1 Alcune premesse sugli spazi di Hilbert

1.1 Lo spazio di Hilbert

Sia H uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{K}$, che si supporrà essere il corpo dei numeri reali $\mathbb{R}$ o quello dei numeri complessi $\mathbb{C}$. È definito un prodotto scalare $H \times H \to \mathbb{K}$ che indicheremo con $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Esso è tale che, per ogni $f, g, h \in H$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, sono verificate le seguenti proprietà:

$$
\begin{aligned}
&a)\ \langle f|f \rangle \geq 0\,;\\
&b)\ \langle f|f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0\,;\\
&c)\ \langle f+g|h \rangle = \langle f|h \rangle + \langle g|h \rangle\,;\\
&d)\ \langle \alpha f|g \rangle = \alpha \langle f|g \rangle\,;\\
&e)\ \langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle^*\,,
\end{aligned}
$$

dove z^* indica il complesso coniugato di z ($z^* = z$ se $z \in \mathbb{R}$). Si noti che

$$\langle f|\alpha g \rangle = \alpha^* \langle f|g \rangle\,.$$

Poniamo, per ogni $f \in H$,

$$\|f\| = \langle f|f \rangle^{1/2}\,.$$

Teorema 1.1 *Per ogni $f, g \in H$, si ha:*

$$|\langle f|g \rangle| \leq \|f\|\,\|g\|\,.$$

(**disuguaglianza di Schwarz**).

<u>Dimostrazione</u>. La disuguaglianza è sicuramente verificata se $g = 0$, essendo in tal caso $\langle f|g \rangle = 0$ e $\|g\| = 0$. Supponiamo quindi $g \neq 0$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{K}$, si ha

$$0 \leq \|f - \alpha g\|^2 = \langle f - \alpha g|f - \alpha g \rangle = \|f\|^2 - \alpha^* \langle f|g \rangle - \alpha \langle g|f \rangle + |\alpha|^2 \|g\|^2\,.$$

Prendendo $\alpha = \frac{\langle f|g \rangle}{\|g\|^2}$, si ottiene

$$0 \leq \|f\|^2 - 2\frac{|\langle f|g \rangle|^2}{\|g\|^2} + \frac{|\langle f|g \rangle|^2}{\|g\|^4}\|g\|^2 = \|f\|^2 - \frac{|\langle f|g \rangle|^2}{\|g\|^2}\,,$$

da cui la tesi. ∎

Si ha che $\|\cdot\|$ è una norma su H:

$$
\begin{aligned}
&a)\ \|f\| \geq 0\,;\\
&b)\ \|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0\,;\\
&c)\ \|\alpha f\| = |\alpha|\ \|f\|\,;\\
&d)\ \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|\,.
\end{aligned}
$$

Dimostriamo quest'ultima:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^2 &= \langle f+g|f+g\rangle \\
&= \langle f|f\rangle + \langle f|g\rangle + \langle g|f\rangle + \langle g|g\rangle \\
&= \|f\|^2 + 2\Re(\langle f|g\rangle) + \|g\|^2 \\
&\le \|f\|^2 + 2|\langle f|g\rangle| + \|g\|^2 \\
&\le \|f\|^2 + 2\|f\|\,\|g\| + \|g\|^2 \\
&= (\|f\| + \|g\|)^2 \,.
\end{aligned}$$

Poniamo, per $f, g \in H$,

$$d(f,g) = \|f-g\| \,.$$

Si ha che $d(\cdot,\cdot)$ è una distanza che rende H uno spazio metrico:

$$\begin{aligned}
&a)\; d(f,g) \ge 0\,; \\
&b)\; d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g\,; \\
&c)\; d(f,g) = d(g,f)\,; \\
&d)\; d(f,h) \le d(f,g) + d(g,h)\,.
\end{aligned}$$

Diremo che H è uno spazio di Hilbert se, rispetto a tale distanza, H è completo. Nel seguito, H indicherà sempre uno spazio di Hilbert.

1.2 Alcuni esempi di spazi di Hilbert

Illustriamo tre esempi importanti di spazi di Hilbert, che verranno ripresi anche in seguito.

1) Consideriamo l'insieme $\mathbb{K}^N$, con la seguente operazione: se $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_N)$ sono due suoi elementi,

$$\langle \boldsymbol{\alpha}|\boldsymbol{\beta}\rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \beta_k^* \,.$$

Si verificano facilmente le proprietà del prodotto scalare.

Notiamo che, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, abbiamo il prodotto scalare usuale, che genera la norma e la distanza euclidea. Sappiamo che in questo caso $\mathbb{R}^N$ è uno spazio metrico completo, quindi uno spazio di Hilbert.

Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, scrivendo ogni α_k nella forma $\alpha_k = a_k + ib_k$, la norma associata al prodotto scalare sopra definito è

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \Big(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=1}^{N} \big(a_k^2 + b_k^2\big)\Big)^{1/2} .$$

Si può pertanto identificare $\mathbb{C}^N$ con $\mathbb{R}^{2N}$, per cui anche in questo caso abbiamo a che fare con uno spazio di Hilbert.

Si noti che, nel caso $N = 1$, il prodotto scalare è dato da $\langle \alpha|\beta\rangle = \alpha\beta^*$.

