

Il grado topologico e il problema periodico

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. Alessandro Fonda

Università di Trieste, a.a. 2014/2015

1 Il grado di Brouwer

Andiamo subito al dunque.

Teorema di esistenza e unicità del grado. *Esiste ed è unica una funzione d che associa ad ogni aperto limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e ad ogni funzione continua $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$ un numero reale*

$$d(f, \Omega),$$

con le seguenti tre proprietà:

- *A1 (normalizzazione).* Se $0 \in \Omega$, allora $d(I, \Omega) = 1$; ¹
- *A2 (additività).* Se Ω_1 e Ω_2 sono due sottoinsiemi aperti disgiunti di Ω tali che $0 \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2)$;
- *A3 (invarianza per omotopia).* Se $F : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione continua tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$, allora $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$ ² è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.

Il numero $d(f, \Omega)$ si chiama **grado topologico** (o semplicemente **grado**) di f relativo all'insieme Ω . Prima di mostrare la costruzione del grado, ne assumeremo l'esistenza e ne trarremo alcune conseguenze dirette, dalle quali deriverà l'unicità del grado stesso.

Come nell'enunciato del teorema, sarà essenziale supporre che:

- ▷ Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^N ,
- ▷ $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione continua,
- ▷ $0 \notin f(\partial\Omega)$.

Osserviamo che, prendendo $\Omega_1 = \Omega$ e $\Omega_2 = \emptyset$, da A2 segue che

$$d(f, \emptyset) = 0.$$

Inoltre, sempre da A2, con $\Omega_2 = \emptyset$, segue la proprietà

¹ I sta a indicare la funzione identità.

² $F(\cdot, \lambda) : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è la funzione definita da $x \mapsto F(x, \lambda)$, per ogni $\lambda \in [0, 1]$.

• *P1 (excisione).* Se Ω_1 è un sottoinsieme aperto di Ω tale che $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1)$.

In particolare, prendendo $\Omega_1 = \emptyset$, si ha

• *P2.* Se $0 \notin f(\overline{\Omega})$, allora $d(f, \Omega) = 0$.

Equivalentemente, tenendo presente che $0 \notin f(\partial\Omega)$,

• *P2' (esistenza).* Se $d(f, \Omega) \neq 0$, allora esiste un $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$.

Come conseguenza di A3, abbiamo la proprietà

• *P3 (di Rouché).* Se $\max_{\partial\Omega} \|f - g\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$, allora $d(f, \Omega) = d(g, \Omega)$.

In effetti, basta considerare la funzione continua $F(x, \lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x)$ e osservare che, se $x \in \partial\Omega$ e $\lambda \in [0, 1]$, allora ³

$$\|F(x, \lambda)\| = \|f(x) - \lambda(f(x) - g(x))\| \geq \|f(x)\| - \lambda\|f(x) - g(x)\| > 0.$$

Quindi, $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$ e, per A3,

$$d(f, \Omega) = d(F(\cdot, 0), \Omega) = d(F(\cdot, 1), \Omega) = d(g, \Omega).$$

In particolare, si ha

• *P4.* Se $f = g$ su $\partial\Omega$, allora $d(f, \Omega) = d(g, \Omega)$.

[Come esempio di applicazione del grado topologico, dimostriamo il seguente]

Teorema di Brouwer. Sia $f : \overline{B}_R \rightarrow \overline{B}_R$ ⁴ una funzione continua. Allora f ha un punto fisso: esiste un $x \in \overline{B}_R$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione. Supponiamo che f non abbia punti fissi su ∂B_B (in caso contrario non c'è nulla da dimostrare). Consideriamo la funzione continua $F(x, \lambda) = x - f(x) + \lambda f(x)$ e osserviamo che, se $x \in \partial B_R$ e $\lambda \in]0, 1]$, allora

$$\|F(x, \lambda)\| \geq \|x\| - (1 - \lambda)\|f(x)\| \geq R - (1 - \lambda)R > 0,$$

mentre, se $\lambda = 0$, si ha $F(x, 0) \neq 0$, per ogni $x \in \partial B_R$. Quindi, $0 \notin F(\partial B_R \times [0, 1])$ e, per A3 e A1,

$$d(I - f, B_R) = d(F(\cdot, 0), B_R) = d(F(\cdot, 1), B_R) = d(I, B_R) = 1.$$

Per P2', esiste un $x \in B_R$ tale che $(I - f)(x) = 0$, ossia $f(x) = x$. ■

Osservazione. Il teorema di Brouwer si estende facilmente al caso in cui la palla \overline{B}_R sia sostituita con un insieme ad essa omeomorfo. In effetti, sia V un tale insieme, $f : V \rightarrow V$ continua e $h : \overline{B}_R \rightarrow V$ un omeomorfismo. Applicando il teorema alla funzione $g = h^{-1} \circ f \circ h : \overline{B}_R \rightarrow \overline{B}_R$, si trova un $x \in \overline{B}_R$ tale che $g(x) = x$. Ponendo $y = h(x)$, si ha che $f(y) = y$.]

³Qui e nel seguito, $\|\cdot\|$ indica la norma euclidea in \mathbb{R}^N .

⁴ B_R è la palla aperta centrata in 0 di raggio $R > 0$: $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| < R\}$. Pertanto, $\overline{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| \leq R\}$ e $\partial B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \|x\| = R\}$.

Vediamo ora il caso di una funzione lineare $f = \mathcal{A} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$. Si noti che, se $\ker \mathcal{A} \neq \{0\}$ e $\ker \mathcal{A} \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$, allora anche $\ker \mathcal{A} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, per cui il grado $d(\mathcal{A}, \Omega)$ risulta non definito. Se invece $\ker \mathcal{A} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, per $P2$ si ha $d(\mathcal{A}, \Omega) = 0$.

