3 Introduzione al problema semi-lineare

3.1 Il problema periodico

Studiamo il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} x'' + g(t,x) = 0\,, \\ x(0) = x(T)\,, \quad x'(0) = x'(T)\,, \end{cases}$$

dove $g : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua.

Consideriamo lo spazio di Hilbert reale $H = L^2(0,T)$, in cui è definito il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_0^T f(t) g(t)\, dt\,,$$

e la relativa norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^T |f(t)|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Definiamo l'operatore $L : D(L) \subset H \to H$ in questo modo:

$$\begin{aligned} &D(L) = \{x \in W^{2,2}(0,T) : x(0) = x(T)\,,\ x'(0) = x'(T)\}\,, \\ &Lx = -x''\,. \end{aligned}$$

Vogliamo inoltre introdurre un "operatore" nonlineare.

Proposizione 3.1 *Supponiamo che esistano due costanti positive c_1 e c_2 per cui si abbia*

$$|g(t,x)| \leq c_1 |x| + c_2\,, \tag{3}$$

per ogni (t,x). Allora è ben definito l'operatore di Nemitzki:

$$\begin{aligned} &N : L^2(0,T) \to L^2(0,T)\,, \\ &(Nx)(t) = g(t, x(t))\,. \end{aligned}$$

Inoltre, N è continuo e manda limitati in limitati.

Dimostrazione. Se $x \in L^2(0,T)$, siccome

$$|g(t,x(t))|^2 \leq (c_1|x(t)| + c_2)^2 \leq 2c_1^2\,|x(t)|^2 + 2c_2^2\,,$$

e siccome $(2c_1^2|x|^2 + 2c_2^2) \in L^1(0,T)$, si ha che $Nx \in L^2(0,T)$ e

$$\|Nx\|_2^2 \leq 2c_1^2\,\|x\|_2^2 + 2c_2^2\,T\,,$$

per cui N manda limitati in limitati. Vediamo che N è continua. Sia $(x_n)_n$ una successione in $L^2(0,T)$ tale che $x_n \to x$ in $L^2(0,T)$. Allora per ogni sottosuccessione $(x_{n_k})_k$, esiste una sottosuccessione $(x_{n_{k_j}})_j$, controllata da una funzione $\ell \in L^2(0,T)$, che converge quasi ovunque:

$$|x_{n_{k_j}}(t)| \leq \ell(t)\,, \qquad x_{n_{k_j}}(t) \to x(t) \quad \text{per quasi ogni } t \in]0,T[\,.$$

Per il teorema della convergenza dominata, usando la continuità di g e la stima (3), si ha che

$$\int_0^T |g(t, x_{n_{k_j}}(t)) - g(t, x(t))|^2 \, dt \to 0\,,$$

ossia $Nx_{n_{k_j}} \to Nx$ in $L^2(0,T)$. Siccome questo è vero qualsiasi sia la sottosuccessione di $(x_n)_n$, possiamo concludere che $Nx_n \to Nx$ in $L^2(0,T)$. ■

Da quanto sopra, se vale (3), il problema (P) è del tipo

$$Lx = Nx\,.$$

Scelto un $\lambda \in \rho(L)$, possiamo trasformarlo in un problema di punto fisso:

$$x = (L - \lambda I)^{-1}(N - \lambda I)x\,.$$

Si tratterà ora di studiare le proprietà dell'operatore differenziale, allo scopo di individuare in seguito delle ipotesi che permettano di stabilire l'esistenza di solutioni per questo problema di punto fisso.

3.2 Proprietà dell'operatore differenziale

Il dominio $\mathcal{D}(L)$ è denso in H, siccome ogni $f \in H$ si può ottenere come somma della sua serie di Fourier: [1]

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f|e_k\rangle e_k = \lim_n \sum_{k=-n}^{+n} \langle f|e_k\rangle e_k\,,$$

e si ha che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{+n} \langle f|e_k\rangle e_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right) \in \mathcal{D}(L)\,.$$

dove

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(s)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}\, s\right) ds\,, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T e(s)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}\, s\right) ds\,.$$

[1] Ricordo che con questa scrittura si intende che

$$\lim_n \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f|e_k\rangle e_k \right\|_2 = 0\,.$$

Siccome le soluzioni dell'equazione

$$x'' = 0$$

sono del tipo

$$x(t) = at + b\,,$$

si ha che il nucleo $\mathcal{N}(L)$ è costituito dalle funzioni costanti. Dimostriamo che si tratta di un insieme chiuso in $L^2(0,T)$. Sia $(c_n)_n$ una successione di funzioni costanti che L^2-converge a una funzione $f \in L^2(0,T)$. Scrivendo $f = \bar{f} + \tilde{f}$, dove $\bar{f}$ è la media di f, ossia

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\,,$$

e pertanto $\tilde{f}$ ha media nulla, si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^T |c_n - f(t)|^2\,dt &= \int_0^T |(c_n - \bar{f}) - \tilde{f}(t)|^2\,dt \\
&= \int_0^T |c_n - \bar{f}|^2\,dt + \int_0^T |\tilde{f}(t)|^2\,dt \\
&\geq \int_0^T |\tilde{f}(t)|^2\,dt\,.
\end{aligned}$$

Quindi, deve essere $\tilde{f} = 0$, ovvero f è costante.