2) Consideriamo l'insieme $\ell^2(\mathbb{K})$, costituito dalle successioni $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{K}$ tali che

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < +\infty\,.$$

Si può verificare che, per $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_{k\geq 1}$ e $\boldsymbol{\beta} = (\beta_k)_{k\geq 1}$, ha senso porre

$$\langle \boldsymbol{\alpha} | \boldsymbol{\beta} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k^*\,,$$

e che sono soddisfatte le proprietà del prodotto scalare. Si può inoltre dimostrare che $\ell^2(\mathbb{K})$, con tale prodotto scalare, è uno spazio di Hilbert.

3) Consideriamo l'insieme $L^2([a,b],\mathbb{K})$, costituito dalle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, integrabili secondo Lebesgue, tali che anche $|f|^2$ sia integrabile. Si può verificare che, per $f, g \in L^2([a,b],\mathbb{K})$, ha senso porre

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)^*\,dx\,.$$

(In alcune applicazioni, potrebbe risultare utile moltiplicare l'integrale per un'opportuna costante.) Le proprietà del prodotto scalare sono di facile verifica, purché si convenga di identificare due funzioni qualora coincidano quasi ovunque. Si può inoltre dimostrare che $L^2([a,b],\mathbb{K})$, con tale prodotto scalare, è uno spazio di Hilbert. Qualora non ci sia pericolo di ambiguità, indicheremo tale spazio con $L^2(a,b)$.

Osserviamo che l'uso dell'integrale di Lebesgue è qui fondamentale. Se ad esempio considerassimo solamente funzioni integrabili secondo Riemann, non si avrebbe la completezza dello spazio.

4) Sull'insieme $W^{1,2}([a,b],\mathbb{K})$, costituito dalle funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{K}$, assolutamente continue con derivata f' in $L^2([a,b],\mathbb{K})$, si può definire il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b [f(x) g(x)^* + f'(x) g'(x)^*]\,dx\,.$$

Si può dimostrare che, anche in questo caso, si tratta di uno spazio di Hilbert. Tale spazio viene spesso indicato, più semplicemente, con $W^{1,2}(a,b)$.

1.3 Alcune proprietà fondamentali

Si può verificare la seguente disuguaglianza:

$$\Big| \|f\| - \|g\| \Big| \leq \|f - g\|\,.$$

Ne segue che la norma è una funzione continua. Dalla disuguaglianza di Schwarz segue inoltre che il prodotto scalare è continuo nelle singole componenti. Se $(f_n)_n$ è una successione in H tale che $\lim_n f_n = f$, potremo quindi scrivere

$$\|f\| = \lim_n \|f_n\|\,, \qquad \langle f | g \rangle = \lim_n \langle f_n | g \rangle\,;$$

se inoltre la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge, avremo

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} f_k \middle| g \right\rangle = \left\langle \lim_n \sum_{k=1}^{n} f_k \middle| g \right\rangle = \lim_n \left\langle \sum_{k=1}^{n} f_k \middle| g \right\rangle = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \langle f_k | g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f_k | g \rangle .$$

Teorema 1.2 *Per ogni $f, g \in H$, si ha*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 .$$

(**identità del parallelogramma**).

<u>Dimostrazione</u>. Essendo

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= \|f\|^2 + 2\Re(\langle f|g\rangle) + \|g\|^2 , \\ \|f-g\|^2 &= \|f\|^2 - 2\Re(\langle f|g\rangle) + \|g\|^2 , \end{aligned}$$

sommando le due si ottiene l'identità cercata. ■

Qualora, per $f, g \in H$, si abbia $\langle f, g \rangle = 0$, diremo che f e g sono tra loro **ortogonali**. Più in generale, diremo che una famiglia $(f_k)_k$ in H (finita o infinita) è **ortogonale** se $\langle f_j, f_k \rangle = 0$ per ogni $j \neq k$.

Teorema 1.3 (di Pitagora) *Enunciamo tre situazioni, in ordine di generalità crescente.*
I) Se f e g sono ortogonali, allora

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

II) Se $(f_1, f_2, ..., f_n)$ è una famiglia ortogonale, allora

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2 .$$

III) Sia $(f_k)_k$ una successione di vettori a due a due ortogonali. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \ \textit{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 \ \textit{converge} \ ;$$

in tal caso, si ha:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 .$$

<u>Dimostrazione</u>. I) Essendo $\langle f|g \rangle = 0$, si ha:

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + 2\Re(\langle f|g\rangle) + \|g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 .$$

II) Si procede per induzione, usando I):

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2 + ... + f_{n+1}\|^2 &= \|(f_1 + f_2 + ... + f_n) + f_{n+1}\|^2 \\ &= \|f_1 + f_2 + ... + f_n\|^2 + \|f_{n+1}\|^2 \\ &= (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + ... + \|f_n\|^2) + \|f_{n+1}\|^2 .\end{aligned}$$

III) Usando II), per ogni m, n si ha

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} f_k \right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} \|f_k\|^2 .$$

Essendo H completo, si può applicare il criterio di Cauchy per stabilire che, se la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2$ converge, allora converge anche $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, e viceversa. Supponiamo ora che le due serie convergano. Allora, per la continuità della norma,

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right\|^2 = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2 .$$

■

1.4 Sottospazi

Un sottoinsieme $\mathcal{M}$ di H si dice **varietà lineare** se, comunque presi $f, g \in \mathcal{M}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, si ha che $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}$. Non è detto in generale che una varietà lineare sia uno spazio di Hilbert, in quanto la completezza si mantiene solamente se $\mathcal{M}$ è un insieme chiuso (ricordiamo che un insieme è chiuso se e solo se contiene il limite di ogni sua successione convergente). Diremo quindi che $\mathcal{M}$ è un **sottospazio** di H se è una varietà lineare chiusa.