• $P5$. Sia $\mathcal{A} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ lineare e invertibile. Se $0 \in \Omega$, allora

$$d(\mathcal{A}, \Omega) = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A}).$$

Dimostrazione. Se un'applicazione lineare si annulla solo in 0, la proprietà $P1$ ci assicura che il suo grado topologico è lo stesso per tutti gli aperti che contengono 0. Per semplicità, prendiamo $\Omega = B_R$, con $R > 0$ qualsiasi. Supporremo noto il seguente

Lemma. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ gli (eventuali) autovalori reali negativi di \mathcal{A} . Allora $\mathbb{R}^N = \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}$, dove \mathcal{N} e \mathcal{M} sono sottospazi tali che:

- (i) $\mathcal{A}(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ e $\mathcal{A}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$;
- (ii) $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sono i soli autovalori di $\mathcal{A}|_{\mathcal{N}}$;
- (iii) $\mathcal{A}|_{\mathcal{M}}$ non ha autovalori reali negativi.

Essendo \mathcal{A} una applicazione lineare reale, gli autovalori complessi appaiono a coppie del tipo λ, λ^* , per cui si avrà

$$\operatorname{sgn}(\det \mathcal{A}) = (-1)^m,$$

con $m = \dim \mathcal{N} = \sum_{k=1}^p m_k$, dove m_1, \dots, m_p sono le molteplicità degli autovalori negativi $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

Se $m = 0$, ossia se \mathcal{A} non ha autovalori reali negativi, consideriamo la funzione continua $F(x, \lambda) = (1 - \lambda)\mathcal{A}x + \lambda x$.⁵ Siccome gli autovalori delle applicazioni lineari $(1 - \lambda)\mathcal{A} + \lambda I$, con $\lambda \in [0, 1]$, stanno sui segmenti nel piano complesso che congiungono gli autovalori di \mathcal{A} con il punto 1, essi non possono essere nulli, per alcun $\lambda \in [0, 1]$, e da $A3$ e $A1$ segue che

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(I, B_R) = 1 = \operatorname{sgn}(\det \mathcal{A}).$$

Supponiamo ora $m \geq 1$. Siano $\mathcal{P} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{N}$ e $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{M}$ le due proiezioni associate alla decomposizione $\mathbb{R}^N = \mathcal{N} \oplus \mathcal{M}$. Consideriamo la funzione continua $F(x, \lambda) = (1 - \lambda)\mathcal{A}x + \lambda(-\mathcal{P} + \mathcal{Q})x$, e vediamo quando si annulla. Se $\lambda = 0$, essendo \mathcal{A} invertibile, deve essere $x = 0$. Se $\lambda = 1$, deve essere $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Infine, se $\lambda \in]0, 1[$, per (i) abbiamo

$$F(x, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}\mathcal{P}x = \frac{\lambda}{1 - \lambda}\mathcal{P}x \quad \text{e} \quad \mathcal{A}\mathcal{Q}x = -\frac{\lambda}{1 - \lambda}\mathcal{Q}x,$$

⁵Le omotopie in questa dimostrazione, per mancanza di fantasia, si denoteranno tutte con $F(x, \lambda)$ o con $G(x, \lambda)$.

e per (ii) e (iii) deve essere ancora $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Per A3,

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(-\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R).$$

Considereremo ora separatamente i casi in cui m sia pari o dispari.

Supponiamo m pari. Sia $\mathcal{B} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ un'applicazione lineare che non abbia autovalori reali: ad esempio, possiamo prenderla in modo che $\mathcal{B}^2 = -I : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, cosicché i suoi autovalori sono $\pm i$. Questo si può fare scegliendo una base ortogonale in \mathcal{N} e la matrice $m \times m$ associata a \mathcal{B} a blocchi sulla diagonale del tipo $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Consideriamo la funzione continua

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)(-\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q})x,$$

e vediamo quando si annulla. Se $\lambda = 0$, deve essere $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Se $\lambda \in]0, 1]$, abbiamo

$$F(x, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B}\mathcal{P}x = \frac{1 - \lambda}{\lambda}\mathcal{P}x \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}x = 0,$$

per cui deve essere ancora $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Per A3, si ha

$$d(-\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R).$$

Consideriamo infine la funzione continua

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(\mathcal{P} + \mathcal{Q})x,$$

e in modo analogo vediamo che, se $\lambda \in [0, 1]$, essa si annulla solo per $x = 0$. Quindi, per A3,

$$d(\mathcal{B}\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R).$$

In definitiva, siccome $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$, per A1 si ha che

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(I, B_R) = 1 = \text{sgn}(\det \mathcal{A}).$$

Supponiamo ora m dispari. Scriviamo $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$, con $\dim \mathcal{N}_1 = 1$, e siano $\mathcal{P}_1 : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_1$ e $\mathcal{P}_2 = I - \mathcal{P}_1 : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_2$ le due proiezioni associate. Si noti che

$$-\mathcal{P} + \mathcal{Q} = -\mathcal{P}_1\mathcal{P} - \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}.$$

Consideriamo la funzione continua

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)(-\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q})x,$$

dove $\mathcal{B} : \mathcal{N}_2 \rightarrow \mathcal{N}_2$ è un'applicazione lineare che non abbia autovalori reali (vedi sopra). Vediamo quando F si annulla. Se $\lambda = 0$, deve essere $\mathcal{P}x = 0$ e $\mathcal{Q}x = 0$, ossia $x = 0$. Se $\lambda \in]0, 1]$, abbiamo

$$F(x, \lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}_1\mathcal{P}x = 0, \quad \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P}x = \frac{1 - \lambda}{\lambda}\mathcal{P}_2\mathcal{P}x \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}x = 0,$$

per cui deve essere anche $\mathcal{P}_2\mathcal{P}x = 0$ e quindi $x = 0$. Pertanto, con A3 si ha

$$d(-\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R).$$

Se poi consideriamo la funzione continua

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q})x + \lambda(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q})x,$$

in modo analogo vediamo che

$$d(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{B}\mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(-\mathcal{P}_1\mathcal{P} + \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}, B_R) = d(-\tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2, B_R),$$

dove $\tilde{\mathcal{P}}_1 = \mathcal{P}_1\mathcal{P} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{N}_1$ e $\tilde{\mathcal{P}}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P} + \mathcal{Q} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{M}$ sono le proiezioni associate alla decomposizione $\mathbb{R}^N = \mathcal{N}_1 \oplus [\mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{M}]$. Poniamo

$$\tilde{B}_R^1 = B_R \cap \mathcal{N}_1, \quad \tilde{B}_R^2 = B_R \cap (\mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{M}).$$