Determiniamo ora l'immagine $\mathcal{I}(L)$: se $e \in L^2(0,T)$, le soluzioni dell'equazione

$$x'' = e(t)$$

sono date da

$$x(t) = x_0 + y_0 t + \int_0^t \int_0^s e(\tau)\,d\tau\,ds\,.$$

Tali soluzioni appartiengono a $D(L)$ se e solo se

$$y_0 = -\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^s e(\tau)\,d\tau\,ds\,, \qquad \int_0^T e(\tau)\,d\tau = 0\,.$$

Abbiamo quindi che l'immagine $\mathcal{I}(L)$ è l'insieme delle funzioni aventi media nulla. In particolare, si ha

$$\mathcal{I}(L) = \mathcal{N}(L)^\perp\,,$$

e quindi

$$\mathcal{I}(L)^\perp = (\mathcal{N}(L)^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{N}(L)} = \mathcal{N}(L)\,.$$

Dimostriamo che il nostro operatore L è autoaggiunto. Innanzitutto, se x e y sono entrambi in $\mathcal{D}(L)$, allora

$$\begin{aligned}\langle Lx|y\rangle &= \int_0^T (-x''(t))y(t)\,dt \\ &= (-x'(T))y(T) - (-x'(0))y'(0) - \int_0^T (-x'(t))y'(t)\,dt \\ &= \int_0^T x'(t)y'(t)\,dt \\ &= x(T)y'(T) - x(0)y'(0) - \int_0^T x(t)y''(t)\,dt \\ &= \int_0^T x(t)(-y''(t))\,dt = \langle x|Ly\rangle\,.\end{aligned}$$

Quindi, se $y \in \mathcal{D}(L)$, si ha $\langle Lx|y\rangle = \langle x|Ly\rangle$, per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$, ed essendo quest'ultima espressione continua in x, si ha che $y \in \mathcal{D}(L^*)$. Pertanto, $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(L^*)$. Resta da dimostrare che $\mathcal{D}(L^*) \subseteq \mathcal{D}(L)$.

Sia $y \in \mathcal{D}(L^*)$. Definiamo $\phi(t) = \int_0^t (L^*y)(s)\,ds$. Allora $\phi \in W^{1,2}(0,T)$ e, per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$,

$$\begin{aligned}\int_0^T (-x''(t))y(t)\,dt = \langle Lx|y\rangle &= \langle x|L^*y\rangle \\ &= \int_0^T x(t)(L^*y)(t)\,dt \\ &= x(T)\phi(T) - x(0)\phi(0) - \int_0^T x'(t)\phi(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

In particolare, se x è una costante non nulla, si vede che $\phi(0) = \phi(T) = 0$. Definiamo ora

$$\psi(t) = \int_0^t \left[\phi(u) - \frac{1}{T}\int_0^T \phi(s)\,ds\right] du\,.$$

Allora $\psi \in W^{2,2}(0,T)$ e $\psi(0) = 0 = \psi(T)$, per cui, se $x \in D(L)$,

$$\begin{aligned}\int_0^T (-x''(t))y(t)\,dt &= -\int_0^T x'(t)\phi(t)\,dt \\ &= -\int_0^T x'(t)\Big(\phi(t) - \int_0^T \phi(s)\,ds\Big)\,dt \\ &= -x'(T)\psi(T) + x'(0)\psi(0) + \int_0^T x''(t)\psi(t)\,dt \\ &= \int_0^T x''(t)\psi(t)\,dt\,.\end{aligned}$$

Quindi, per ogni $x \in \mathcal{D}(L)$, si ha

$$\int_0^T x''(t)(y(t) + \psi(t))\,dt = 0\,.$$

Pertanto, $y + \psi$ è ortogonale a $\mathcal{I}(L)$. Essendo $\mathcal{I}(L)^\perp = \mathcal{N}(L)$, si ha che $y + \psi$ deve essere costante. Essendo $\psi \in W^{2,2}(0,T)$ con $\psi(0) = \psi(T)$ e $\psi'(0) = \psi'(T)$, si ha che $\psi \in \mathcal{D}(L)$, e pertanto anche $y \in \mathcal{D}(L)$, il che pone fine alla nostra dimostrazione.

Abbiamo quindi dimostrato che L è autoaggiunto. Il suo spettro è reale: si tratta di determinarlo.

3.3 L'equazione lineare

Consideriamo l'equazione differenziale scalare

$$x'' + \lambda x = e(t)\,, \tag{4}$$

dove $e \in L^2(0,T)$ e λ è un numero reale. Possiamo estendere $e(t)$ a tutto $\mathbb{R}$ per T-periodicità, per cui cercare le soluzioni $x \in D(L)$ corrisponderà a cercare le soluzioni T-periodiche di (4).

3.3.1 Il caso $\lambda > 0$

Se $\lambda > 0$, le soluzioni dell'equazione

$$x'' + \lambda x = 0 \tag{5}$$

sono tutte periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$:

$$x(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + b\sin(\sqrt{\lambda}\,t)\,.$$

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\lambda x\,, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono ellissi di equazione $y^2 + \lambda x^2 = c$, con $c \geq 0$, che circondano l'origine, il quale pertanto è un **centro isocrono**.

