Analisi Matematica 2

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica, a.a. 2017/2018

1 Serie di Fourier

Consideriamo i "polinomi trigonometrici" di un periodo fissato $T > 0$. Essi sono del tipo

$$f_n(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right) ,$$

dove c_0, a_k e b_k sono dei numeri reali. Ci interessa il problema dell'eventuale convergenza di questo tipo di successioni di funzioni al tendere n all'infinito.

Teorema. *Se esiste una funzione* $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ *per cui*

$$\lim_n f_n(t) = f(t) , \qquad \textit{uniformemente su } [0, T] ,$$

allora i coefficienti c_0*,* a_k *e* b_k *sono necessariamente i seguenti:*

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt ,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt , \quad \text{e} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt .$$

<u>Dimostrazione</u>. Usando la convergenza uniforme, abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)\, dt &= \int_0^T \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right)\right) dt \\ &= c_0 T + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right) dt = c_0 T ,\end{aligned}$$

da cui la formula per c_0. Analogamente, per un intero $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}&\int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt = \\ &= \int_0^T \left(c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right)\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right) \cos\left(\frac{2\pi j}{T} t\right) dt .\end{aligned}$$

D'altra parte, usando per due volte la formula di integrazione per parti, si può verificare che, se $k \neq j$,

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\,dt = 0\,, \quad \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\,dt = 0\,,$$

mentre, se $k = j$,

$$\int_0^T \sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\,dt = 0\,, \quad \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\,dt = \frac{T}{2}\,.$$

Quindi,

$$\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\,dt = \frac{T}{2}\,a_j\,,$$

da cui la formula per a_j. Analogamente si vede che

$$\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi j}{T}t\right)\,dt = \frac{T}{2}\,b_j\,,$$

da cui la formula per b_j. ■

Data una qualsiasi funzione continua $f : [0,T] \to \mathbb{R}$, si definiscono, per $k \in \mathbb{N}$, i "coefficienti di Fourier"

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\,dt\,, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\,dt\,,$$

e la relativa "serie di Fourier"

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right)\,.$$

Si pone immediatamente il problema della convergenza di tale serie. Purtroppo, anche se f è defnita su tutto $\mathbb{R}$ ed è T-periodica, la sua continuità non è sufficiente a garantirla. Come dimostrato da Du Bois-Raymond, ci sono delle funzioni continue e T-periodiche la cui serie di Fourier non converge per alcuni $t \in [0,T]$. In altri termini, se consideriamo le funzioni

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right)\,,$$

potrebbe essere che, per alcuni $t \in [0,T]$, la successione $(f_n(t))_n$ non abbia limite finito.

Consideriamo allora le "medie di Cesaro"

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1}\left[f_0(t) + f_1(t) + \ldots + f_n(t)\right]\,.$$

Si potrebbe sperare che, pur non essendoci il limite di $(f_n(t))_n$, esista almeno il limite della successione $(\sigma_n(t))_n$. È quanto afferma il teorema seguente.

Teorema (di Fejer). *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e T-periodica, allora*

$$\lim_n \sigma_n(t) = f(t)\,,$$

uniformemente in $t \in \mathbb{R}$.

Per semplificare le notazioni, introduciamo i seguenti coefficienti (complessi) di Fourier: per $k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T} t}\, dt\,.$$

Ponendo $b_0 = 0$, si vede allora che

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-k} + i b_{-k}) & \text{se } k < 0, \\ \\ \frac{1}{2}(a_k - i b_k) & \text{se } k \geq 0, \end{cases}$$

per cui

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T} t}$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_n(t) = \frac{1}{n+1} \Big[& c_0 e^0 + (c_{-1} e^{-i\frac{2\pi}{T} t} + c_0 e^0 + c_1 e^{i\frac{2\pi}{T} t}) + \ldots + \\ & + (c_{-n} e^{-i\frac{2\pi n}{T} t} + \ldots + c_{-1} e^{-i\frac{2\pi}{T} t} + c_0 e^0 + c_1 e^{i\frac{2\pi}{T} t} + \ldots + c_n e^{i\frac{2\pi n}{T} t}) \Big] \\ = \frac{1}{n+1} \Big[& (n+1) c_0 e^0 + n(c_{-1} e^{-i\frac{2\pi}{T} t} + c_1 e^{i\frac{2\pi}{T} t}) + \ldots + 1(c_{-n} e^{-i\frac{2\pi n}{T} t} + c_n e^{i\frac{2\pi n}{T} t}) \Big] \\ = \frac{1}{n+1} & \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|) c_k e^{i\frac{2\pi k}{T} t}\,.\end{aligned}$$

Dimostrazione del Teorema di Fejer. Per semplicità, considereremo il caso $T = 2\pi$. Questa ipotesi non sarà comunque restrittiva, potendocisi sempre ricondurre con un cambiamento di variabile. Abbiamo quindi