Usando P1, ho che

$$d(-\tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2, B_R) = d(-\tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2, \tilde{B}_R^1 + \tilde{B}_R^2).$$

Definiamo ora una funzione \tilde{d} che associa a ogni aperto limitato $U \subseteq \mathcal{N}_1$ e a ogni funzione continua $g : \bar{U} \rightarrow \mathcal{N}_1$ tale che $0 \notin g(\partial U)$ il numero reale

$$\tilde{d}(g, U) = d(g \circ \tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2, U + \tilde{B}_R^2).$$

Possiamo verificare che valgono le seguenti proprietà:

$\tilde{A}1$ (normalizzazione). Se $0 \in U$, allora $\tilde{d}(I, U) = 1$.

$\tilde{A}2$ (additività). Se U_1 e U_2 sono due sottoinsiemi aperti disgiunti di U tali che $0 \notin g(\bar{U} \setminus (U_1 \cup U_2))$, allora $\tilde{d}(g, U) = \tilde{d}(g, U_1) + \tilde{d}(g, U_2)$;

$\tilde{A}3$ (invarianza per omotopie). Se $G : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}_1$ è una funzione continua tale che $0 \notin G(\partial U \times [0, 1])$, allora $\tilde{d}(G(\cdot, \lambda), U)$ è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.

Da esse seguono inoltre le analoghe delle P1–P4, che indicheremo con $\tilde{P}1$ – $\tilde{P}4$. Resta da dimostrare che

$$d(-\tilde{\mathcal{P}}_1 + \tilde{\mathcal{P}}_2, \tilde{B}_R^1 + \tilde{B}_R^2) = \tilde{d}(-I, \tilde{B}_R^1) = -1.$$

Sia $\mathcal{N}_1 = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$, per un certo $e \in \mathbb{R}^N$ con $\|e\| = 1$. Si noti che, per $\rho > 0$,

$$\tilde{B}_\rho^1 =] - \rho e, \rho e[= \{\alpha e : \alpha \in] - \rho, \rho [\}.$$

Definiamo in \mathcal{N}_1 gli aperti

$$U =] - 2e, 2e[, \quad U_1 =] - 2e, 0[, \quad U_2 =]0, 2e[.$$

Consideriamo la funzione continua $G : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{N}_1$ definita da

$$G(\alpha e, \lambda) = (1 - \lambda)e + \lambda(|\alpha| - 1)e.$$

Si noti che $G(\cdot, 0)$ è costante, con $G(\alpha e, 0) = e \neq 0$, per ogni α . Per $\tilde{P}2$, si ha $\tilde{d}(G(\cdot, 0), U) = 0$. D'altra parte, se $\alpha e \in \partial U$, ossia $|\alpha| = 2$, si ha che $G(\alpha e, \lambda) = e \neq 0$. Per $\tilde{P}4$,

$$0 = \tilde{d}(G(\cdot, 0), U) = \tilde{d}(G(\cdot, 1), U).$$

Ora, poniamo $G(\cdot, 1) = h : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1$; essa è definita da

$$h(\alpha e) = (|\alpha| - 1)e.$$

Inoltre, per $\tilde{A}2$,

$$0 = \tilde{d}(h, U) = \tilde{d}(h, U_1) + \tilde{d}(h, U_2) = \tilde{d}(h_1, U) + \tilde{d}(h_2, U),$$

dove

$$h_1(\alpha e) = -(\alpha + 1)e, \quad h_2(\alpha e) = (\alpha - 1)e.$$

Consideriamo ora le funzioni continue

$$G_1(\alpha e, \lambda) = -(\alpha + 1 - \lambda)e, \quad G_2(\alpha e, \lambda) = (\alpha - 1 + \lambda)e,$$

e con $\tilde{A}3$ vediamo che

$$\tilde{d}(h_1, U) = \tilde{d}(-I, U), \quad \tilde{d}(h_2, U) = \tilde{d}(I, U).$$

Quindi, per $\tilde{A}1$,

$$0 = \tilde{d}(-I, U) + \tilde{d}(I, U) = \tilde{d}(-I, U) + 1,$$

da cui

$$\tilde{d}(-I, U) = -1.$$

In definitiva, essendo $\tilde{d}(-I, \tilde{B}_R^1) = \tilde{d}(-I, U)$, si ha

$$d(\mathcal{A}, B_R) = d(-I, \tilde{B}_R^1) = -1 = \text{sgn}(\det \mathcal{A}).$$

■

Supponiamo ora che $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ sia di classe C^1 . Indichiamo con $df(x) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ il differenziale di f nel punto x e con $J_f(x)$ la matrice jacobiana. Diremo che $y \in \mathbb{R}^N$ è un “valore regolare” per f se

$$x \in f^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad \det J_f(x) \neq 0.$$

In particolare, se $f^{-1}(y) = \emptyset$, allora y è un valore regolare. Dimostriamo la seguente proprietà:

- P6. Se 0 è un valore regolare per f e $0 \notin f(\partial\Omega)$, allora

$$d(f, \Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(\det J_f(x)),$$

e tale somma è finita.