Consideriamo ora, sempre per $\lambda > 0$, l'equazione (4) e scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\lambda x + e(t)\,. \end{cases}$$

Ponendo $u = \binom{x}{y}$, la soluzione con punto iniziale $u(0) = u_0$ è data da

$$u(t) = W(t)\left(u_0 + \int_0^t W^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\ e(s)\end{pmatrix} ds\right),$$

dove $W(t)$ è la matrice wronskiana con $W(0) = I$:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}\,t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}\,t) \\ -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,t) & \cos(\sqrt{\lambda}\,t) \end{pmatrix}.$$

Scrivendo $u_0 = \binom{x_0}{y_0}$ e sviluppando, essendo

$$W^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}\, s) & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\, s) \\ \\ \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\, s) & \cos(\sqrt{\lambda}\, s) \end{pmatrix},$$

troviamo

$$\begin{aligned} x(t) = \cos(\sqrt{\lambda}\, t) &\left(x_0 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda}\, s)\, ds \right) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}\, t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda}\, s)\, ds \right), \\ y(t) = -\sin(\sqrt{\lambda}\, t) &\left(\sqrt{\lambda}\, x_0 - \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda}\, s)\, ds \right) + \\ &+ \cos(\sqrt{\lambda}\, t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda}\, s)\, ds \right). \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi con caratteristiche completamente diverse.

<u>I caso</u>. Se $\lambda = (\frac{2\pi N}{T})^2$, per un certo intero positivo N, considerando i coefficienti di Fourier [2]

$$a_N = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos\left(\frac{2\pi N}{T}\, s \right) ds\,, \quad b_N = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin\left(\frac{2\pi N}{T}\, s \right) ds\,,$$

si vede che

$$x(T) = x_0 - \frac{T^2 b_N}{4\pi N}\,, \quad y(T) = y_0 + \frac{T a_N}{2}\,.$$

Quindi, in questo caso, ci sono soluzioni T-periodiche di (4) se e solo se $a_N = b_N = 0$. In tal caso, **tutte le soluzioni** di (4) **sono T-periodiche**.

Al contrario, se $a_N \neq 0$ o $b_N \neq 0$, **tutte le soluzioni** di (4) **sono illimitate**, sia in passato che in futuro. Si vede infatti che, per $k \in \mathbb{Z}$,

$$x(kT) = x_0 - k\frac{T^2 b_N}{4\pi N}\,, \quad y(kT) = y_0 + k\frac{T a_N}{2}\,.$$

<u>II caso</u>. Se $\lambda > 0$ è tale che $\lambda \neq (\frac{2\pi n}{T})^2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$\alpha_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos(\sqrt{\lambda}\, s)\, ds\,, \quad \beta_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin(\sqrt{\lambda}\, s)\, ds\,.$$

[2] Ricordiamo che si ha

$$e(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t \right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t \right) \right).$$

Cerchiamo una soluzione T-periodica di (4) imponendo che sia $u(T) = u_0$. Risolvendo il sistema $\{x(T) = x_0,\, y(T) = y_0\}$, ossia

$$\begin{cases} x_0 = \cos(\sqrt{\lambda}\,T)\Big(x_0 - \dfrac{T}{2\sqrt{\lambda}}\beta_\lambda\Big) + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}\,T)\Big(y_0 + \dfrac{T}{2}\alpha_\lambda\Big), \\ y_0 = -\sin(\sqrt{\lambda}\,T)\Big(\sqrt{\lambda}\,x_0 - \dfrac{T}{2}\beta_\lambda\Big) + \cos(\sqrt{\lambda}\,T)\Big(y_0 + \dfrac{T}{2}\alpha_\lambda\Big), \end{cases}$$

troviamo

$$x_0 = \frac{T}{4\sqrt{\lambda}}\left(\beta_\lambda + \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\,T)}{1-\cos(\sqrt{\lambda}\,T)}\alpha_\lambda\right), \quad y_0 = \frac{T}{4}\left(\frac{1+\cos(\sqrt{\lambda}\,T)}{\sin(\sqrt{\lambda}\,T)}\beta_\lambda - \alpha_\lambda\right).$$

Quindi, in questo caso, **esiste un'unica soluzione T-periodica** di (4). La denotiamo con $x_{\lambda,e}(t)$. La funzione

$$\Psi_\lambda : e \mapsto x_{\lambda,e}$$

è lineare. Tutte **le altre soluzioni** di (4) **sono** del tipo

$$x(t) = x_{\lambda,e}(t) + a\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + b\sin(\sqrt{\lambda}\,t)\,,$$

e sono pertanto **tutte limitate** su $\mathbb{R}$.

Si noti inoltre che esiste una costante $c_\lambda \geq 0$ per cui si ha

$$|x_{\lambda,e}(t)| + |x'_{\lambda,e}(t)| \leq c_\lambda \int_0^T |e(s)|\,ds\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$. Da queste stime e dall'equazione differenziale si vede quindi che la funzione lineare $\Psi_\lambda : L^2(0,T) \to W^{2,2}(0,T)$ è continua: esiste una costante $c_\lambda \geq 0$ per cui si ha

$$\|\Psi_\lambda(e)\|_{W^{2,2}} \leq c_\lambda \|e\|_2\,,$$

per ogni $e \in L^2(0,T)$.

Notiamo infine che, se λ tende a $(\frac{2\pi N}{T})^2$, per un certo $N \in \mathbb{N}$, allora $\alpha_\lambda \to a_N$, $\beta_\lambda \to b_N$ e l'ampiezza di $x_{\lambda,e}(t)$ tende all'infinito se $a_N \neq 0$ o $b_N \neq 0$.

