}
(h \circ F)\ \partial_\lambda[dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N] =& \\
&= (h \circ F) \sum_{j=1}^{N} dF_1 \wedge \dots \wedge \partial_\lambda dF_j \wedge \dots \wedge dF_N \\
&= (h \circ F) \sum_{j=1}^{N} dF_1 \wedge \dots \wedge d[\partial_\lambda F_j] \wedge \dots \wedge dF_N \\
&= (h \circ F) \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} d[\partial_\lambda F_j] \wedge dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \\
&= (h \circ F) \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} d[\partial_\lambda F_j \wedge dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N] \\
&= (h \circ F)\ d\left[\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j \wedge dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \right].
\end{aligned}
$$

Sommando i due termini,

$$
\begin{aligned}
d[h \circ F] \wedge &\left[\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j\, dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \right] + \\
&+ (h \circ F)\ d\left[\sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j \wedge dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \right] = \\
&= d\left[(h \circ F) \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j\, dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \right].
\end{aligned}
$$

■

A questo punto, possiamo scrivere

$$
\partial_\lambda[d(F(\cdot, \lambda), \Omega)] = \int_\Omega \partial_\lambda[(h \circ F)\, dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N] = \int_\Omega d\tilde{\omega}\,,
$$

e $\tilde{\omega}$, come si vede dall'espressione data dal Lemma, ha supporto contenuto in Ω. Pertanto, estendendo a tutto $\mathbb{R}^N$ ponendo $\tilde{\omega}$ nullo al di fuori di $\overline{\Omega}$, si ha che, se B_R è una palla contenente Ω,

$$
\int_\Omega d\tilde{\omega} = \int_{B_R} d\tilde{\omega} = \int_{\partial B_R} \tilde{\omega} = 0\,,
$$

ossia $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$ è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.

Abbiamo così dimostrato che valgono le proprietà $A1$, $A2$, $A3$ nel caso delle funzioni di classe C^2. Vediamo ora come si definisce il grado per le funzioni continue.

Sia $f:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ una funzione continua tale che $0\notin f(\partial\Omega)$. Sia $p:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ una funzione di classe C^2 tale che

$$\max_{\overline{\Omega}}\|f-p\|<\frac{1}{3}\min_{\partial\Omega}\|f\|\,,$$

la cui esistenza è assicurata, ad esempio, dal Teorema di Stone - Weierstrass. Abbiamo già definito $d(p,\Omega)$; poniamo allora

$$d(f,\Omega)=d(p,\Omega)\,.$$

Verifichiamo che si tratta di una buona definizione. Se $\tilde{p}:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ è anch'essa una funzione di classe C^2 tale che

$$\max_{\overline{\Omega}}\|f-\tilde{p}\|<\frac{1}{3}\min_{\partial\Omega}\|f\|\,,$$

allora, ponendo $\mu=\min\limits_{\partial\Omega}\|f\|$, si ha

$$\max_{\overline{\Omega}}\|p-\tilde{p}\|<\frac{2}{3}\mu\,,\quad \min_{\partial\Omega}\|p\|>\frac{2}{3}\mu\,,\quad \min_{\partial\Omega}\|\tilde{p}\|>\frac{2}{3}\mu\,.$$

Consideriamo $F:\overline{\Omega}\times[0,1]\to\mathbb{R}^N$ definita da

$$F(x,\lambda)=(1-\lambda)p(x)+\lambda\tilde{p}(x)\,.$$

Essa è di classe C^2 e, se $x\in\partial\Omega$,

$$\|F(x,\lambda)\|\geq\|p(x)\|-\lambda\|p(x)-\tilde{p}(x)\|>\frac{2}{3}\mu-\lambda\frac{2}{3}\mu>0\,,$$

per ogni $\lambda\in[0,1]$. Quindi,

$$d(p,\Omega)=d(F(\cdot,0),\Omega)=d(F(\cdot,1),\Omega)=d(\tilde{p},\Omega)\,,$$

e pertanto la definizione data per $d(f,\Omega)$ è giustificata. Similmente si verifica che tale definizione estende quella data in precedenza per le funzioni f di classe C^2.