Un esempio di varietà lineare che non sia un sottospazio è, in $L^2([a, b], \mathbb{K})$, l'insieme $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ delle funzioni continue. In effetti, si può dimostrare che la sua chiusura è tutto $L^2([a, b], \mathbb{K})$.

Teorema 1.4 *Se $\mathcal{M}$ è una varietà lineare, la sua chiusura $\overline{\mathcal{M}}$ è ancora una varietà lineare, e pertanto è un sottospazio.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in \overline{\mathcal{M}}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Esistono due successioni $(f_n)_n$ e $(g_n)_n$ tali che $f_n, g_n \in \mathcal{M}$ per ogni n e $\lim_n f_n = f$, $\lim_n g_n = g$. Allora $\alpha f_n + \beta g_n \in \mathcal{M}$, e $\lim_n(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha f + \beta g$, per cui $\alpha f + \beta g \in \overline{\mathcal{M}}$. ■

Teorema 1.5 *Se $(\mathcal{M}_k)_k$ è una famiglia (anche non numerabile) di sottospazi, allora la loro intersezione è ancora un sottospazio.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che l'intersezione di varietà lineari è una varietà lineare, e l'intersezione di insiemi chiusi è un insieme chiuso. ■

Corollario 1.6 *Dato un insieme $U \subseteq H$, esiste un unico sottospazio $\mathcal{M}$ tale che*

a) $\mathcal{M}$ contiene U ,

b) se $\mathcal{M}'$ è un sottospazio che contiene U, allora $\mathcal{M}'$ contiene $\mathcal{M}$.

Dimostrazione. Si definisce $\mathcal{M}$ come intersezione di tutti i sottospazi contenenti l'insieme U. Si ha che $\mathcal{M}$ è un sottospazio e si verificano immediatamente a) e b). ∎

L'insieme $\mathcal{M}$, la cui esistenza è stabilita nel teorema precedente, è il più piccolo sottospazio che contiene U; si dice che $\mathcal{M}$ è il **sottospazio generato** da U.

Dati due sottospazi $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$, l'insieme

$$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \{f + g : f \in \mathcal{M}_1, g \in \mathcal{M}_2\} .$$

è una varietà lineare, ma non sempre è un sottospazio. Confrontiamolo con il sottospazio generato dall'unione $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, che indichiamo con $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$.

Teorema 1.7 *Si ha:*

$$\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = \overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2} .$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M}_1$ che $\mathcal{M}_2$ sono contenuti in $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$. Essendo quet'ultimo una varietà lineare, anche $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ è contenuto in esso; essendo inoltre chiuso, avremo $\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2} \subseteq \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$.

Viceversa, sia $\mathcal{M}_1$ che $\mathcal{M}_2$ sono contenuti in $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$. Quindi anche la loro unione lo è. Ma $\overline{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}$ è un sottospazio, quindi deve contenere $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$. ∎

Se $(\mathcal{M}_k)_k$ è una successione di sottospazi, si definisce

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$$

come l'insieme degli elementi ottenuti come somma di una serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, con $f_k \in \mathcal{M}_k$. Si verifica che è una varietà lineare. Come nel caso di una somma di due sottospazi, lo confrontiamo con il sottospazio generato dall'unione degli $\mathcal{M}_k$, che indicheremo con $\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$.

Teorema 1.8 *Si ha:*

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k = \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k} .$$

Dimostrazione. Tutti gli $\mathcal{M}_k$ sono contenuti in $\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. Essendo quest'ultimo un sottospazio, contiene anche gli elementi ottenuti come somma di una serie convergente $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, con $f_k \in \mathcal{M}_k$, quindi contiene $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$; essendo inoltre chiuso, avremo $\overline{\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k} \subseteq \bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$.

Viceversa, tutti gli $\mathcal{M}_k$ sono contenuti in $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. Quindi anche la loro unione lo è. Ma $\overline{\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k}$ è un sottospazio, quindi deve contenere $\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$. ∎

1.5 Sottospazi ortogonali

Diremo che due insiemi U e V sono ortogonali se

$$\forall f \in U \quad \forall g \in V \quad \langle f|g\rangle = 0\,.$$

Indicheremo con $U^\perp$ l'insieme dei vettori di H che risultano ortogonali ad ogni vettore di U.

Teorema 1.9 *$U^\perp$ è un sottospazio di H. Inoltre, $\bar{U}^\perp = U^\perp$.*

Dimostrazione. Siano $f, g \in U^\perp$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Allora, per ogni $u \in U$, si ha

$$\langle \alpha f + \beta g|u\rangle = \alpha\langle f|u\rangle + \beta\langle g|u\rangle = 0\,,$$

per cui $\alpha f + \beta g \in U^\perp$. Quindi $U^\perp$ è una varietà lineare. Vediamo che è un insieme chiuso. Sia $(f_n)_n$ una successione in $U^\perp$ tale che $\lim_n f_n = f$. Allora, per ogni $u \in U$,

$$\langle f|u\rangle = \lim_n \langle f_n|u\rangle = 0\,,$$

per cui $f \in U^\perp$. Quindi $U^\perp$ è un sottospazio.