3.3.2 Il caso $\lambda < 0$

Se $\lambda < 0$, le soluzioni non nulle dell'equazione (5) sono tutte illimitate:

$$x(t) = a\cosh(\sqrt{-\lambda}\,t) + b\sinh(-\sqrt{-\lambda}\,t)\,.$$

L'equazione (4) si risolve in modo analogo a quanto già visto nella sezione 3.2.1: ponendo $u = \binom{x}{y}$, la soluzione con punto iniziale $u(0) = u_0$ è data da

$$u(t) = W(t)\left(u_0 + \int_0^t W^{-1}(s)\begin{pmatrix}0\\ e(s)\end{pmatrix}ds\right),$$

dove $W(t)$ questa volta è:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{-\lambda}\, t) & \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh(\sqrt{-\lambda}\, t) \\ \\ \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda}\, t) & \cosh(\sqrt{-\lambda}\, t) \end{pmatrix}.$$

Scrivendo $u_0 = \binom{x_0}{y_0}$ e sviluppando, troviamo

$$\begin{aligned} x(t) &= \cosh(\sqrt{-\lambda}\, t) \left(x_0 - \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^t e(s) \sinh(\sqrt{-\lambda}\, s)\, ds \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh(\sqrt{-\lambda}\, t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cosh(\sqrt{-\lambda}\, s)\, ds \right), \\ y(t) &= -\sinh(\sqrt{-\lambda}\, t) \left(\sqrt{-\lambda}\, x_0 - \int_0^t e(s) \sinh(\sqrt{-\lambda}\, s)\, ds \right) + \\ &\quad + \cosh(\sqrt{-\lambda}\, t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cosh(\sqrt{-\lambda}\, s)\, ds \right). \end{aligned}$$

Ponendo

$$\tilde{\alpha}_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cosh(\sqrt{-\lambda}\, s)\, ds\,, \quad \tilde{\beta}_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sinh(\sqrt{-\lambda}\, s)\, ds\,,$$

risolvendo il sistema $\{x(T) = x_0,\, y(T) = y_0\}$, troviamo

$$x_0 = \frac{T}{4\sqrt{-\lambda}} \left(\tilde{\beta}_\lambda + \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda}\, T)}{1 - \cosh(\sqrt{-\lambda}\, T)} \tilde{\alpha}_\lambda \right),\ y_0 = \frac{T}{4} \left(\frac{1 + \cosh(\sqrt{-\lambda}\, T)}{\sinh(\sqrt{-\lambda}\, T)} \tilde{\beta}_\lambda - \tilde{\alpha}_\lambda \right).$$

Quindi, anche in questo caso **esiste un'unica soluzione T-periodica** $x_{\lambda,e}$. Le considerazioni fatte sopra sulla funzione $\Psi_\lambda : e \mapsto x_{\lambda,e}$ continuano a valere.

3.3.3 Conclusioni

Abbiamo visto che gli unici elementi $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui non si ha che $(L - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ sono i numeri del tipo $(\frac{2\pi N}{T})^2$, con $N \in \mathbb{N}$. Quindi,

$$\sigma(L) = \left\{ \left(\frac{2\pi N}{T} \right)^2 : N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si noti che gli elementi dello spettro sono tutti autovalori, in quanto, se $\lambda = (\frac{2\pi N}{T})^2$, con $N \in \mathbb{N}$, le funzioni $x(t) = a \cos(\sqrt{\lambda}\, t) + b \sin(\sqrt{\lambda}\, t)$ risolvono $Lx = \lambda x$, essendo T-periodiche.

3.4 Il teorema delle contrazioni

Dato uno spazio metrico E, diremo che una funzione $f : E \to E$ è una **contrazione** se, per un certo $\alpha < 1$, si ha

$$d(f(u), f(v)) \leq \alpha\, d(u, v)\,,$$

per ogni $u, v \in E$.

Teorema 3.2 (Banach, 1922) *Se E è uno spazio metrico completo e $f : E \to E$ è una contrazione, allora esiste un unico $x \in E$ tale che $f(x) = x$. Inoltre, scegliendo $x_0 \in E$ arbitrariamente, la successione $(x_n)_n$ definita da*

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

è tale che $\lim_n x_n = x$.

Ricordiamo che, se $f(x) = x$, si dice che x è un **punto fisso** di f.

Dimostrazione. Consideriamo la successione $(x_n)_n$ definita come nell'enunciato, con $x_0 \in E$ arbitrario. Dimostriamo che è una successione di Cauchy. Osserviamo che, se m e n sono due numeri naturali, con $m < n$, si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) .$$

Dimostriamo per induzione che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale la seguente proposizione:

$$(P_k) \qquad d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k d(x_0, x_1) .$$

Infatti, se $k = 0$ si ha chiaramente l'uguaglianza, per cui (P_0) è vera. Supponiamo ora vera (P_k), per un certo $k \in \mathbb{N}$; allora

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(f(x_k), f(x_{k+1})) \leq \alpha\, d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x_1) ,$$

per cui è vera anche (P_{k+1}).