Restano da verificare le proprietà $A1$, $A2$ e $A3$. Chiaramente, per $A1$ non ci sono problemi, essendo I di classe C^2. Siano Ω_1 e Ω_2 sottoinsiemi aperti di Ω per cui $0\notin f(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2))$. Consideriamo una funzione $p:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^N$ di classe C^2 tale che

$$\max_{\overline{\Omega}}\|f-p\|<\frac{1}{3}\min_{\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)}\|f\|\,.$$

Per definizione avremo quindi

$$d(f,\Omega)=d(p,\Omega)\,,\quad d(f,\Omega_1)=d(p,\Omega_1)\,,\quad d(f,\Omega_2)=d(p,\Omega_2)\,,$$

e l'additività segue dunque da quella già dimostrata per le funzioni di classe C^2. Infine, sia $F : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ continua tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$. Consideriamo una $G : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ di classe C^2 tale che

$$\max_{\partial\Omega\times[0,1]} \|F - G\| < \frac{1}{3} \min_{\partial\Omega\times[0,1]} \|F\|,$$

e per definizione abbiamo che

$$d(F(\cdot,\lambda),\Omega) = d(G(\cdot,\lambda),\Omega),$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$. Essendo stato dimostrato che $d(G(\cdot,\lambda),\Omega)$ è indipendente da $\lambda \in [0,1]$, lo stesso varrà anche per $d(F(\cdot,\lambda),\Omega)$.

La dimostrazione del Teorema di esistenza e unicità del grado è così completata.

■

A questo punto, sarà utile richiamare le proprietà fin qui dimostrate.

Corollario 4.5 *Sia $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ continua tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Oltre alle $A1$, $A2$ e $A3$, valgono le seguenti proprietà:*

$P1$ (excisione). Se Ω_1 è un sottoinsieme aperto di Ω tale che $0 \notin f(\overline{\Omega}\setminus\Omega_1)$, allora $d(f,\Omega) = d(f,\Omega_1)$.

$P2$. Se $0 \notin f(\overline{\Omega})$, allora $d(f,\Omega) = 0$.

$P2'$ (esistenza). Se $d(f,\Omega) \neq 0$, allora esiste un $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$.

$P3$ (di Rouché). Se $\max_{\partial\Omega} \|f - g\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$, allora $d(f,\Omega) = d(g,\Omega)$.

$P4$. Se $f = g$ su $\partial\Omega$, allora $d(f,\Omega) = d(g,\Omega)$.

$P5$. Se $f = \mathcal{A} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ è lineare, invertibile e $0 \in \Omega$, allora $d(\mathcal{A},\Omega) = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A})$.

$P6$. Se f è di classe C^1 e 0 è un suo valore regolare, allora $d(f,\Omega) = \sum_{x\in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_f(x))$, e tale somma è finita.

$P7$. Il valore di $d(f,\Omega)$ è sempre un intero.

4.2 Alcune considerazioni sul grado di Brouwer

I. Notiamo che lo stesso teorema di esistenza e unicità del grado si può enunciare in qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita. In effetti, se X è un tale spazio, di dimensione N, si può considerare un'applicazione lineare inveribile $\varphi : X \to \mathbb{R}^N$ che trasforma una base di X nella base canonica di $\mathbb{R}^N$. Indichiamo con $d_{\mathbb{R}^N}$ il grado in $\mathbb{R}^N$ costruito sopra.

Dati che siano un aperto limitato $\Omega \subseteq X$ e una funzione continua $f : \overline{\Omega} \to X$ tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$, possiamo considerare l'aperto limitato $\tilde{\Omega} = \varphi(\Omega)$ in $\mathbb{R}^N$

e la funzione continua $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ definita da $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{f} & X \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\ \tilde{\Omega} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^N \end{array}$$

Una volta verificato che $0 \notin \tilde{f}(\partial\tilde{\Omega})$, si definisce

$$d_X(f, \Omega) = d_{\mathbb{R}^N}(\tilde{f}, \tilde{\Omega}) .$$

Le proprietà A1, A2 e A3 sono di facile verifica per d_X, che risulta pertanto un grado su X.

Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo che sia definito un grado d_X su X. Procedendo come sopra, si può allora definire un grado su $\mathbb{R}^N$: se $\tilde{\Omega}$ è un un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ e $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è una funzione continua tale che $0 \notin \tilde{f}(\partial\tilde{\Omega})$, si considera l'aperto limitato $\Omega = \varphi^{-1}(\tilde{\Omega})$ di X, la funzione continua $f : \overline{\Omega} \to X$ definita da $f = \varphi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi$ e si definisce

$$d(\tilde{f}, \tilde{\Omega}) = d_X(f, \Omega) .$$

Essendo tale d un grado su $\mathbb{R}^N$, deve essere $d = d_{\mathbb{R}^N}$. Quindi

$$d_X(f, \Omega) = d_{\mathbb{R}^N}(\tilde{f}, \tilde{\Omega}) .$$

II. Se $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ è continua e $y \in \mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$, si pone

$$d(f, \Omega, y) = d(f(\cdot) - y, \Omega) .$$

Chiaramente, $d(f, \Omega) = d(f, \Omega, 0)$. Vale la seguente proprietà

- *P8.* $d(f, \Omega, \cdot)$ *è costante sulle componenti connesse di* $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$.