Dimostrazione. Se $f^{-1}(0) = \emptyset$, la formula segue dalla proprietà P2. Supporremo quindi $f^{-1}(0)$ non vuoto. Per il teorema del diffeomorfismo locale, l'insieme $f^{-1}(0)$ è costituito da punti isolati e quindi, essendo contenuto in $\bar{\Omega}$ che è compatto, è un insieme finito:

$$f^{-1}(0) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

In ognuno degli x_j è centrata una palla aperta U_j su cui f è un diffeomorfismo. Prendendo questi insiemi a due a due disgiunti, per A2, si ha

$$d(f, \Omega) = \sum_{j=1}^m d(f, U_j).$$

Sappiamo inoltre che, per $j = 1, 2, \dots, m$, essendo $f(x_j) = 0$,

$$f(x) = \mathcal{A}_j(x - x_j) + r_j(x), \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow x_j} \frac{r_j(x)}{\|x - x_j\|} = 0,$$

dove abbiamo posto $\mathcal{A}_j = df(x_j)$. Essendo quest'ultima applicazione lineare invertibile, esiste un $c_j > 0$ tale che, per ogni $h \in \mathbb{R}^N$,

$$\|\mathcal{A}_j(h)\| \geq c_j \|h\|.$$

Restringendo eventualmente i raggi delle palle U_j , possiamo supporre che, per ogni $x \in \bar{U}_j$,

$$\|r_j(x)\| < c_j \|x - x_j\|.$$

Considerando la funzione continua $F_j : \bar{U}_j \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$F_j(x, \lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda\mathcal{A}_j(x - x_j),$$

si ha

$$\begin{aligned} \|F_j(x, \lambda)\| &\geq \|\mathcal{A}_j(x - x_j)\| - (1 - \lambda)\|f(x) - \mathcal{A}_j(x - x_j)\| \\ &\geq c_j \|x - x_j\| - \|r_j(x)\| > 0, \end{aligned}$$

e quindi, per A3,

$$d(f, U_j) = d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), U_j).$$

Siccome x_j è l'unico punto in cui $\mathcal{A}_j(\cdot - x_j)$ si annulla, per A2 si ha

$$d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), U_j) = d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), B_R),$$

dove B_R è una palla centrata in 0 che contiene U_j . Consideriamo la funzione continua $G_j : \overline{B_R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con

$$\begin{aligned} G_j(x, \lambda) &= (1 - \lambda)\mathcal{A}_j(x - x_j) + \lambda\mathcal{A}_jx \\ &= \mathcal{A}_j(x - (1 - \lambda)x_j). \end{aligned}$$

Se $x \in \partial B_R$ e $\lambda \in [0, 1]$, siccome $(1 - \lambda)x_j \in B_R$, si ha che $x - (1 - \lambda)x_j \neq 0$, per cui $G_j(x, \lambda) \neq 0$. Quindi, per A3 e la proprietà P5,

$$d(\mathcal{A}_j(\cdot - x_j), B_R) = d(\mathcal{A}_j, B_R) = \text{sgn}(\det \mathcal{A}_j) = \text{sgn}(\det J_f(x_j)).$$

In conclusione,

$$d(f, \Omega) = \sum_{j=1}^m \text{sgn}(\det J_f(x_j)).$$

■

Supponiamo ora $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Sia $q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione polinomiale tale che

$$\max_{\overline{\Omega}} \|f - q\| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} \|f\|,$$

la cui esistenza è assicurata dal teorema di Stone - Weierstrass (vedi Appendice). Ponendo $Q(x) = \det J_q(x)$, abbiamo che $Q(x)$ è un polinomio in N variabili, a valori reali. Avremo bisogno del seguente

Lemma. *Se $Q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione polinomiale non identicamente nulla, allora l'insieme degli zeri*

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^N : Q(x) = 0\}$$

ha misura di Lebesgue nulla.

Dimostrazione del lemma. L'affermazione è sicuramente vera se $N = 1$ in quanto, in tal caso, Z è costituito da un numero finito di punti isolati. Se $N = 2$, scrivendo $x = (x_1, x_2)$, le sezioni

$$Z(x_1, *) = \{x_2 \in \mathbb{R} : Q(x_1, x_2) = 0\},$$

o coincidono con \mathbb{R} , o hanno misura nulla in \mathbb{R} (perchè costituite da un numero finito di elementi). Inoltre, sicuramente esiste un \bar{x}_2 per cui $Q(\cdot, \bar{x}_2)$ non è identicamente nullo, e pertanto, essendo un polinomio, esso ha solo un numero finito di zeri. Ne segue che l'uguaglianza $Z(x_1, *) = \mathbb{R}$ può verificarsi solo per un numero finito di x_1 . Quindi, quasi tutte le sezioni $Z(x_1, *)$ hanno misura nulla in \mathbb{R} , e per il teorema di Fubini, Z ha misura nulla in \mathbb{R}^2 .

Ora si procede in modo analogo, per induzione. Supponiamo vera l'affermazione per $N - 1$, con $N \geq 2$. Scriviamo $x = (x_1, x_2)$, con $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x_2 \in \mathbb{R}^{N-1}$. Le sezioni

$$Z(x_1, *) = \{x_2 \in \mathbb{R}^{N-1} : Q(x_1, x_2) = 0\},$$

o coincidono con \mathbb{R}^{N-1} , o hanno misura nulla in \mathbb{R}^{N-1} , per ipotesi induttiva. Inoltre, sicuramente esiste un \bar{x}_2 per cui $Q(\cdot, \bar{x}_2)$ non è identicamente nullo, e pertanto ha solo un numero finito di zeri. Ne segue che l'uguaglianza $Z(x_1, *) = \mathbb{R}^{N-1}$ può verificarsi solo per un numero finito di x_1 . Quindi, quasi tutte le sezioni $Z(x_1, *)$ hanno misura nulla in \mathbb{R}^{N-1} , e per il teorema di Fubini, Z ha misura nulla in \mathbb{R}^N . Il lemma è così dimostrato.