Siccome $U \subseteq \bar{U}$, si ha che $\bar{U}^\perp \subseteq U^\perp$. D'altra parte, se $f \in U^\perp$ e $g \in \bar{U}$, allora esiste una successione $(g_n)_n$ in U tale che $\lim_n g_n = g$; quindi

$$\langle f|g\rangle = \lim_n \langle f|g_n\rangle = 0\,;$$

ne segue che $f \in \bar{U}^\perp$, da cui $U^\perp \subseteq \bar{U}^\perp$. ■

Teorema 1.10 *Se $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ sono due sottospazi ortogonali, allora*

$$\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2\,.$$

Inoltre, $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, ossia ogni $f \in \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ si può scrivere in un unico modo come $f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in \mathcal{M}_1$ e $f_2 \in \mathcal{M}_2$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che l'insieme $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ è chiuso. Sia $(f_n)_n$ una successione in esso tale che $\lim_n f_n = f$. Possiamo scrivere $f_n = f_{n,1} + f_{n,2}$, con $f_{n,1} \in \mathcal{M}_1$ e $f_{n,2} \in \mathcal{M}_2$. Per Pitagora,

$$\|f_m - f_n\|^2 = \|f_{m,1} - f_{n,1}\|^2 + \|f_{m,2} - f_{n,2}\|^2\,,$$

e siccome $(f_n)_n$ è di Cauchy, lo sono di conseguenza anche $(f_{n,1})_n$ e $(f_{n,2})_n$. Quindi esistono i limiti $\lim_n f_{n,1} = \bar{f}_1$ e $\lim_n f_{n,2} = \bar{f}_2$, ed essendo $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ chiusi, si ha che $\bar{f}_1 \in \mathcal{M}_1$ e $\bar{f}_2 \in \mathcal{M}_2$. Ne segue che $f = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 \in \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$. Questo dimostra che $\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ è chiuso.

Supponiamo che si possa scrivere $f = \bar{f}_1 + \bar{f}_2 = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$, con $\bar{f}_1, \tilde{f}_1 \in \mathcal{M}_1$ e $\bar{f}_2, \tilde{f}_2 \in \mathcal{M}_1$. Per Pitagora, si ha

$$\|\bar{f}_1 - \tilde{f}_1\|^2 + \|\bar{f}_2 - \tilde{f}_2\|^2 = \|\bar{f}_1 - \tilde{f}_1 + \bar{f}_2 - \tilde{f}_2\|^2 = 0\,,$$

per cui $\bar{f}_1 = \tilde{f}_1$ e $\bar{f}_2 = \tilde{f}_2$. ■

Teorema 1.11 *Se $(\mathcal{M}_k)_k$ sono sottospazi a due a due ortogonali, si ha*

$$\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k \,.$$

Inoltre, $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k = \oplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$, ossia ogni $f \in \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$ si può scrivere in un unico modo come $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, con $f_k \in \mathcal{M}_k$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che l'insieme $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$ è chiuso. Sia $(f_n)_n$ una successione in esso tale che $\lim_n f_n = f$. Possiamo scrivere $f_n = \sum_{k=1}^{\infty} f_{n,k}$, con $f_{n,k} \in \mathcal{M}_k$. Per Pitagora,

$$\|f_m - f_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{m,k} - f_{n,k}\|^2 \,,$$

e siccome $(f_n)_n$ è di Cauchy, lo sono di conseguenza anche le $(f_{n,k})_n$. Quindi esistono i limiti $\lim_n f_{n,k} = \bar{f}_k$, ed essendo gli $\mathcal{M}_k$ chiusi, si ha che $\bar{f}_k \in \mathcal{M}_k$.

Vogliamo ora vedere che $f = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k$. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Da quanto sopra, esiste un $\bar{n} \geq 1$ tale che

$$m, n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{m,k} - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2 \,,$$

ossia $\sum_{k=1}^{N} \|f_{m,k} - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2$ per ogni $N \geq 1$. Passando al limite per $m \to \infty$ si ha $\sum_{k=1}^{N} \|\bar{f}_k - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2$ per ogni $N \geq 1$, per cui anche $\sum_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}_k - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2$. Per Pitagora, $\sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k - f_{n,k})$ converge e abbiamo che

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k - f_{n,k}) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}_k - f_{n,k}\|^2 \leq \varepsilon^2 \,.$$

Quindi converge anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k - f_{n,k}) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{n,k}$$

e da quanto sopra si ha che

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k - f_n \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k - f_{n,k}) \right\| \leq \varepsilon \,,$$

il che dimostra che $\lim_n f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k$, ossia $f = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k$. Abbiamo quindi che $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k$ è chiuso.