In effetti, essendo $f(\partial\Omega)$ un insieme chiuso e $\mathbb{R}^N$ uno spazio localmente connesso, ogni componente connessa di $\mathbb{R}^N \backslash f(\partial\Omega)$ è un insieme aperto e quindi connesso per archi. Se y_1 e y_2 appartengono alla stessa componente connessa, esiste una curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^N$, contenuta nella stessa, tale che $\gamma(0) = y_1$ e $\gamma(1) = y_2$. La funzione continua $F(x, \lambda) = f(x) - \gamma(\lambda)$ è tale che $F(x, \lambda) \neq 0$, per ogni x e ogni $\lambda \in [0, 1]$. Quindi

$$d(f, \Omega, y_1) = d(F(\cdot, 0), \Omega) = d(F(\cdot, 1), \Omega) = d(f, \Omega, y_2) .$$

III. Possiamo facilmente caratterizzare il grado nel caso unidimensionale $N = 1$, qualora Ω sia un intervallo $]a, b[$. Supponendo $f(a) \neq 0 \neq f(b)$, consideriamo

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right] .$$

Siccome $F(a,\lambda) = f(a) \neq 0$ e $F(b,\lambda) = f(b) \neq 0$, per ogni $\lambda \in [0,1]$, avremo che
$$d(f, \,]a,b[\,) = d(F(\cdot,0)\,]a,b[\,) = d(F(\cdot,1)\,]a,b[\,)\,,$$
da cui
$$d(f, \,]a,b[\,) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(a)f(b) > 0\,, \\ 1 & \text{se } f(a) < 0 < f(b)\,, \\ \text{-1} & \text{se } f(a) > 0 > f(b)\,. \end{cases}$$
IV. Faremo ora delle considerazioni che ci porteranno a una diversa interpretazione del grado, nel caso in cui $\partial\Omega$ sia sufficientemente regolare. Siano $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ due numeri reali tali che
$$0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \min_{\partial\Omega} \|f\|\,,$$
e consideriamo una funzione $B : [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$, di classe C^1, tale che
$$B(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq r \leq \varepsilon_0\,, \\ r^{-N} & \text{se } r \geq \varepsilon_1\,. \end{cases}$$
Sia $b : [0,+\infty[\, \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$b(r) = rB'(r) + NB(r)\,,$$
per cui, come già dimostrato in precedenza, $d\sigma_B = \omega_b$. Si vede che $\operatorname{supp}(b) \subseteq [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$, e
$$\int_0^{+\infty} b(r) r^{N-1}\, dr = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} b(r) r^{N-1}\, dr = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \frac{d}{dr}(r^N B(r))\, dr = \varepsilon_1^N B(\varepsilon_1) = 1\,.$$
La funzione $c(x) = \frac{1}{\mu_{N-1}} b(x)$ verifica le condizioni (i) e (ii) che le competono e quindi, se $\partial\Omega$ è sufficientemente regolare,
$$\begin{aligned} d(f,\Omega) &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_\Omega b(\|f(x)\|) J_f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_\Omega f * \omega_b \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_\Omega f * (d\sigma_B) \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_\Omega d(f * \sigma_B) \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\partial\Omega} f * \sigma_B \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\partial\Omega} f * (\|x\|^{-N} \sigma_1(x)) \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\partial\Omega} \|f\|^{-N} \left(\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} f_j\, df_1 \wedge ... \wedge \widehat{df_j} \wedge ... \wedge df_N \right). \end{aligned}$$

In particolare, se $N = 2$, otteniamo l'**indice di avvolgimento**

$$d(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}\,;$$

se $\partial\Omega$ è parametrizzabile con una funzione $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1, allora

$$d(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_1(\varphi(t))\frac{d}{dt}f_2(\varphi(t)) - f_2(\varphi(t))\frac{d}{dt}f_1(\varphi(t))}{f_1(\varphi(t))^2 + f_2(\varphi(t))^2}\, dt\,.$$