Considereremo ora due casi.

Caso 1. Supponiamo dapprima che Q non sia identicamente nullo, per cui Z ha misura nulla. Siccome $q(x)$ è localmente lipschitziana, anche $q(Z)$ ha misura nulla. Pertanto, $\mathbb{R}^N \setminus q(Z)$, l'insieme dei valori regolari di q , è denso in \mathbb{R}^N . Esiste pertanto un valore regolare $v \in \mathbb{R}^N$ per q tale che $\|v\| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} \|f\|$. Ponendo $p(x) = q(x) - v$, si ha che 0 è un valore regolare per p , e inoltre $\max_{\bar{\Omega}} \|f - p\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$. Per la proprietà P3 di Rouché e per la P6,

$$d(f, \Omega) = d(p, \Omega) = \sum_{x \in p^{-1}(0)} \operatorname{sgn}(\det J_p(x)).$$

Caso 2. Supponiamo ora che Q sia identicamente nullo. Questo significa che $J_q(x)$ ha un autovalore uguale a zero, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Consideriamo allora il polinomio $\hat{q}(x) = q(x) + \varepsilon x$, con $\varepsilon > 0$. Essendo

$$J_{\hat{q}}(x) = J_q(x) + \varepsilon I,$$

avremo che, se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo, $J_{\hat{q}}(0)$ non può avere autovalori uguali a zero. Pertanto, ponendo $\hat{Q}(x) = \det J_{\hat{q}}(x)$, abbiamo che \hat{Q} non è identicamente nullo. Inoltre, se ε è piccolo, avremo ancora

$$\max_{\bar{\Omega}} \|f - \hat{q}\| < \frac{1}{2} \min_{\partial\Omega} \|f\|,$$

per cui ci si può ricondurre al caso precedente.

Abbiamo quindi dimostrato che la funzione continua f si può sempre approssimare su $\bar{\Omega}$ con funzioni polinomiali per le quali 0 è un valore regolare. Per tali funzioni, il grado è ben determinato da una somma finita di interi (precisamente 1 o -1), e coincide con $d(f, \Omega)$. Abbiamo pertanto dimostrato che una funzione d che verifichi le proprietà A1, A2 e A3 è univocamente determinata. Possiamo infine concludere con

- P7. Il valore di $d(f, \Omega)$ è sempre un intero.

[Possiamo facilmente caratterizzare il grado nel caso unidimensionale $N = 1$, qualora Ω sia un intervallo $]a, b[$. Supponendo $f(a) \neq 0 \neq f(b)$, consideriamo

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right].$$

Siccome $F(a, \lambda) = f(a) \neq 0$ e $F(b, \lambda) = f(b) \neq 0$, per ogni $\lambda \in [0, 1]$, avremo che

$$d(f,]a, b[) = d(F(\cdot, 0)]a, b[) = d(F(\cdot, 1)]a, b[),$$

da cui

$$d(f,]a, b[) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(a)f(b) > 0, \\ 1 & \text{se } f(a) < 0 < f(b), \\ -1 & \text{se } f(a) > 0 > f(b). \end{cases}$$

Dimostrata l'unicità, vediamo ora come si può definire il grado topologico. Ricordiamo le ipotesi:

- ▷ Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^N ,
- ▷ $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione continua,
- ▷ $0 \notin f(\partial\Omega)$.

Cominciamo con il supporre f di classe C^2 . In tal caso, poniamo

$$d(f, \Omega) = \int_{\Omega} c(\|f(x)\|) \det J_f(x) dx,$$

dove $c : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che

- (i) $\text{supp}(c) \subseteq]0, \min_{\partial\Omega} \|f\| [$,
- (ii) $\int_{\mathbb{R}^N} c(\|x\|) dx = 1$.

Qui $\text{supp}(c)$ sta a indicare il supporto di c , ovvero la chiusura dell'insieme dei punti su cui c è non nulla. Si noti che (ii) è equivalente a

$$(ii') \int_0^{+\infty} c(r)r^{N-1} dr = \frac{1}{\mu_{N-1}},$$

dove μ_{N-1} è la misura $(N-1)$ -dimensionale della sfera unitaria in \mathbb{R}^N , se $N \geq 2$, mentre $\mu_0 = 2$.

Dobbiamo verificare che quella data è una buona definizione. Prendiamo dunque una funzione \tilde{c} con le stesse proprietà (i), (ii) di c , e vediamo che l'integrale che definisce $d(f, \Omega)$ resta lo stesso. Sia $a = c - \tilde{c} : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, per cui

$$\text{supp}(a) \subseteq]0, \min_{\partial\Omega} \|f\| [, \quad \int_0^{+\infty} a(r)r^{N-1} dr = 0.$$

Definiamo, per $r > 0$,

$$A(r) = \frac{1}{r^N} \int_0^r a(s)s^{N-1} ds,$$

e poniamo $A(0) = 0$, cosicché $A : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 e $\text{supp}A \subseteq]0, \min_{\partial\Omega} \|f\| [$. Consideriamo le forme differenziali

$$\begin{aligned} \omega_a(y) &= a(\|y\|) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_N \\ &= a(\|y\|) \omega_1(y), \end{aligned}$$

dove

$$\omega_1(y) = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_N,$$

e

$$\begin{aligned}\sigma_A(y) &= A(\|y\|) \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} y_j dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_j \wedge \dots \wedge dy_N \\ &= A(\|y\|) \sigma_1(y),\end{aligned}$$

dove

$$\sigma_1(y) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} y_j dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_j \wedge \dots \wedge dy_N.$$