Sia ora $f = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k$, con $\bar{f}_k, \tilde{f}_k \in \mathcal{M}_k$; allora, per Pitagora,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\bar{f}_k - \tilde{f}_k\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{f}_k - \tilde{f}_k) \right\|^2 = 0 \,,$$

per cui $\bar{f}_k = \tilde{f}_k$ per ogni k. ■

1.6 La proiezione ortogonale

Teorema 1.12 *Dato un sottospazio $\mathcal{M}$, e $f \in H$, esiste uno ed un solo $\bar{f} \in \mathcal{M}$ tale che $\|f - \bar{f}\| = d(f, \mathcal{M})$. Inoltre, $f - \bar{f} \in \mathcal{M}^\perp$.*

Dimostrazione. Sia (f_n) una successione in $\mathcal{M}$ tale che $\lim_n \|f - f_n\| = d(f, \mathcal{M})$. Applicando l'identità del parallelogramma a $(f - f_n)$ e $(f - f_m)$, si ha

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq 2\|f_n - f\|^2 + 2\|f_m - f\|^2 - 4d(f, \mathcal{M})^2 \,.$$

Ne segue che (f_n) è una successione di Cauchy, e quindi converge verso un certo $\bar{f} \in \mathcal{M}$. Chiaramente, si ha $\|f - \bar{f}\| = d(f, \mathcal{M})$. Inoltre, $\bar{f}$ è l'unico ad avere questa proprietà, perchè se $\tilde{f}$ è tale che $\|f - \tilde{f}\| = d(f, \mathcal{M})$, applicando l'identità del parallelogramma a $(f - \bar{f})$ e $(f - \tilde{f})$ si vede che

$$\|\bar{f} - \tilde{f}\|^2 = 4d(f, \mathcal{M})^2 - 4 \left\| f - \tfrac{1}{2}(\bar{f} + \tilde{f}) \right\|^2 \leq 0 \,,$$

e perciò $\bar{f} = \tilde{f}$. Infine, se per assurdo ci fosse un $g \in \mathcal{M}$ tale che $\langle f - \bar{f} | g \rangle \neq 0$, allora, posto $g' = \bar{f} + \frac{\langle f - \bar{f}, g \rangle}{\|g\|^2} g \in \mathcal{M}$, con semplici passaggi si ottiene

$$\|f - g'\|^2 = \|f - \bar{f}\|^2 - \left(\frac{|\langle f - \bar{f} | g \rangle|}{\|g\|} \right)^2 < d(f, \mathcal{M})^2 \,,$$

una contraddizione. ■

L'applicazione che a f associa $\bar{f}$ si dice **proiezione ortogonale** su $\mathcal{M}$, e si indica con $P_{\mathcal{M}}$:

$$\bar{f} = P_{\mathcal{M}} f \,.$$

Corollario 1.13 *Sia $\mathcal{M}$ una varietà lineare in H. Allora*

$$\overline{\mathcal{M}} = H \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{M}^\perp = \{0\} \,.$$

Dimostrazione. Se $\overline{\mathcal{M}} = H$, allora $\mathcal{M}^\perp = \overline{\mathcal{M}}^\perp = H^\perp = \{0\}$. D'altra parte, se $\overline{\mathcal{M}} \neq H$, esiste un $f \in H$ che non appartiene al sottospazio $\overline{\mathcal{M}}$. Per il teorema precedente, $f - P_{\overline{\mathcal{M}}} f$ è non nullo e appartiene a $\overline{\mathcal{M}}^\perp = \mathcal{M}^\perp$. ■

Corollario 1.14 *Se $\mathcal{M}$ è un sottospazio di H, si ha che $H = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$: ogni elemento $f \in H$ si può scrivere in un unico modo come $f = f_1 + f_2$, con $f_1 \in \mathcal{M}$ e $f_2 \in \mathcal{M}^\perp$.*

Dimostrazione. Per ogni $f \in H$, si scrive

$$f = P_{\mathcal{M}} f + (f - P_{\mathcal{M}} f) \,,$$

per cui $H = \mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp$. Inoltre, essendo $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}^\perp$ ortogonali, si ha $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\perp = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$. ■

Corollario 1.15 *Per ogni varietà lineare $\mathcal{M}$ di H, si ha che $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \bar{\mathcal{M}}$.*

Dimostrazione. Chiaramente, $\mathcal{M} \subset (\mathcal{M}^\perp)^\perp$, e siccome $(\mathcal{M}^\perp)^\perp$ è chiuso, $\bar{\mathcal{M}} \subset (\mathcal{M}^\perp)^\perp$. D'altra parte, se non valesse l'uguaglianza, si potrebbe trovare un $u_0 \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp \backslash \{0\}$ tale che $u_0 \in \mathcal{M}^\perp$. Ciò è assurdo, in quanto $H = \mathcal{M}^\perp \oplus (\mathcal{M}^\perp)^\perp$. ■

1.7 Basi di uno spazio di Hilbert

Diremo che una famiglia ortogonale $(e_k)_k$ è **ortonormale** se $\|e_k\| = 1$ per ogni k. Una famiglia ortonormale $(e_k)_k$ è una **base** per lo spazio di Hilbert H se, preso $f \in H$, si ha

$$[\, \forall k \;\; \langle f|e_k\rangle = 0 \,] \quad \Rightarrow \quad f = 0\,.$$

Diremo che H è **separabile** se esiste una sua base finita o numerabile. Supponendo noto il caso della base finita, tratteremo ora il caso di una base infinita.