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt\,, \quad f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}\,,$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|) c_k e^{ikt} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-iks}\, ds \right) e^{ikt} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) K_n(t-s)\, ds\,,\end{aligned}$$

avendo posto

$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1} e^{ikx}\,.$$

Notiamo che, se $x = 0$ (o un multiplo intero di 2π),

$$\begin{aligned} K_n(0) &= \frac{1+2+\ldots+n+(n+1)+n+\ldots+2+1}{n+1} \\ &= \frac{n(n+1)+(n+1)}{n+1} = n+1\,, \end{aligned}$$

mentre, se x non è un multiplo intero di 2π,

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n+1}\big[e^{-inx} + 2e^{-i(n-1)x} + \ldots + ne^{-ix} + (n+1)e^0 + \\ &\qquad + ne^{ix} + \ldots + 2e^{i(n-1)x} + e^{inx}\big] \\ &= \frac{1}{n+1}\big[e^{-inx}(1 + 2e^{ix} + \ldots + ne^{i(n-1)x}) + (n+1)e^0 + \\ &\qquad + e^{inx}(1 + 2e^{-ix} + \ldots + ne^{-i(n-1)x})\big]\ . \end{aligned}$$

Essendo, per $\alpha \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k\alpha^{k-1} = \frac{1-(n+1)\alpha^n + n\alpha^{n+1}}{(1-\alpha)^2}$$

(lo si può dimostrare per induzione), ponendo alternativamente $\alpha = e^{ix}$ oppure $\alpha = e^{-ix}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n+1}\left(e^{-inx}\,\frac{1-(n+1)e^{inx}+ne^{i(n+1)x}}{(1-e^{ix})^2} + (n+1)e^0 + \right. \\ &\qquad \left. + e^{inx}\,\frac{1-(n+1)e^{-inx}+ne^{-i(n+1)x}}{(1-e^{-ix})^2}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\frac{e^{-inx}-2e^{ix}+e^{i(n+2)x}}{(1-e^{ix})^2} = \frac{e^{-inx}}{n+1}\left(\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{e^{-\frac{i(n+1)x}{2}} - e^{\frac{i(n+1)x}{2}}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{\frac{ix}{2}}}\right)^2 = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2\ . \end{aligned}$$

Osserviamo che $K_n(x) \geq 0$ per ogni x. Inoltre, fissato un $\delta \in]0, 2\pi[$, abbiamo che, se $x \in]\delta, 2\pi - \delta[$,

$$K_n(x) \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right)^2\,,$$

per cui $K_n(x)$ tende a 0 uniformemente in $]\delta, 2\pi - \delta[$. Osserviamo inoltre che

$$\int_0^{2\pi} K_n(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} \frac{n+1-|k|}{n+1}\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = 2\pi\,,$$

indipendentemente da n. Ritornando a $\sigma_n(t)$, si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_n(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)K_n(t-s)\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_t^{t+2\pi} f(t-x)K_n(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-x)K_n(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Dimostriamo che $\sigma_n(t)$ converge a $f(t)$ uniformemente. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo f continua e T-periodica, esiste un $M > 0$ tale che

$$|f(t)| \leq M\,, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}\,,$$

e f è uniformemente continua, per cui esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|t - t'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Inoltre, esiste un $\bar{n}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \forall x \in [\delta, 2\pi - \delta], \quad |K_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4M}\,,$$

e quindi:

$$\begin{aligned}&|\sigma_n(t) - f(t)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-x)K_n(x)\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)K_n(x)\,dx\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(f(t-x) - f(t))K_n(x)\,dx\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\delta}\ldots\,dx + \int_\delta^{2\pi-\delta}\ldots\,dx + \int_{2\pi-\delta}^{2\pi}\ldots\,dx\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\varepsilon}{4}\int_0^{\delta}K_n(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{4M}\int_\delta^{2\pi-\delta}(|f(t-x)| + |f(t)|)\,dx + \frac{\varepsilon}{4}\int_\delta^{2\pi-\delta}K_n(x)\,dx\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4M}2M + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

La dimostrazione è così completa. ■

Ne seguono alcuni corollari.

Corollario 1. *Siano $f, \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e T-periodiche. Se per i rispettivi coefficienti di Fourier c_k e $\tilde{c}_k$ si ha che $c_k = \tilde{c}_k$ per ogni k, allora f e $\tilde{f}$ coincidono.*

Dimostrazione. Con le ovvie notazioni, avremo che $\sigma_n(t) = \tilde{\sigma}_n(t)$, per ogni n, per cui

$$f(t) - \tilde{f}(t) = \lim_{n\to\infty}(\sigma_n(t) - \tilde{\sigma}_n(t)) = 0\,,$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. ■

Ci interessiamo ora alla convergenza delle funzioni f_n. Useremo la notazione

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \right) .$$

Corollario 2. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e T-periodica e la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ converge, allora*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \,,$$

uniformemente in $t \in \mathbb{R}$.