Essendo

$$d\sigma_1(y) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} dy_j \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy}_j \wedge \dots \wedge dy_N = N\omega_1(y),$$

e

$$rA'(r) + NA(r) = a(r),$$

per ogni $r \geq 0$, si ha

$$\begin{aligned}d\sigma_A(y) &= d[A(\|y\|)] \wedge \sigma_1(y) + A(\|y\|)d\sigma_1(y) \\ &= A'(\|y\|) \sum_{k=1}^N \frac{y_k}{\|y\|} dy_k \wedge \sigma_1(y) + NA(\|y\|)\omega_1(y) \\ &= (\|y\|A'(\|y\|) + NA(\|y\|)) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_N \\ &= a(\|y\|) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_N \\ &= \omega_a(y).\end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} c(\|f(x)\|) \det J_f(x) dx - \int_{\Omega} \tilde{c}(\|f(x)\|) \det J_f(x) dx &= \\ = \int_{\Omega} a(\|f(x)\|) \det J_f(x) dx = \int_{\Omega} f * \omega_a = \int_{\Omega} f * d\sigma_A = \int_{\Omega} d(f * \sigma_A).\end{aligned}$$

Estendiamo $f * \sigma_A$ a tutto \mathbb{R}^N ponendo $f * \sigma_A(x) = 0$ se $x \notin \overline{\Omega}$. Siccome $f * \sigma_A$ ha supporto contenuto in Ω , otteniamo una forma differenziale di classe C^1 . Se B_R è una palla contenente Ω , per la formula di Stokes-Cartan,

$$\int_{\Omega} d(f * \sigma_A) = \int_{B_R} d(f * \sigma_A) = \int_{\partial B_R} f * \sigma_A = 0.$$

Abbiamo così verificato che si tratta di una buona definizione.

Sarà conveniente definire la funzione

$$h(y) = c(\|y\|).$$

Si noti inoltre che, con le analoghe notazioni, possiamo scrivere

$$d(f, \Omega) = \int_{\Omega} f * \omega_c = \int_{\Omega} (h \circ f) df_1 \wedge \dots \wedge df_N.$$

Dimostriamo ora le tre proprietà $A1$, $A2$, $A3$ nel caso delle funzioni di classe C^2 . Se $0 \in \Omega$,

$$d(I, \Omega) = \int_{\Omega} c(\|x\|) dx = 1,$$

per le proprietà della funzione c .

Siano ora Ω_1 e Ω_2 sottoinsiemi aperti di Ω per cui $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Scegliendo una funzione c tale che $\text{supp}(c) \subseteq]0, \min_{\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)} \|f\| [$, si ha che

$$\begin{aligned} d(f, \Omega) &= \int_{\Omega} c(\|f(x)\|) \det J_f(x) dx \\ &= \int_{\Omega_1} c(\|f(x)\|) \det J_f(x) dx + \int_{\Omega_2} c(\|f(x)\|) \det J_f(x) dx \\ &= d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2). \end{aligned}$$

Resta da dimostrare l'invarianza per omotopie. Sia $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^2 tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$, e sia c di classe C^1 tale che $\text{supp}(c) \subseteq]0, \min_{\partial\Omega \times [0, 1]} \|F\| [$. Scriveremo brevemente

$$d(F(\cdot, \lambda), \Omega) = \int_{\Omega} h(F(x, \lambda)) \det J_{F(\cdot, \lambda)}(x, \lambda) dx = \int_{\Omega} (h \circ F) dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N.$$

Vogliamo dimostrare che la derivata rispetto a λ di tale espressione è sempre nulla. A tal fine, abbiamo il seguente risultato di J. Mawhin:

Lemma. *Si ha*

$$\partial_{\lambda}[(h \circ F) dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N] = d\tilde{\omega},$$

con

$$\tilde{\omega} = (h \circ F) \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \partial_{\lambda} F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per ogni $j = 1, \dots, N$,

$$\partial_{\lambda}[dF_j] = \partial_{\lambda} \left[\sum_{k=1}^N \partial_k F_j dx_k \right] = \left[\sum_{k=1}^N \partial_{\lambda} \partial_k F_j dx_k \right] = \left[\sum_{k=1}^N \partial_k \partial_{\lambda} F_j dx_k \right] = d[\partial_{\lambda} F_j].$$

Iniziamo il calcolo:

$$\begin{aligned}\partial_\lambda[(h \circ F) dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N] &= \\ &= [\partial_\lambda(h \circ F)] dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N + (h \circ F) \partial_\lambda[dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N],\end{aligned}$$

e si ha

$$\begin{aligned}[\partial_\lambda(h \circ F)] dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N &= \\ &= \left[\sum_{j=1}^N (\partial_j h \circ F) \partial_\lambda F_j \right] dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} (\partial_j h \circ F) dF_j \wedge \partial_\lambda F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \left[\sum_{k=1}^n (\partial_k h \circ F) dF_k \right] \wedge \partial_\lambda F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \\ &= \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} d[h \circ F] \wedge \partial_\lambda F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \\ &= d[h \circ F] \wedge \left[\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \right],\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}(h \circ F) \partial_\lambda[dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N] &= \\ &= (h \circ F) \sum_{j=1}^N dF_1 \wedge \dots \wedge \partial_\lambda dF_j \wedge \dots \wedge dF_N \\ &= (h \circ F) \sum_{j=1}^N dF_1 \wedge \dots \wedge d[\partial_\lambda F_j] \wedge \dots \wedge dF_N \\ &= (h \circ F) \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} d[\partial_\lambda F_j] \wedge dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \\ &= (h \circ F) \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} d[\partial_\lambda F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N] \\ &= (h \circ F) d \left[\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \right].\end{aligned}$$

Sommando i due termini,

$$d[h \circ F] \wedge \left[\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + (h \circ F) d \left[\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \right] = \\
& = d \left[(h \circ F) \sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} \partial_\lambda F_j dF_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dF_j} \wedge \dots \wedge dF_N \right].
\end{aligned}$$