Teorema 1.16 *Sia $(e_k)_{k\geq 1}$ una successione ortonormale in H. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*
a) $(e_k)_{k\geq 1}$ è una base di H;
b) $H = \bigvee_{k=1}^{\infty}\{e_k\}$;
c) per ogni $f \in H$, $f = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f|e_k\rangle e_k$ (**serie di Fourier**)*;*
d) per ogni $f, g \in H$, $\langle f|g\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f|e_k\rangle\langle g|e_k\rangle^*$;
e) per ogni $f \in H$, $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle f|e_k\rangle|^2$ (**identità di Parseval**)*.*

Dimostrazione. *a)* $\Rightarrow$ *b)* Per assurdo, sia $\bigvee_{k=1}^{\infty}\{e_k\}$ un sottospazio proprio di H. Allora esiste un $f \neq 0$ ad esso ortogonale, per cui $\langle f|e_k\rangle = 0$ per ogni k, in contraddizione col fatto che $(e_k)_k$ è una base.

b) $\Rightarrow$ *c)* Consideriamo i sottospazi $\mathcal{M}_k = \{\alpha e_k : \alpha \in \mathbb{K}\}$, a due a due ortogonali. Essendo

$$H = \bigvee_{k=1}^{\infty}\{e_k\} = \bigvee_{k=1}^{\infty}\mathcal{M}_k = \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{M}_k\,,$$

per $f \in H$ si ha che $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$, con $f_k \in \mathcal{M}_k$. Allora $f_k = \alpha_k e_k$ e

$$\langle f|e_j\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e_k \middle| e_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle \alpha_k e_k|e_j\rangle = \alpha_j\,,$$

per ogni j, da cui la formula cercata.

c) $\Rightarrow$ *d)* Presi $f, g \in H$, abbiamo

$$\langle f|g\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty}\langle f|e_k\rangle e_k \middle| g \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\left\langle \langle f|e_k\rangle e_k \middle| g \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f|e_k\rangle\langle e_k|g\rangle\,.$$

d) $\Rightarrow$ *e)* È sufficiente prendere $f = g$.

e) $\Rightarrow$ *a)* Sia $f \in H$ tale che, per ogni k, $\langle f|e_k\rangle = 0$. Allora

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle f|e_k\rangle|^2 = 0\,,$$

per cui $f = 0$. ■

Esempi. 1) Per quanto riguarda lo spazio di Hilbert $\mathbb{K}^N$, possiamo facilmente verificare che una base è data dai vettori

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,...,0)\,, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0,...,0)\,, \quad \dots \quad , \quad \mathbf{e}_N = (0,0,0,...,1)\,.$$

In questo spazio, tutte le basi hanno lo stesso numero di elementi, cioè N, e questo numero viene chiamato **dimensione** dello spazio. Ogni elemento $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ in $\mathbb{K}^N$ si può scrivere come

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{N} \langle \boldsymbol{\alpha} | \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathbf{e}_k\,,$$

che risulta pertanto l'analoga della serie di Fourier.

2) Nello spazio di Hilbert $\ell^2(\mathbb{K})$, una base è costituita dalle seguenti successioni:

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0,...)\,, \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0,...)\,, \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1,0,...)\,, \quad \dots$$

Per ogni $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_k)_{k\geq 1} \in \ell^2(\mathbb{K})$, la serie di Fourier si può scrivere come

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \boldsymbol{\alpha} | \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{e}_k\,.$$

3) In $L^2([a,b],\mathbb{K})$, si è definito il prodotto scalare

$$\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t)^* \, dt\,.$$

Consideriamo separatamente i casi in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, una base è data da $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, dove $e_k : [a,b] \to \mathbb{K}$ è la funzione così definita:

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \exp\left(\frac{2\pi k i}{b-a}\, t\right)\,,$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$. La serie di Fourier di una funzione $f \in L^2([a,b],\mathbb{C})$ si scrive come

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e_k\,,$$

dove

$$\hat{f}_k = \langle f | e_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \int_a^b f(t) \exp\left(-\frac{2\pi k i}{b-a}\, t\right) dt\,.$$

Si noti che la serie va intesa nell'ambito della metrica introdotta su $L^2([a,b],\mathbb{C})$: si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e_k \right\| = 0\,,$$

ossia

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_k e_k(t) \right|^2 dt = 0\,.$$

Si usa anche scrivere

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e_k(t)\,.$$

Ponendo, per $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{b-a}}\,\hat{f}_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\exp\left(-\frac{2\pi k i}{b-a}\,t\right) dt\,,$$

scriveremo quindi

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\left(\frac{2\pi k i}{b-a}\,t\right)\,. \tag{1}$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, una base è data da

$$\begin{aligned}
1\,,\ &\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\left(\frac{2\pi}{b-a}t\right)\,,\ \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\left(\frac{2\pi}{b-a}t\right)\,,\\
&\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\left(2\frac{2\pi}{b-a}t\right)\,,\ \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\left(2\frac{2\pi}{b-a}t\right)\,,\\
&\sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\left(3\frac{2\pi}{b-a}t\right)\,,\ \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\left(3\frac{2\pi}{b-a}t\right)\,,\ \dots
\end{aligned}$$

La serie di Fourier di una funzione $f \in L^2([a,b],\mathbb{R})$ si scrive quindi come

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{b-a}t\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{b-a}t\right)\right)\,, \tag{2}$$

dove, per $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{b-a}t\right)dt\,,\quad b_k = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\sin\left(\frac{2\pi k}{b-a}t\right)dt\,.$$

Si noti che, se la stessa funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ viene considerata come una funzione a valori in $\mathbb{C}$, avremo che $f \in L^2([a,b],\mathbb{C})$ e potremo scriverne la serie di Fourier, ottenendo la (1). Le relazioni tra i coefficienti di (1) e di (2) sono le seguenti:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}) & \text{se } k < 0,\\[2ex] \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & \text{se } k \geq 0. \end{cases}$$

Nel seguito, per una funzione $f \in L^2([a,b],\mathbb{R})$, useremo indifferentemente l'una o l'altra delle due scritture per la sua serie di Fourier.