Se scriviamo ora $f(\varphi(t))$ in coordinate polari,

$$f_1(\varphi(t)) = \rho(t)\cos(\theta(t))\,, \qquad f_2(\varphi(t)) = \rho(t)\sin(\theta(t))\,.$$

sviluppando la formula precedente si ottiene

$$d(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta'(t)\, dt = \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi}\,.$$

4.3 Il grado di Leray - Schauder

Siano X uno spazio di Banach e $\Omega \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Diremo che una funzione continua $g : \overline{\Omega} \to X$ è **completamente continua** se manda insiemi limitati in insiemi relativamente compatti; equivalentemente, se presa una successione $(x_n)_n$ limitata, la successione $(g(x_n))_n$ ha una sottosuccessione convergente.

Denotiamo con $K(\overline{\Omega}, X)$ l'insieme delle funzioni $f : \overline{\Omega} \to X$ del tipo $f = I - g$, con $g : \overline{\Omega} \to X$ completamente continua.

Teorema 4.6 (esistenza e unicità del grado) *Esiste ed è unica una funzione d che associa ad ogni aperto limitato $\Omega \subseteq X$ e ad ogni funzione $f \in K(\overline{\Omega}, X)$ tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$ un numero reale*

$$d(f, \Omega)\,,$$

con le seguenti tre proprietà:

• *A1 (normalizzazione). Se $0 \in \Omega$, allora $d(I, \Omega) = 1$;*

• *A2 (additività). Se Ω_1 e Ω_2 sono due sottoinsiemi aperti disgiunti di Ω tali che $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2)$;*

• *A3 (invarianza per omotopie). Se $F \in K(\overline{\Omega} \times [0, 1], X)$ è tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$, allora $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$ è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.*

Inoltre, il valore di $d(f, \Omega)$ è sempre un intero e valgono le seguenti proprietà:

• *P1 (excisione). Se Ω_1 è un sottoinsieme aperto di Ω tale che $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1)$.*

• *P2 (esistenza). Se $d(f, \Omega) \neq 0$, allora esiste un $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$.*

• *P3 (di Rouché). Se* $\max_{\partial\Omega} \|f - g\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$, *allora* $d(f, \Omega) = d(g, \Omega)$.

Contrariamente a quanto fatto per il grado di Brouwer, dimostreremo prima l'esistenza e solo in seguito l'unicità.

Lemma 4.7 *Se* $f \in K(\overline{\Omega}, X)$, *allora* $f(\partial\Omega)$ *è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia $(y_n)_n$ una successione in $f(\partial\Omega)$ tale che $y_n \to y$ in X. Vogliamo dimostrare che $y \in f(\partial\Omega)$. Prendiamo $(x_n)_n$ in $\partial\Omega$ tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo $f(x_n) = x_n - g(x_n)$, con g completamente continua, esiste una sottosuccessione per cui $(g(x_{n_k}))_k$ converge: si avrà $g(x_{n_k}) \to z$, per un certo $z \in X$. Allora

$$x_{n_k} = y_{n_k} + g(x_{n_k}) \to y + z\,,$$

e $y + z \in \partial\Omega$, essendo $\partial\Omega$ un insieme chiuso. ■

Poniamo

$$\mu := \inf_{\partial\Omega} \|f\| = \operatorname{dist}(0, f(\partial\Omega))\,.$$

Per il Lemma 4.7, si ha che $\mu > 0$.

Lemma 4.8 *Se* $f \in K(\overline{\Omega}, X)$, *esiste un sottospazio* X_1 *di* X, *avente dimensione finita, ed esiste una funzione continua* $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ *tale che, ponendo* $f_1 = I - g_1$, *si ha*

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|f - f_1\| < \frac{\mu}{3}\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon \in \,]0, \mu/3[\,$. Per ogni $y \in g(\overline{\Omega})$, consideriamo la palla $B_\varepsilon(y)$. Allora

$$\overline{g(\overline{\Omega})} \subseteq \bigcup_y B_\varepsilon(y)\,.$$

Essendo $g(\overline{\Omega})$ relativamente compatto, esiste un sottoricoprimento finito:

$$\overline{g(\overline{\Omega})} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_\varepsilon(y_k)\,.$$

Sia X_1 il sottospazio generato da $\{y_1, \dots, y_m\}$. Defniamo le funzioni

$$\varphi_k(y) = \max\{0\,,\, \varepsilon - \|y - y_k\|\}\,,$$

$$\psi_k(y) = \frac{\varphi_k(y)}{\sum_{k=1}^m \varphi_k(y)}\,.$$

Definiamo $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ in questo modo:

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^{m} \psi_k(g(x)) y_k\,.$$

Si vede facilmente che si tratta di una funzione continua, e si ha:

$$\|g(x) - g_1(x)\| \le \varepsilon\,,$$

per ogni $x \in \overline{\Omega}$. ■

Ricordiamo che nello spazio finito-dimensionale X_1 è definito il grado, che indicheremo con d_{X_1}.