Scriveremo quindi:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right)\right) \;;$$

oppure

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2\pi k}{T} t} \,.$$

Dimostrazione. Essendo

$$\left| c_k e^{i\frac{2\pi k}{T} t} \right| = |c_k| \,,$$

siccome la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$ converge, per il criterio di Weierstrass si ha che le f_n convergono uniformemente ad una certa funzione continua $\tilde{f}$. D'altra parte, per tale funzione si ha:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_k &= \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{f}(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T} t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right) e^{-i\frac{2\pi k}{T} t}\, dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f_n(t) e^{-i\frac{2\pi k}{T} t}\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{i\frac{2\pi j}{T} t} e^{-i\frac{2\pi k}{T} t}\, dt \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{T}\int_0^T c_j e^{i\frac{2\pi(j-k)}{T} t}\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T c_k\, dt = c_k \,,
\end{aligned}$$

per ogni k. Il Corollario 1 ci dice allora che f e $\tilde{f}$ coincidono, per cui la dimostrazione è completa. ■

Corollario 3. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe C^2 ed è T-periodica, allora*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) \,,$$

uniformemente in $t \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Integrando per parti due volte,

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\left(\left[f(t)\frac{T}{-i2\pi k}e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\right]_0^T + \frac{T}{i2\pi k}\int_0^T f'(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt\right) \\
&= \frac{1}{i2\pi k}\int_0^T f'(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt \\
&= \frac{1}{i2\pi k}\left(\left[f'(t)\frac{T}{-i2\pi k}e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\right]_0^T + \frac{T}{i2\pi k}\int_0^T f''(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt\right) \\
&= \frac{T}{(i2\pi k)^2}\int_0^T f''(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt\,.
\end{aligned}
$$

Essendo f'' continua, esiste un $M > 0$ per cui

$$|f''(t)| \le M\,, \quad \text{per ogni } t \in [0,T]\,.$$

Quindi,

$$|c_k| = \frac{T}{(2\pi k)^2}\left|\int_0^T f''(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}\,dt\right| \le \frac{T}{(2\pi k)^2}\int_0^T |f''(t)e^{-i\frac{2\pi k}{T}t}|\,dt \le \frac{T^2M}{(2\pi k)^2}\,,$$

per cui la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|$ converge, e il risultato segue dal Corollario 2. ■

Nota. I risultati sopra dimostrati si estendono senza difficoltà alle funzioni a valori complessi anziché reali. Si veda ad esempio il libro di T.W. Körner, "Fourier Analysis".

Concludiamo con il seguente enunciato. Qui f potrebbe non essere continua.

Teorema (di Dirichlet). *Supponiamo che esistano un numero finito di punti* $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$, *con*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T\,,$$

per cui f *risulti di classe* C^1 *su ogni intervallo* $]t_{j-1}, t_j[$, *con* $j = 1, 2, \dots, N$. *Nei punti* t_j *la funzione* f *potrebbe non essere continua, oppure, pur essendo continua, potrebbe non essere derivabile. Supponiamo comunque che, per ogni* $t \in \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$, *esistano e siano finiti i seguenti limiti:*

$$\lim_{s\to t^-} f(s)\,, \quad \lim_{s\to t^+} f(s)\,, \quad \lim_{s\to t^-} f'(s)\,, \quad \lim_{s\to t^+} f'(s)\,.$$

Allora la serie di Fourier associata a f *converge per ogni* $t \in \mathbb{R}$, *e si ha*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k\sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right)\right) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{s\to t^-} f(s) + \lim_{s\to t^+} f(s)\Big)\,.$$

Si noti che, se f è continua in un certo t, allora

$$\frac{1}{2}\Big(\lim_{s\to t^-} f(s) + \lim_{s\to t^+} f(s)\Big) = f(t)\,.$$

Per la dimostrazione di questo teorema, si può consultare, ad esempio, il libro di E. Giusti "Analisi matematica", volume 2.

Vediamo un esempio di applicazione del teorema prececente. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita da

$$f(t) = t^2\,, \qquad \text{se } \ t \in [-\pi, \pi]\,.$$

Si osserva che tale funzione è continua e soddisfa le ipotesi del teorema di Dirichlet. Calcoliamo

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Integrando per parti,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(kt)\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[t^2\,\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2t\,\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right) = -\frac{2}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} t\,\sin(kt)\,dt = \\ &= -\frac{2}{\pi k}\left(\left[-t\,\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(kt)}{k}\,dt\right) = \frac{4\,(-1)^k}{k^2}\,. \end{aligned}$$

Inoltre,

$$b_k = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\sin(kt)\,dt = 0\,,$$

essendo $t \mapsto t^2\sin(kt)$ una funzione dispari. Possiamo allora affermare che

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\,(-1)^k}{k^2}\cos(kt)\,, \qquad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}\,.$$

Due casi particolari interessanti: se $t = \pi$, otteniamo la formula

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}\,,$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Se $t = 0$, otteniamo la formula

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\,(-1)^k}{k^2}\,,$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,.$$