La questione se in (1) e in (2) valga o meno l'uguaglianza puntuale è ben più complessa e ha impegnato molti dei migliori matematici dal momento in cui fu enunciata, da Fourier, nel 1807. Per una funzione f in $L^2([a,b],\mathbb{K})$, Carleson ha dimostrato (nel 1966) che essa vale per quasi ogni t, ossia al di fuori di un insieme trascurabile. Un esempio di Du Bois-Reymond mostra che la serie potrebbe non convergere in alcuni punti anche se f è continua, mentre è noto dai lavori di Dirichlet che l'uguaglianza vale sempre se f è di classe $\mathcal{C}^1$. D'altra parte, se si suppone solamente che f sia integrabile secondo Lebesgue su $[a,b]$, un esempio di Kolmogorov ha mostrato che la serie può non convergere per ogni t.

1.8 Applicazioni lineari

Dati due spazi di Hilbert H e H', diremo che un'applicazione $A : H \to H'$ è **lineare** se, presi $f, g \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, si ha che $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$. Scriveremo spesso Af al posto di $A(f)$.

Teorema 1.17 *Due spazi di Hilbert H, H' separabili aventi dimensione infinita sono sempre isomorfi: esiste cioè un'applicazione lineare biiettiva $A : H \to H'$ tale che, presi $f, g \in H$, si ha*

$$\langle Af|Ag\rangle = \langle f|g\rangle \, .$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia $(e_k)_k$ una base di H e $(e'_k)_k$ una base di H'. Preso $f \in H$, ricordando la serie di Fourier

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f|e_k\rangle e_k \, ,$$

definiamo

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f|e_k\rangle e'_k \, .$$

Tale serie converge per il teorema di Pitagora perchè, per l'identità di Parseval, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f|e_k\rangle|^2$ converge. Essa è precisamente la serie di Fourier di Af. Si vede facilmente che $A : H \to H$ è lineare.

Vediamo che A è iniettiva: se fosse $Af = 0$, allora sarebbe $\langle f|e_k\rangle = 0$ per ogni k, per cui dovrebbe essere $f = 0$.

Vediamo che è suriettiva: dato $h \in H$, scriviamo la sua serie di Fourier

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h|e_k\rangle e'_k \, ,$$

e poniamo

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle h|e_k\rangle e_k \, ;$$

si vede allora che $Af = h$.

Infine, si ha:

$$\langle Af|Ag\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle f|e_k\rangle\langle g|e_k\rangle^* = \langle f|g\rangle\,.$$

■

Diremo che l'applicazione lineare $A : H \to H'$ è **limitata** se esiste un numero reale $\gamma \geq 0$ tale che, per ogni $f \in H$,

$$\|Af\| \leq \gamma\|f\|\,.$$

In tal caso, definiamo

$$\|A\| = \sup_{f\neq 0}\frac{\|Af\|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1}\|Af\|\,.$$

Si verificano le proprietà della norma:

a) $\|A\| \geq 0\,;$
b) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0\,;$
c) $\|\alpha A\| = |\alpha|\;\|A\|\,;$
d) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|\,.$

Inoltre, se $A : H \to H'$ e $B : H' \to H''$, possiamo considerare l'applicazione composta $B \circ A : H \to H''$, che indicheremo semplicemente con BA. Se entrambe sono limitate, si ha

$$\|BA\| \leq \|B\|\,\|A\|\,.$$

Teorema 1.18 *Un'applicazione lineare è limitata se e solo se è continua.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $A : H \to H'$ limitata. Allora

$$\|Af - Ag\| = \|A(f-g)\| \leq \|A\|\,\|f-g\|\,;$$

quindi A è lipschitziana e pertanto continua.

Viceversa, sia $A : H \to H'$ non limitata. Allora per ogni numero naturale n esiste un $f_n \in H$ tale che $\|Af_n\| > n\|f_n\|$. Posto $g_n = \frac{f_n}{n\|f_n\|}$, si ha che $\lim_n g_n = 0$ e

$$\|Ag_n\| = \left\|A\left(\frac{f_n}{n\|f_n\|}\right)\right\| = \frac{\|Af_n\|}{n\|f_n\|} \geq 1\,;$$

essendo $A(0) = 0$, l'applicazione A non può essere continua. ■

Indicheremo con $\mathcal{L}(H,H')$ l'insieme delle applicazioni lineari continue da H a H'. Possiamo renderlo uno spazio metrico introducendo la distanza

$$d(A,B) = \|A - B\|\,.$$

Teorema 1.19 *Con tale distanza, $\mathcal{L}(H,H')$ è uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia $(A_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathcal{L}(H,H')$. Dalla