Una volta determinate le funzioni $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ e $f_1 = I - g_1$, consideriamo le loro restrizioni all'insieme $\mathrm{cl}_{X_1}(\Omega \cap X_1)$, chiusura, relativamente al sottospazio X_1, dell'insieme $\Omega \cap X_1$: le denotiamo con $\tilde{g}_1 : \mathrm{cl}_{X_1}(\Omega \cap X_1) \to X_1$ e $\tilde{f}_1 : \mathrm{cl}_{X_1}(\Omega \cap X_1) \to X_1$, per cui si ha $\tilde{f}_1 = I - \tilde{g}_1$.

Vediamo che $0 \notin \tilde{f}_1(\partial_{X_1}(\Omega \cap X_1))$. Infatti, se $x \in \partial_{X_1}(\Omega \cap X_1)$, allora $x \in \partial\Omega$ e

$$\|\tilde{f}_1(x)\| \geq \|f(x)\| - \|f(x) - \tilde{f}_1(x)\| > \mu - \frac{\mu}{3} = \frac{2}{3}\mu > 0\,.$$

Siamo ora pronti a definire il grado di f su Ω: porremo

$$d(f, \Omega) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1)\,.$$

Verifichiamo innanzitutto che si tratta di una buona definizione. Siano X_2 un sottospazio di dimensione finita, $g_2 : \overline{\Omega} \to X_2$ e $f_2 = I - g_2$ delle funzioni che soddisfino, allo stesso modo del sottospazio X_1 e delle funzioni $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ e $f_1 = I - g_1$, alle condizioni del lemma, per cui

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|f - f_2\| < \frac{\mu}{3}\,.$$

Denotiamo con $\tilde{g}_2 : \mathrm{cl}_{X_2}(\Omega \cap X_2) \to X_2$ e $\tilde{f}_2 : \mathrm{cl}_{X_2}(\Omega \cap X_2) \to X_2$ le loro restrizioni alla chiusura, relativamente al sottospazio X_2, dell'insieme $\Omega \cap X_2$, per cui si ha $\tilde{f}_2 = I - \tilde{g}_2$. Come sopra, si vede che

$$x \in \partial_{X_2}(\Omega \cap X_2) \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu > 0\,,$$

per cui $0 \notin \tilde{f}_2(\partial_{X_2}(\Omega \cap X_2))$. Dobbiamo far vedere che

$$d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_2}(\tilde{f}_2, \Omega \cap X_2). \tag{9}$$

Consideriamo lo spazio X_0 generato da $X_1 \cup X_2$. Definiamo le funzioni

$$\hat{g}_1 : \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0) \to X_0\,, \qquad \hat{g}_2 : \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0) \to X_0\,,$$

definite da $\hat{g}_1(x) = g_1(x)$ e $\hat{g}_2(x) = g_2(x)$, per ogni $x \in \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0)$. Allo stesso modo, definiamo le funzioni

$$\hat{f}_1 : \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0) \to X_0\,, \qquad \hat{f}_2 : \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0) \to X_0\,,$$

definite da $\hat{f}_1(x) = f_1(x)$ e $\hat{f}_2(x) = f_2(x)$, per ogni $x \in \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0)$. Pertanto, si ha che $\hat{f}_1 = I - \hat{g}_1$ e $\hat{f}_2 = I - \hat{g}_2$. Si vede come sopra che

$$x \in \partial_{X_0}(\Omega \cap X_0) \quad \Rightarrow \quad \|\hat{f}_1(x)\| > \frac{2}{3}\mu > 0 \quad \text{e} \quad \|\hat{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu > 0\,,$$

per cui $0 \notin \hat{f}_1(\partial_{X_0}(\Omega \cap X_0))$ e $0 \notin \hat{f}_2(\partial_{X_0}(\Omega \cap X_0))$. Dimostriamo allora che

$$d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_0}(\hat{f}_2, \Omega \cap X_0). \tag{10}$$

A tal scopo, consideriamo la funzione $F : \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0) \times [0,1] \to X_0$ definita da

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)\hat{f}_1(x) + \lambda \hat{f}_2(x) \, .$$

Se $x \in \partial_{X_0}(\Omega \cap X_0)$, allora

$$\begin{aligned} \|F(x,\lambda)\| &\geq \|\hat{f}_1(x)\| - \lambda\|\hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu - \|\hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x)\| \\ &\geq \frac{2}{3}\mu - \|\hat{f}_1(x) - f(x)\| - \|f(x) - \hat{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu - \frac{\mu}{3} - \frac{\mu}{3} = 0 \, . \end{aligned}$$

L'uguaglianza (10) segue quindi dalla proprietà di invarianza per omotopie del grado.