Usando (P_k), abbiamo quindi

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \leq \alpha^m d(x_0, x_1) \sum_{k=0}^{n-1-m} \alpha^k.$$

Siccome $\alpha \in [0, 1]$, la serie geometrica di base α converge e ha somma $\frac{1}{1-\alpha}$, per cui

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} .$$

Fissato $\varepsilon > 0$, siccome $\alpha \in [0, 1]$ esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \varepsilon .$$

Ne segue che

$$n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon ,$$

per cui $(x_n)_n$ è di Cauchy. Siccome E è completo, esiste il limite di $(x_n)_n$. Sia esso un certo $x \in E$:

$$\lim_n x_n = x .$$

Allora, esendo f continua,

$$f(x) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x ,$$

il che dimostra che x è un punto fisso di f.

Resta da dimostrare che il punto fisso è unico. Supponiamo che x' sia anch'esso un punto fisso di f. Allora

$$d(x,x') = d(f(x), f(x')) \leq \alpha\, d(x,x')\,,$$

e siccome $\alpha < 1$, deve essere $x = x'$. ∎

3.5 Nonrisonanza: esistenza e unicità

Come conseguenza del teorema delle contrazioni, abbiamo il seguente.

Teorema 3.3 (Dolph, 1949) *Supponiamo che esistano a, b reali tali che*

$$a \leq \frac{g(t,u) - g(t,v)}{u - v} \leq b\,,$$

per ogni $t \in [0,T]$, $u, v \in \mathbb{R}$, e

$$[a,b] \cap \sigma(L) = \emptyset\,.$$

Allora il problema (P) ha un'unica soluzione $x(t)$, di classe C^2. Inoltre, scegliendo arbitrariamente una funzione $x_0 \in L^2(0,T)$, la successione $(x_n)_n$ definita da

$$\begin{cases} x''_{n+1} + \dfrac{a+b}{2} x_{n+1} = -g(t, x_n(t)) + \dfrac{a+b}{2} x_n(t) \\[2ex] x_{n+1}(0) = x_{n+1}(T), \quad x'_{n+1}(0) = x'_{n+1}(T), \end{cases}$$

è tale che $\lim_n x_n(t) = x(t)$, uniformemente in $t \in [0.T]$.

Dimostrazione. Si ha

$$\left\| \left(L - \frac{a+b}{2} I \right)^{-1} \right\| = \frac{1}{d\left(\frac{a+b}{2}, \sigma(L)\right)} < \frac{2}{b-a}\,. \tag{6}$$

D'altra parte,

$$-\frac{b-a}{2} \leq \frac{\left(g(t,u) - \frac{a+b}{2}u\right) - \left(g(t,v) - \frac{a+b}{2}v\right)}{u-v} \leq \frac{b-a}{2}\,,$$

ossia

$$\left| \left(g(t,u) - \frac{a+b}{2}u \right) - \left(g(t,v) - \frac{a+b}{2}v \right) \right| \leq \frac{b-a}{2} |u - v|\,.$$

Inoltre, vale (3), per cui è ben definito l'operatore di Nemitzki N. Ne segue che, se $u, v \in L^2(0,T)$,

$$\left\| \left(Nu - \frac{a+b}{2}u \right) - \left(Nv - \frac{a+b}{2}v \right) \right\|_2 \leq \frac{b-a}{2} \|u - v\|_2\,.$$

Ponendo

$$M = \left(L - \frac{a+b}{2} I\right)^{-1} \left(N - \frac{a+b}{2} I\right),$$

si ha che

$$\begin{aligned}\|Mu - Mv\|_2 &\leq \left\| \left(L - \frac{a+b}{2} I\right)^{-1} \right\| \left\| \left(Nu - \frac{a+b}{2} u\right) - \left(Nv - \frac{a+b}{2} v\right) \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{d\left(\frac{a+b}{2}, \sigma(L)\right)} \frac{b-a}{2} \|u - v\|_2 .\end{aligned}$$

Pertanto, M è una contrazione e ha un unico punto fisso, approssimabile con la successione $(x_n)_n$ definita per ricorrenza. La convergenza $x_n \to x$ in $L^2(0,T)$ implica la limitatezza di $(x_n)_n$ in $L^2(0,T)$ e pertanto, per la continuità dell'operatore inverso, la limitatezza della stessa in $W^{2,2}(0,T)$. Ogni sua sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ ha quindi una sottosuccessione che converge a x uniformemente. Ne segue che anche $x_n \to x$ uniformemente. ■

Corollario 3.4 *Supponiamo che esistano a, b reali tali che*

$$a \leq \frac{\partial g}{\partial x}(t,x) \leq b ,$$

per ogni (t,x) e

$$[a,b] \cap \sigma(L) = \emptyset .$$

Allora vale la stessa conclusione del teorema precedente.