■

A questo punto, usando la regola di Leibniz, possiamo scrivere

$$\partial_\lambda [d(F(\cdot, \lambda), \Omega)] = \int_\Omega \partial_\lambda [(h \circ F) dF_1 \wedge \dots \wedge dF_N] = \int_\Omega d\tilde{\omega},$$

e $\tilde{\omega}$, come si vede dall'espressione data dal Lemma, ha supporto contenuto in $\Omega \times [0, 1]$. Pertanto, estendendo a tutto \mathbb{R}^N ponendo $\tilde{\omega}$ nullo al di fuori di $\overline{\Omega} \times [0, 1]$, si ha che, se B_R è una palla contenente Ω ,

$$\int_\Omega d\tilde{\omega} = \int_{B_R} d\tilde{\omega} = \int_{\partial B_R} \tilde{\omega} = 0,$$

ossia $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$ è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.

Abbiamo così dimostrato che valgono le proprietà A1, A2, A3 nel caso delle funzioni di classe C^2 . Vediamo ora come si definisce il grado per le funzioni continue.

Sia $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione continua tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Sia $p : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ una funzione di classe C^2 tale che

$$\max_{\overline{\Omega}} \|f - p\| < \frac{1}{3} \min_{\partial\Omega} \|f\|,$$

la cui esistenza è assicurata, ad esempio, dal teorema di Stone - Weierstrass (vedi Appendice). Abbiamo già definito $d(p, \Omega)$; poniamo allora

$$d(f, \Omega) = d(p, \Omega).$$

Verifichiamo che si tratta di una buona definizione. Se $\tilde{p} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è anch'essa una funzione di classe C^2 tale che

$$\max_{\overline{\Omega}} \|f - \tilde{p}\| < \frac{1}{3} \min_{\partial\Omega} \|f\|,$$

allora, ponendo $\mu = \min_{\partial\Omega} \|f\|$, si ha

$$\max_{\overline{\Omega}} \|p - \tilde{p}\| < \frac{2}{3}\mu, \quad \min_{\partial\Omega} \|p\| > \frac{2}{3}\mu, \quad \min_{\partial\Omega} \|\tilde{p}\| > \frac{2}{3}\mu.$$

Consideriamo $F : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)p(x) + \lambda\tilde{p}(x).$$

Essa è di classe C^2 e, se $x \in \partial\Omega$,

$$\|F(x, \lambda)\| \geq \|p(x)\| - \lambda\|p(x) - \tilde{p}(x)\| > \frac{2}{3}\mu - \lambda\frac{2}{3}\mu \geq 0,$$

per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Quindi,

$$d(p, \Omega) = d(F(\cdot, 0), \Omega) = d(F(\cdot, 1), \Omega) = d(\tilde{p}, \Omega),$$

e pertanto la definizione data per $d(f, \Omega)$ è giustificata. Essa estende quella data in precedenza per le funzioni f di classe C^2 .

Restano da verificare le proprietà $A1$, $A2$ e $A3$. Chiaramente, per $A1$ non ci sono problemi, essendo I di classe C^2 . Siano Ω_1 e Ω_2 sottoinsiemi aperti di Ω per cui $0 \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Consideriamo una funzione $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^2 tale che

$$\max_{\bar{\Omega}} \|f - p\| < \frac{1}{3} \min_{\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)} \|f\|.$$

Per definizione avremo quindi

$$d(f, \Omega) = d(p, \Omega), \quad d(f, \Omega_1) = d(p, \Omega_1), \quad d(f, \Omega_2) = d(p, \Omega_2),$$

e l'additività segue dunque da quella già dimostrata per le funzioni di classe C^2 . Infine, sia $F : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$. Consideriamo una $G : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ di classe C^2 tale che

$$\max_{\partial\Omega \times [0, 1]} \|F - G\| < \frac{1}{3} \min_{\partial\Omega \times [0, 1]} \|F\|,$$

e per definizione abbiamo che

$$d(F(\cdot, \lambda), \Omega) = d(G(\cdot, \lambda), \Omega),$$

per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Essendo stato dimostrato che $d(G(\cdot, \lambda), \Omega)$ è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$, lo stesso varrà anche per $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$.

La dimostrazione del Teorema di esistenza e unicità del grado è così completata. ■

A questo punto, sarà utile richiamare le proprietà fin qui dimostrate.

Corollario. Sia $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$. Oltre alle A1, A2 e A3, valgono le seguenti proprietà:

P1 (excisione). Se Ω_1 è un sottoinsieme aperto di Ω tale che $0 \notin f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_1)$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1)$.

P2. Se $0 \notin f(\bar{\Omega})$, allora $d(f, \Omega) = 0$.

P2' (esistenza). Se $d(f, \Omega) \neq 0$, allora esiste un $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$.

P3 (di Rouché). Se $\max_{\partial\Omega} \|f - g\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$, allora $d(f, \Omega) = d(g, \Omega)$.

P4. Se $f = g$ su $\partial\Omega$, allora $d(f, \Omega) = d(g, \Omega)$.

P5. Se $f = \mathcal{A} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ è lineare, invertibile e $0 \in \Omega$, allora $d(\mathcal{A}, \Omega) = \text{sgn}(\det \mathcal{A})$.

P6. Se f è di classe C^1 e 0 è un suo valore regolare, allora

$$d(f, \Omega) = \sum_{x \in f^{-1}(0)} \text{sgn}(\det J_f(x)), \text{ e tale somma è finita.}$$

P7. Il valore di $d(f, \Omega)$ è sempre un intero.

[Se $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è continua e $y \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$, si pone]

$$d(f, \Omega, y) = d(f(\cdot) - y, \Omega).$$

Chiaramente, $d(f, \Omega) = d(f, \Omega, 0)$. Vale la seguente proprietà

P8. $d(f, \Omega, \cdot)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.