Vogliamo ora dimostrare che

$$d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) \, , \qquad d_{X_2}(\tilde{f}_2, \Omega \cap X_2) = d_{X_0}(\hat{f}_2, \Omega \cap X_0) \, ,$$

da cui segue immediatamente (9), vista la (10). Dimostriamo la prima, essendo la seconda ad essa analoga. Identifichiamo X_0 con $\mathbb{R}^N$: se $x \in X_0$, scriviamo $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Identifichiamo X_1 con $\mathbb{R}^M$, ossia

$$X_1 \approx \{x \in \mathbb{R}^N : x_{M+1} = \ldots = x_N = 0\} \, .$$

Ricordiamo che $\hat{g}_1(x) \in X_1$, per ogni $x \in \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0)$. Ragionando come nella dimostrazione del teorema sul grado in dimensione finita, è possibile trovare una funzione polinomiale $\hat{q}_1 : \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0) \to X_0$ tale che $\hat{q}_1(x) \in X_1$, per ogni $x \in \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0)$ e, posto $\hat{p}_1 = I - \hat{q}_1 : \mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0) \to X_0$, si abbia che 0 è un valore regolare per $\hat{p}_1$ e $\max\limits_{\mathrm{cl}_{X_0}(\Omega \cap X_0)} \|\hat{f}_1 - \hat{p}_1\| < \min\limits_{\partial_{X_0}(\Omega \cap X_0)} \|\hat{f}_1\|$. Allora,

$$d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_0}(\hat{p}_1, \Omega \cap X_0) = \sum_{x \in \hat{p}_1^{-1}(0)} \mathrm{sgn}(J_{\hat{p}_1}(x)) \, .$$

Definiamo $\tilde{q}_1 : \mathrm{cl}_{X_1}(\Omega \cap X_1) \to X_1$ tale che $\tilde{q}_1(x) = \hat{q}_1(x)$, per ogni $x \in \mathrm{cl}_{X_1}(\Omega \cap X_1)$ e poniamo $\tilde{p}_1 = I - \tilde{q}_1 : \mathrm{cl}_{X_1}(\Omega \cap X_1) \to X_1$. Allora

$$d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_1}(\tilde{p}_1, \Omega \cap X_1) = \sum_{u \in \tilde{p}_1^{-1}(0)} \mathrm{sgn}(J_{\tilde{p}_1}(u)) \, .$$

Siccome $\hat{q}_1(x) \in X_1$, si ha

$$\hat{p}_1(x) = (\hat{p}_1^1(x), \ldots, \hat{p}_1^M(x), x_{M+1}, \ldots, x_N) \, .$$

Allora

$$\begin{aligned} x \in \hat{p}_1^{-1}(0) \quad &\Leftrightarrow \quad (\hat{p}_1^1(x), \ldots, \hat{p}_1^M(x), x_{M+1}, \ldots, x_N) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x_1, \ldots, x_M) \in \tilde{p}_1^{-1}(0) \, , \\ x_{M+1} = \ldots = x_N = 0 \, . \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre,

$$J_{\hat{p}_1}(x) = \det \begin{pmatrix} I - \left(\frac{\partial \hat{q}_1^i}{\partial x_j}(x)\right) & \dots \\ & \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Quindi, se $x \in \hat{p}_1^{-1}(0)$, allora

$$\begin{aligned} J_{\hat{p}_1}(x) &= \det\left(I - \left(\frac{\partial \hat{q}_1^i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_M, 0, \dots, 0)\right)\right) \\ &= \det\left(I - \left(\frac{\partial \tilde{q}_1^i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_M)\right)\right) \\ &= J_{\tilde{p}_1}(x_1, \dots, x_M)\,. \end{aligned}$$

Ponendo $u = (x_1, \dots, x_M)$, abbiamo quindi

$$\sum_{x \in \hat{p}_1^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_{\hat{p}_1}(x)) = \sum_{u \in \tilde{p}_1^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(J_{\tilde{p}_1}(u))\,.$$

In conclusione,

$$d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_0}(\hat{p}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_1}(\tilde{p}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1)\,,$$

che è quanto volevasi dimostrare. Abbiamo così verificato che la definizione data del grado è una buona definizione.