Dimostrazione. Per il Teorema di Lagrange, si ha

$$\frac{g(t,u) - g(t,v)}{u - v} = \frac{\partial g}{\partial x}(t, \xi) ,$$

per un certo $\xi \in]u, v[$. Si applica quindi il teorema precedente. ■

3.6 Equazioni in spazi di Hilbert

Il Teorema 3.3 si può generalizzare per un'equazione in uno spazio di Hilbert del tipo

$$Lx = Nx , \tag{7}$$

dove $L : \mathcal{D}(L) \subset H \to H$ è un operatore autoaggiunto e $N : H \to H$ un'applicazione continua. Diremo che una funzione $\Xi : H \to H$ è **monotona** se, per ogni f_1, f_2 in H,

$$\langle \Xi(f_1) - \Xi(f_2) | f_1 - f_2 \rangle \geq 0 .$$

Teorema 3.5 (Fonda - Mawhin, 1992) *Siano H uno spazio di Hilbert e $N = \nabla\eta$, con $\eta : H \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Siano $A, B \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunti, tali che*

$$(i)\ N - A \ \text{ e } \ B - N \ \text{ sono monotone,}$$
$$(ii)\ 0 \in \rho(L - (1-\mu)A - \mu B)\,, \quad \text{per ogni } \mu \in [0,1]\,.$$

Allora l'equazione (7) ha una ed una sola soluzione $x \in \mathcal{D}(L)$ che può essere ottenuta come limite del processo iterativo definito da

$$Lx_{k+1} - \tfrac{1}{2}(A+B)x_{k+1} = Nx_k - \tfrac{1}{2}(A+B)x_k\,,$$

con $x_0 \in H$ arbitrario.

Per la dimostrazione, abbiamo bisogno di due risultati preliminari.

Lemma 3.6 *Se $S \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto e monotono, allora esiste un unico operatore $R \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto e monotono tale che $R^2 = S$. Se $0 \in \rho(S)$, allora $0 \in \rho(R)$, e si ha $(R^{-1})^2 = S^{-1}$.*

L'operatore R si dice radice quadrata di S, e si indica con $S^{1/2}$. Il suo inverso, quando esiste, verrà indicato con $S^{-1/2}$. Nel caso in cui lo spazio di Hilbert sia reale, si vede facilmente che

$$(S^{1/2})^c = (S^c)^{1/2}.$$

Dimostrazione del Lemma 3.6. Supponiamo $S \neq 0$ e consideriamo l'equazione $R^2 = S$. Operando il cambiamento di variabile $D = I - \|S\|^{-1/2}R$, si ottiene

$$D = \frac{1}{2}\left(I - \frac{S}{\|S\|} + D^2\right) := T(D)\,.$$

Siamo così portati a cercare un punto fisso di T. Anche se T non è necessariamente una contrazione, andiamo alla ricerca di un suo punto fisso per mezzo della seguente iterazione di operatori autoaggiunti:

$$D_0 = 0\,,$$
$$D_{n+1} = T(D_n)\,.$$

Per induzione, si vede che ogni D_n commuta con S. Ne segue che, per ogni n, D_n commuta con D_{n+1}, e si ha:

$$D_{n+2} - D_{n+1} = \tfrac{1}{2}(D_{n+1} + D_n)(D_{n+1} - D_n)\,,$$

É allora facile dimostrare, per induzione, che, per ogni n, si ha

$$0 \le D_n \le D_{n+1} \le I\,.$$

Presi n, n', se $n < n'$ si vede che $\|D_{n'} - D_n\| \leq 1$, e per il Lemma 2.15 si ha

$$\|D_{n'}f - D_n f\|^2 \leq \langle D_{n'}f|f\rangle - \langle D_n f|f\rangle\,,$$

per ogni $f \in H$. Siccome la successione $(\,\langle D_n f|f\rangle\,)_n$ è crescente e limitata, essa converge. Per quanto visto sopra, la successione $(D_n f)_n$ è quindi di Cauchy, e perciò converge, per ogni $f \in H$. Poniamo

$$Df = \lim_n D_n f\,.$$

È immediato vedere che D è il punto fisso di T cercato. Inoltre, D è autoaggiunto, monotono, $\|D\| \leq 1$, e ponendo $R = \|S\|^{1/2}(I - D)$ si ottiene un operatore autoaggiunto, monotono, tale che $R^2 = S$.

Dimostriamo ora l'unicità. Siano R_1 e R_2 due operatori autoaggiunti, monotoni, tali che $R_1^2 = R_2^2 = S$. Preso $f \in H$, poniamo $g = (R_1 - R_2)f$. È chiaro che R_2 commuta con S. Perciò, esso commuta con ognuno dei D_n definiti sopra, quindi con D, e perciò anche con R_1. Si ha:

$$\langle (R_1 + R_2)g|g\rangle = \langle (R_1 + R_2)(R_1 - R_2)f|g\rangle = \langle (R_1^2 - R_2^2)f|g\rangle = 0\,.$$

Essendo R_1 e R_2 monotoni, ne segue che

$$\langle R_1 g|g\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle R_2 g|g\rangle = 0\,.$$

Per il Lemma 2.15, si ha $R_1 g = 0$ e $R_2 g = 0$. Quindi,

$$\begin{aligned}\|(R_1 - R_2)f\|^2 &= \langle (R_1 - R_2)f|(R_1 - R_2)f\rangle \\ &= \langle (R_1 - R_2)^2 f|f\rangle = \langle (R_1 - R_2)g|f\rangle = 0\,,\end{aligned}$$

ossia $R_1 f = R_2 f$. Ciò dimostra l'unicità.