$$| \, \|A_n\| - \|A_m\| \, | \leq \|A_n - A_m\| \, ,$$

si ha che la successione delle norme $(\|A_n\|)_n$ è di Cauchy in $\mathbb{K}$ e pertanto converge. Dalla

$$\|A_n f - A_m f\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|f\| \, ,$$

si ha che, per ogni $f \in H$, la successione $(A_n f)_n$ è di Cauchy in H' e pertanto converge. Definiamo $A : H \to H'$ ponendo

$$Af = \lim_n A_n f \, .$$

Si vede facilmente che A è lineare; inoltre,

$$\|Af\| = \lim_n \|A_n f\| \leq (\lim_n \|A_n\|) \, \|f\| \, ,$$

per cui $A \in \mathcal{L}(H,H')$. Resta da verificare che

$$\lim_n A_n = A \, .$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo $(A_n)_n$ di Cauchy, esiste un $\bar{n}$ tale che, se $m \geq \bar{n}$ e $n \geq \bar{n}$, allora

$$\|A_n - A_m\| \leq \varepsilon \, ,$$

da cui

$$\|A_n f - A_m f\| \leq \varepsilon \|f\| \, ,$$

per ogni $f \in H$. Passando al limite per $m \to +\infty$ si ha che, se $n \geq \bar{n}$, allora

$$\|A_n f - Af\| \leq \varepsilon \|f\| \, ,$$

per ogni $f \in H$, e quindi

$$\|A_n - A\| \leq \varepsilon \, .$$

■

Se $H = H'$, scriveremo $\mathcal{L}(H)$ invece di $\mathcal{L}(H,H')$.

Teorema 1.20 *Se $\mathcal{M}$ è un sottospazio, si ha $P_{\mathcal{M}} \in \mathcal{L}(H)$. Se inoltre $\mathcal{M} \neq \{0\}$, si ha $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$.*

Dimostrazione. Presi $f, g \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$, si può scrivere in un unico modo $f = f_1 + f_2$ e $g = g_1 + g_2$, con $f_1, g_1 \in \mathcal{M}$ e $f_2, g_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$, dove $f_1 = P_{\mathcal{M}} f$ e $g_1 = P_{\mathcal{M}} g$. Quindi

$$\alpha f + \beta g = \alpha(f_1 + f_2) + \beta(g_1 + g_2) = (\alpha f_1 + \beta g_1) + (\alpha f_2 + \beta g_2) \, ,$$

con $\alpha f_1 + \beta g_1 \in \mathcal{M}$ e $\alpha f_2 + \beta g_2 \in \mathcal{M}^{\perp}$. Per l'unicità della scomposizione, si deve avere

$$P_{\mathcal{M}}(\alpha f + \beta g) = \alpha f_1 + \beta g_1 = \alpha P_{\mathcal{M}} f + \beta P_{\mathcal{M}} g \, .$$

Questo dimostra la linearità di $P_{\mathcal{M}}$. Per il Teorema di Pitagora, abbiamo inoltre
$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 \geq \|f_1\|^2 = \|P_{\mathcal{M}} f\|^2 \,,$$
da cui la limitatezza di $P_{\mathcal{M}}$: per ogni $f \in H$, si ha $\|P_{\mathcal{M}} f\| \leq \|f\|$, per cui $\|P_{\mathcal{M}}\| \leq 1$. Infine, se $\mathcal{M} \neq \{0\}$, prendendo $f \in \mathcal{M} \backslash \{0\}$ si ha $\|P_{\mathcal{M}} f\| = \|f\|$. Ne segue che $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$. ∎

Sia ora $g \in H$ fissato e $G : H \to \mathbb{K}$ definito da $G(f) = \langle f | g \rangle$. Si vede facilmente che $G \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$ e $\|G\| = \|g\|$. Vediamo che vale anche il viceversa.

Teorema 1.21 (di Riesz) *Data $G \in \mathcal{L}(H, \mathbb{K})$, esiste un unico $g \in H$ tale che*
$$G(f) = \langle f | g \rangle \,,$$
per ogni $f \in H$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M} = \{f \in H : G(f) = 0\}$. Si verifica facilmente che $\mathcal{M}$ è un sottospazio di H. Se $\mathcal{M} = H$, basta prendere $g = 0$; altrimenti, scegliamo un $w \in \mathcal{M}^{\perp}$ con $\|w\| = 1$ e poniamo $g = G(w)^* w$. Allora $G(g) = |G(w)|^2 = \|g\|^2$ e per ogni $f \in H$ si ha che $f - \frac{G(f)}{G(g)} g \in \mathcal{M}$. Quindi,
$$\langle f | g \rangle = \left\langle \left(f - \frac{G(f)}{G(g)} g \right) + \frac{G(f)}{G(g)} g \middle| g \right\rangle = \frac{G(f)}{G(g)} \|g\|^2 = G(f).$$
Verifichiamo ora che tale g è unico. Se ce ne fossero due, g_1 e g_2, per ogni $f \in H$ si avrebbe che $\langle f | g_1 \rangle = \langle f | g_2 \rangle$ e quindi $\langle f | g_1 - g_2 \rangle = 0$. Prendendo $f = g_1 - g_2$ si vede che deve essere $g_1 = g_2$. ∎