Sono da dimostrare ora le proprietà A1, A2 e A3. Vediamo A1: se $0 \in \Omega$, allora $0 \in \Omega \cap X_1$ e quindi

$$d(I, \Omega) = d_{X_1}(I, \Omega \cap X_1) = 1\,.$$

Vediamo A2: siano Ω_1 e Ω_2 due sottoinsiemi aperti disgiunti di Ω tali che $0 \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, Usando il Lemma 4.8, possiamo prendere il sottospazio X_1 per definire tutti e tre i gradi

$$\begin{aligned} d(f, \Omega) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1)\,, \\ d(f, \Omega_1) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_1 \cap X_1)\,, \\ d(f, \Omega_2) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_2 \cap X_1)\,. \end{aligned}$$

Essendo $\Omega_1 \cap X_1$ e $\Omega_2 \cap X_1$ aperti disgiunti di $\Omega \cap X_1$, si ha

$$\begin{aligned} d(f, \Omega) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) \\ &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_1 \cap X_1) + d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_2 \cap X_1) \\ &= d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2)\,. \end{aligned}$$

Infine, vediamo A3: sia $F \in K(\overline{\Omega} \times [0,1], X)$ tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$. Per i Lemma 4.8 si può trovare un sottospazio X_1 ed una funzione continua $G_1 : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X_1$ tale che, ponendo $F_1 = I - G_1$, risulta

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|F - F_1\| < \frac{1}{3} \operatorname{dist}(0, F(\partial\Omega \times [0,1]))\,.$$

Definendo $\tilde{F}_1 : \mathrm{cl}_{X_1}(\Omega \cap X_1) \times [0,1] \to X_1$, la restrzione di F_1, si ha

$$d(F(\cdot,\lambda),\Omega) = d_{X_1}(\tilde{F}_1(\cdot,\lambda),\Omega \cap X_1).$$

Siccome $0 \notin \tilde{F}_1(\partial_{X_1}(\Omega \cap X_1) \times [0,1])$, il grado è indipendente da $\lambda \in [0,1]$.

Le proprietà P1 - P3 seguono facilmente dalle A1 - A3, come già visto nel caso finito-dimensionale.

Veniamo ora alla dimostrazione dell'unicità del grado. Indichiamo con d_X il grado sopra definito. Supponiamo che sia definito un grado d, e dimostriamo che deve essere $d = d_X$. Sia Ω un aperto limitato di X e $f \in K(\overline{\Omega}, X)$. Procedendo come sopra, per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo un sottospazio di dimensione finita X_1 e una funzione continua $g_1 : \overline{\Omega} \to X_1$ tale che, ponendo $f_1 = I - g_1$, si ha

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|f - f_1\| < \varepsilon\,.$$

Sia $K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$ l'insieme delle funzioni $f : \overline{\Omega} \to X$ del tipo $f = I - g$, con $g : \overline{\Omega} \to X$ continua avente immagine contenuta in un sottospazio di dimensione finita. Da quanto sopra, considerando la topologia della convergenza uniforme, $K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$ è denso in $K(\overline{\Omega}, X)$. Quindi, basterà dimostrare che $d(f,\Omega) = d_X(f,\Omega)$ per ogni $f \in K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$.

Sia quindi $f \in K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$, e sia X_1 un sottospazio di dimensione finita che contiene l'immagine di $g = I - f$. Su X_1 è univocamente definito un grado, che indichiamo con d_{X_1}.

Sia X_2 un sottospazio tale che $X = X_1 \oplus X_2$ (vedi [22, sezione I-1.15]). Per ogni $x \in X$, scriveremo $x = x_1 + x_2$, dove $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$. Sia $F : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ la funzione definita da

$$F(x,\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)[f(x_1) + x_2]$$

Vediamo che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0,1])$. Infatti, se $F(x,\lambda) = 0$, allora

$$\lambda(x_1 - g(x)) + (1-\lambda)f(x_1) + x_2 = 0\,.$$

Siccome sia $x_1 - g(x)$ che $f(x_1)$ appartengono a X_1, ne segue che deve essere $x_2 = 0$ e quindi $x = x_1$, da cui

$$\lambda(x - g(x)) + (1-\lambda)f(x) = 0\,,$$

ossia $f(x) = 0$. Siccome $0 \notin f(\partial\Omega)$, si ha che $x \notin \partial\Omega$.