Supponiamo infine che $0 \in \rho(S)$. Allora R è iniettiva, in quanto

$$Rf = 0 \quad \Rightarrow \quad Sf = R(Rf) = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0\,.$$

Quindi,

$$Rf = g \quad \Leftrightarrow \quad R^2 f = Rg \quad \Leftrightarrow \quad f = S^{-1}Rg\,.$$

Si ha dunque che $0 \in \rho(R)$, $R^{-1} = S^{-1}R$ e $(R^{-1})^2 = S^{-1}RR^{-1} = S^{-1}$. ■

Lemma 3.7 *Sia $\zeta : H \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che, per ogni f_1, f_2 in H,*

$$|\langle \nabla\zeta(f_1) - \nabla\zeta(f_2)|f_1 - f_2\rangle| \leq \alpha\|f_1 - f_2\|^2\,.$$

Allora, per ogni f_1, f_2 in H,

$$\|\nabla\zeta(f_1) - \nabla\zeta(f_2)\| \leq \alpha\|f_1 - f_2\|\,.$$

Dimostrazione del Lemma 3.7. Vediamo dapprima il caso in cui sia $H = \mathbb{R}^N$. Presi x, w in $\mathbb{R}^N$ e $t > 0$,

$$\left| \left\langle \frac{\nabla\zeta(x+tw) - \nabla\zeta(x)}{t} \Big| w \right\rangle \right| \leq \alpha \|w\|^2 .$$

Se ζ è di classe C^2, passando al limite per $t \to 0$,

$$|\langle \zeta''(x)w|w\rangle| \leq \alpha \|w\|^2 .$$

In questo caso, essendo $\zeta''(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ autoaggiunto, ne segue che

$$\|\zeta''(x)\| \leq \alpha ,$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e pertanto

$$\|\nabla\zeta(x_1) - \nabla\zeta(x_2)\| = \left\| \int_0^1 \zeta''(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)\, dt \right\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| .$$

Se invece ζ non è di classe C^2, consideriamo per ogni intero positivo n le funzioni $\rho_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definite da

$$\rho_n(x) = \begin{cases} c_n \exp\left(\frac{1}{n^2\|x\|^2 - 1}\right) & \text{se } \|x\| < \frac{1}{n} , \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq \frac{1}{n} , \end{cases}$$

cove $c_n > 0$ è una costante scelta in modo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u)\, du = 1 ,$$

per ogni $n \geq 1$. Queste funzioni prendono il nome di **mollificatori**. Definiamo, per ogni n, le funzioni $\zeta_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ in questo modo:

$$\zeta_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u)\zeta(x-u)\, du .$$

Si può vedere che ogni ζ_n è di classe C^∞ e

$$\nabla\zeta_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u)\nabla\zeta(x-u)\, du .$$

Inoltre, $\zeta_n \to \zeta$ e $\nabla\zeta_n \to \nabla\zeta$, uniformemente in $\mathbb{R}^N$. Vediamo ora che, per ogni n,

$$\begin{aligned} |\langle \nabla\zeta_n(x_1) - & \nabla\zeta_n(x_2)|x_1 - x_2\rangle| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u)\langle \nabla\zeta(x_1-u) - \nabla\zeta(x_2-u)|x_1 - x_2\rangle\, du \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u)|\langle \nabla\zeta(x_1-u) - \nabla\zeta(x_2-u)|(x_1-u) - (x_2-u)\rangle|\, du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(u)\alpha\|(x_1-u) - (x_2-u)\|^2\, du \\ &= \alpha\|x_1 - x_2\|^2 . \end{aligned}$$

Da quanto sopra, siccome ζ_n è di classe C^2, si ha

$$\|\nabla_n \zeta_n(x_1) - \nabla_n \zeta_n(x_2)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| \,.$$

Passando al limite per $n \to \infty$, si ottiene la

$$\|\nabla \zeta(x_1) - \nabla \zeta(x_2)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| \,.$$

Consideriamo ora il caso generale di uno spazio di Hilbert H. Fissiamo f_1 e f_2 in H. Sia Y il sottospazio generato da f_1, f_2, $\nabla\zeta(f_1)$ e $\nabla\zeta(f_2)$. Consideriamo $\zeta_Y : Y \to \mathbb{R}$, la restrizione di ζ a Y e $P_Y : H \to H$, la proiezione ortogonale su Y. Si vede allora che $\nabla\zeta_Y(y) = P_Y \nabla\zeta(y)$, per ogni $y \in Y$. Inoltre, per ogni y_1, y_2 in Y,

$$\begin{aligned}
|\langle \nabla\zeta_Y(y_1) - \nabla\zeta_Y(y_2) | y_1 - y_2 \rangle| &= |\langle P_Y \nabla\zeta(y_1) - P_Y \nabla\zeta(y_2) | y_1 - y_2 \rangle| \\
&= |\langle \nabla\zeta(y_1) - \nabla\zeta(y_2) | y_1 - y_2 \rangle| \\
&\leq \alpha \|y_1 - y_2\|^2 \,.
\end{aligned}$$

Identificando Y con $\mathbb{R}^N$, per un certo $N \leq 4$, da quanto stabilito nella prima parte della dimostrazione possiamo concludere che, per ogni y_1, y_2 in Y,

$$\|\nabla\zeta_Y(y_1) - \nabla\zeta_Y(y_2)\| \leq \alpha \|y_1 - y_2\| \,.$$

Ma allora, essendo f_1 e f_2 in Y e anche $\nabla\zeta(f_1)$ e $\nabla\zeta(f_2)$ in Y,

$$\begin{aligned}
\|\nabla\zeta(f_1) - \nabla\zeta(f_2)\| &= \|P_Y \nabla\zeta(f_1) - P_Y \nabla\zeta(f_2)\| \\
&\leq \|\nabla\zeta_Y(f_1) - \nabla\zeta_Y(f_2)\| \\
&\leq \alpha \|f_1 - f_2\| \,,
\end{aligned}$$

e la dimostrazione è così completa. ■

Dimostrazione del Teorema 3.5. Per prima cosa, dimostriamo che, esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$0 \in \rho(L - (1-\mu)(A - \epsilon I) - \mu(B + \epsilon I)) \,, \quad \text{per ogni } \mu \in [0,1] \,. \tag{8}$$

