PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1
anno accademico 2006/2007 CdL FISICA
APPELLO DEL 15.01.2007

1. Dimostrare che vale la seguente formula:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}\ .$$

2. Studiare la funzione

$$f(x)=\int_{x^2}^{x^3}|t|\,dt\,.$$

3. Sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=1\,.$$

Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\int_{-3}^{x}g(t)\,dt=\frac{1}{2}\ .$$

4. Sia $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(y-x^2)}{y-x^2} & \text{se } y\neq x^2\,,\\[2ex] 1 & \text{se } y=x^2\,.\end{cases}$$

Stabilire se h è continua e se è differenziabile.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1
anno accademico 2006/2007 CdL FISICA
APPELLO DEL 05.02.2007

1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - \cos(x)) = \frac{1}{2}\,.$$

Dimostrare che $f(x)$ si annulla infinite volte.

2. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_{-2}^{x} \left(\int_{-1}^{t} (1 + s^3)\, ds \right) dt\,.$$

3. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right)\,, \quad \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \right)\,.$$

4. Trovare, se esistono, i punti di massimo e di minimo, sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}\,,$$

della funzione

$$f(x, y) = xy^2\,.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1
anno accademico 2006/2007 CdL FISICA
APPELLO DEL 11.06.2007

1. Studiare la funzione

$$f(x) = \int_{-|x|}^{|x|} \Big| |t| - 1 \Big| \, dt \, .$$

2. Stabilire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(\sqrt{3},1)} \frac{y-1}{x^2 - 2y^2 - 1} \, .$$

3. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 nel punto $(\frac{\pi}{2}, 1)$ associato alla funzione

$$g(x, y) = y \sin(xy) \, .$$

4. Sia $h :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che, per ogni $\delta > 0$, si abbia

$$\inf\{h(x) : x \in]0, \delta[\,\} < 0 < \sup\{h(x) : x \in]0, \delta[\,\} \, .$$

Dimostrare che la derivata di h si annulla infinite volte.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1
anno accademico 2006/2007 CdL FISICA
APPELLO DEL 28.06.2007

1. Si dimostri la seguente formula, valida per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(2n+3)(2n+5)} \,.$$

2. Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \alpha x^2 + (x^3 + 3x)\arctan(x) - \ln(1 + x^2)$$

risulti convessa.

3. Studiare la funzione

$$g(x) = \int_{-|x|}^{|x|} t^5 \sin(t^2)\, dt \,.$$

4. Stabilire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y \arctan(x^4)}{y^2 + \sin(x^8)} \,.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1
anno accademico 2006/2007 CdL FISICA
APPELLO DEL 03.09.2007

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado $N \geq 1$. Considerata la funzione

$$f(x) = e^{p(x)} ,$$

si dimostri (per induzione) che essa è derivabile infinite volte e che la sua derivata $n-$esima si può esprimere con la formula

$$f^{(n)}(x) = q_n(x) e^{p(x)} ,$$

dove $q_n(x)$ è un polinomio di grado $n(N-1)$.

2. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \int_0^{x^2} (e^{t^2} - 1)\, dt .$$

Dimostrare che tale funzione è convessa.

3. Dire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} \frac{x^2 + x - y}{x^2 - y^2 - 1} .$$

4. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3, nel punto (0,0), associato alla funzione

$$h(x, y) = e^{x^2+y^2} .$$