Sia $\hat{f} : \overline{\Omega} \to X$ definita da

$$\hat{f}(x) = f(x_1) + x_2 = x - g(x_1)\,.$$

Chiaramente, $\hat{f} \in K_\sharp(\overline{\Omega}, X)$. Da quanto visto sopra, usando l'invarianza per omotopie, si ha che

$$d(f,\Omega) = d(\hat{f},\Omega)\,.$$

Fissato $\rho > 0$, sia
$$B^2_\rho = \{x \in X_2 : \|x\| < \rho\}\,,$$
e sia inoltre $\Omega_1 = \Omega \cap X_1$. Osserviamo che
$$\hat{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_1 \in X_1\,.$$
Per la proprietà di excisione,
$$d(\hat{f}, \Omega) = d(\hat{f}, \Omega_1 + B^2_\rho)\,.$$
Sia ora $\tilde{f}_1 : \overline{\Omega}_1 \to X_1$ definita da $\tilde{f}_1(x) = f(x)$. Si può verificare che $0 \notin \tilde{f}^{-1}(\partial\Omega_1)$. Poniamo allora
$$d(\tilde{f}_1, \Omega_1) = d(\hat{f}, \Omega_1 + B^2_\rho)\,,$$
con $\rho > 0$ arbitrario.

Si noti che ogni aperto limitato Ω_1 di X_1 si può ottenere come intersezione dell'aperto limitato $\Omega_1 + B^2_\rho$ di X con X_1, e ogni funzione continua $\tilde{f}_1 : \overline{\Omega}_1 \to X_1$ tale che $0 \notin \tilde{f}^{-1}(\partial\Omega_1)$ si può ottenere come sopra, a partire da una funzione $f \in K_\sharp(\overline{\Omega_1 + B^2_\rho}, X)$ tale che $0 \notin f^{-1}(\partial(\Omega_1 + B^2_\rho))$, ad esempio definendo $f(x) = \tilde{f}(x_1) + x_2$.

Resta pertanto definito $d(\tilde{f}_1, \Omega_1)$ per ogni aperto limitato Ω_1 di X_1 e ogni funzione continua $\tilde{f}_1 : \overline{\Omega}_1 \to X_1$ tale che $0 \notin \tilde{f}^{-1}(\partial\Omega_1)$. A questo punto, si può verificare che valgono le proprietà A1 - A3, per cui $d(\tilde{f}_1, \Omega_1)$ definisce un grado su X_1. Ma allora, per l'unicità,
$$d(\tilde{f}_1, \Omega_1) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_1)\,,$$
Ricordiamo ora che d_X è stato definito ponendo
$$d_X(f, \Omega) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1)\,.$$
Se ne conclude che
$$d_X(f, \Omega) = d(f, \Omega)\,,$$
e la dimostrazione è completa.

Teorema 4.9 (Schauder, 1930) *Se $g : X \to X$ è completamente continua ed esiste una palla chiusa $\bar{B}_R$ tale che*
$$g(\bar{B}_R) \subseteq \bar{B}_R\,,$$
allora esiste un $x \in \bar{B}_R$ tale che $g(x) = x$. Inoltre, se g non ha punti fissi su ∂B_R, allora
$$d(I - g, B_R) = 1\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che g non abbia punti fissi su ∂B_R. Consideriamo la funzione continua $F(x, \lambda) = x - g(x) + \lambda g(x)$ e osserviamo che, se $x \in \partial B_R$ e $\lambda \in]0, 1]$, allora

$$\|F(x, \lambda)\| \geq \|x\| - (1 - \lambda)\|g(x)\| \geq R - (1 - \lambda)R > 0\,,$$

mentre, se $\lambda = 0$, si ha $F(x, 0) \neq 0$, per ogni $x \in \partial B_R$. Quindi, $0 \notin F(\partial B_R \times [0, 1])$ e, per $A3$ e $A1$,

$$d(I - g, B_R) = d(F(\cdot, 0), B_R) = d(F(\cdot, 1), B_R) = d(I, B_R) = 1\,.$$

Per $P2'$, esiste un $x \in B_R$ tale che $(I - g)(x) = 0$, ossia $g(x) = x$. ∎

Nel caso in cui X abbia dimensione finita, questo risultato, noto come **Teorema di Brouwer**, risale al 1912.