Infatti, usando il Corollario 2.10, da (ii) segue che, per ogni $\mu \in [0,1]$ fissato, esiste un $\epsilon(\mu) > 0$ tale che $0 \in \rho(L - (1-\mu)(A - \epsilon(\mu)I) - \mu(B + \epsilon(\mu)I))$. Esiste inoltre un $\delta(\mu) > 0$ tale che, per ogni $\nu \in]\mu - \delta(\mu), \mu + \delta(\mu)[$ si ha che $0 \in \rho(L - (1-\nu)(A - \epsilon(\mu)I) - \nu(B + \epsilon(\mu)I))$. Gli intervalli $]\mu - \delta(\mu), \mu + \delta(\mu)[$ formano un ricoprimento aperto dell'intervallo compatto $[0,1]$, che ha pertanto un sottoricoprimento finito:

$$[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} \,]\mu_i - \delta(\mu_i), \mu_i + \delta(\mu_i)[\,.$$

Prendendo $\epsilon = \min\{\epsilon(\mu_i) : i = 1, ..., n\}$, si ha quanto voluto.

Ponendo $S = B - A + 2\epsilon I \in \mathcal{L}(H)$, otteniamo un operatore autoaggiunto e monotono, e $0 \in \rho(S)$. Per Lemma 3.6, possiamo considerare $S^{1/2}$ e $S^{-1/2}$. Poniamo

$$\tilde{L} = S^{-1/2}(L - A + \epsilon I)S^{-1/2}, \quad \tilde{N} = S^{-1/2}(N - A + \epsilon I)S^{-1/2}.$$

Si vede facilmente che $\mathcal{D}(\tilde{L}) = S^{1/2}(\mathcal{D}(L))$, $\tilde{L}$ è autoaggiunto e $\tilde{N} = \nabla\tilde{\eta}$, dove $\tilde{\eta} = \eta \circ S^{-1/2}$.

Operando il cambiamento di variabile $v = S^{1/2}x$, l'equazione (1) diventa equivalente a

$$\tilde{L}v = \tilde{N}v\,,$$

che è equivalente al seguente problema di punto fisso:

$$v = \left(\tilde{L} - \tfrac{1}{2}I\right)^{-1}\left[\tilde{N}v - \tfrac{1}{2}v\right] := Mv\,.$$

Siccome

$$L - (1-\mu)(A - \epsilon I) - \mu(B + \epsilon I) = S^{1/2}(\tilde{L} - \mu I)S^{1/2},$$

dalla (8) si ha che

$$\sigma(\tilde{L}) \cap [0,1] = \emptyset\,,$$

e, per il Teorema 2.18,

$$\left\|\left(\tilde{L} - \tfrac{1}{2}I\right)^{-1}\right\| < 2\,.$$

D'altra parte, da (i) si deduce che, per ogni f_1, f_2 in H,

$$\left|\left\langle(\tilde{N} - \tfrac{1}{2}I)f_1 - (\tilde{N} - \tfrac{1}{2}I)f_2 | f_1 - f_2\right\rangle\right| \le \tfrac{1}{2}\|f_1 - f_2\|^2\,,$$

da cui, essendo $\tilde{N} - \frac{1}{2}I = \nabla\zeta$ con $\zeta(f) = \tilde{\eta}(f) - \frac{1}{2}\|f\|^2$, per il Lemma 3.7, per ogni f_1, f_2,

$$\left\|(\tilde{N} - \tfrac{1}{2}I)f_1 - (\tilde{N} - \tfrac{1}{2}I)f_2\right\| \le \tfrac{1}{2}\|f_1 - f_2\|\,.$$

Si ha quindi che $(\tilde{N} - \frac{1}{2}I)$ è Lipschitziana di costante $\frac{1}{2}$, M è una contrazione, e pertanto ha un unico punto fisso $x \in H$, che può essere ottenuto come limite del processo iterativo $x_{n+1} = Mx_n$, con $x_0 \in H$ arbitrario. Ne segue la tesi. ∎

Corollario 3.8 *Sia H uno spazio di Hilbert e supponiamo $N = \nabla\eta$, con $\eta : H \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Siano $A, B \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunti, tali che*

$$(i)\ A \le N'(x) \le B\,, \quad \text{per ogni } x \in H\,,$$
$$(ii)\ 0 \in \rho(L - (1-\mu)A - \mu B)\,, \quad \text{per ogni } \mu \in [0,1]\,.$$

Allora si ha la stessa conclusione del Teorema 3.5.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\langle (N - A)f_1 &- (N - A)f_2 | f_1 - f_2\rangle = \\ &= \int_0^1 \langle (N'(f_2 + t(f_1 - f_2)) - A)(f_1 - f_2) | f_1 - f_2\rangle\, dt \ge 0\,,\end{aligned}$$

per cui $N - A$ è monotona. Analogamente si vede che anche $B - N$ è monotona, per cui la condizione (i) del Teorema 3.5 è soddisfatta. ∎