In effetti, ogni componente connessa di $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$ è un insieme aperto e quindi connesso per archi. Se y_1 e y_2 appartengono alla stessa componente connessa, esiste una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$, contenuta nella stessa, tale che $\gamma(0) = y_1$ e $\gamma(1) = y_2$. La funzione continua $F(x, \lambda) = f(x) - \gamma(\lambda)$ è tale che $F(x, \lambda) \neq 0$, per ogni x e ogni $\lambda \in [0, 1]$. Quindi

$$d(f, \Omega, y_1) = d(F(\cdot, 0), \Omega) = d(F(\cdot, 1), \Omega) = d(f, \Omega, y_2).$$

[]

Faremo ora delle considerazioni che ci porteranno a una diversa interpretazione del grado, nel caso in cui $\partial\Omega$ sia sufficientemente regolare. Siano $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ due numeri reali tali che

$$0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \min_{\partial\Omega} \|f\|,$$

e consideriamo una funzione $B : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, di classe C^1 , tale che

$$B(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq r \leq \varepsilon_0, \\ r^{-N} & \text{se } r \geq \varepsilon_1. \end{cases}$$

Sia $b : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$b(r) = rB'(r) + NB(r),$$

per cui, come già dimostrato in precedenza, $d\sigma_B = \omega_b$. Si vede che $\text{supp}(b) \subseteq [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$, e

$$\int_0^{+\infty} b(r)r^{N-1} dr = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} b(r)r^{N-1} dr = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} \frac{d}{dr}(r^N B(r)) dr = \varepsilon_1^N B(\varepsilon_1) = 1.$$

La funzione $c(x) = \frac{1}{\mu_{N-1}}b(x)$ verifica le condizioni (i) e (ii) che le competono e quindi, se $\partial\Omega$ è sufficientemente regolare,

$$\begin{aligned} d(f, \Omega) &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\Omega} b(\|f(x)\|) \det J_f(x) dx \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\Omega} f * \omega_b \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\Omega} f * (d\sigma_B) \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\Omega} d(f * \sigma_B) \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\partial\Omega} f * \sigma_B \\ &= \frac{1}{\mu_{N-1}} \int_{\partial\Omega} \|f\|^{-N} \left(\sum_{j=1}^N (-1)^{j-1} f_j df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_N \right). \end{aligned}$$

In particolare, se $N = 2$, otteniamo l'**indice di avvolgimento**

$$d(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}.$$

Se $\partial\Omega$ è parametrizzabile con una funzione $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 ,

$$d(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f_1(\psi(t)) \frac{d}{dt} f_2(\psi(t)) - f_2(\psi(t)) \frac{d}{dt} f_1(\psi(t))}{f_1(\psi(t))^2 + f_2(\psi(t))^2} dt.$$

Scrivendo $f(\psi(t))$ in coordinate polari,

$$f_1(\psi(t)) = \rho(t) \cos \theta(t), \quad f_2(\psi(t)) = \rho(t) \sin \theta(t).$$

sostituendo nella formula precedente otteniamo

$$d(f, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta'(t) dt = \frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi}.$$

⌈ Come esempio, abbiamo il seguente risultato, che generalizza il Teorema Fondamentale dell'Algebra. ⌋

Teorema. Se $f(z) = z^n + g(z)$, con $n \geq 1$ intero e $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{z^n} = 0,$$

allora esiste un $z \in \mathbb{C}$ in cui $f(z) = 0$.

Dimostrazione. Osserviamo dapprima che il grado della funzione $\hat{f}(z) = z^n$ su una palla B_R è uguale a n . Infatti, parametrizzando ∂B_R con la funzione $\psi(t) = Re^{it}$, abbiamo che $\hat{f}(\psi(t)) = R^n e^{int}$, ossia, con le notazioni precedenti, $\theta(t) = nt$, per cui

$$\frac{\theta(2\pi) - \theta(0)}{2\pi} = n.$$

Vediamo ora che, per ipotesi, esiste un $R > 0$ tale che, se $|z| \geq R$, allora $|g(z)| < |z|^n$. Consideriamo $F : \overline{B}_R \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$F(z, \lambda) = (1 - \lambda)f(z) + \lambda z^n.$$

Se $z \in \partial B_R$, allora

$$|F(z, \lambda)| \geq |z^n| - (1 - \lambda)|f(z) - z^n| \geq |z|^n - |g(z)| > 0,$$

per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Quindi, essendo $F(z, 1) = z^n$,

$$d(f, B_R) = d(F(\cdot, 0), B_R) = d(F(\cdot, 1), B_R) = d(\hat{f}, B_R) = n.$$

Per $P2'$, esiste un $z \in B_R$ tale che $f(z) = 0$. ■

]

Notiamo che lo stesso teorema di esistenza e unicità del grado si può enunciare in qualsiasi spazio vettoriale di dimensione finita. In effetti, se X è un tale spazio, di dimensione N , si può considerare un'applicazione lineare invertibile $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^N$ che trasforma una base di X nella base canonica di \mathbb{R}^N . Indichiamo con $d_{\mathbb{R}^N}$ il grado in \mathbb{R}^N costruito sopra.

Dati che siano un aperto limitato $\Omega \subseteq X$ e una funzione continua $f : \overline{\Omega} \rightarrow X$ tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$, possiamo considerare l'aperto limitato $\tilde{\Omega} = \varphi(\Omega)$ in \mathbb{R}^N e la funzione continua $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da $\tilde{f} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ \Omega & \longrightarrow & X \\ & & \\ \varphi \downarrow & & \uparrow \varphi^{-1} \\ & \tilde{f} & \\ \tilde{\Omega} & \longrightarrow & \mathbb{R}^N \end{array}$$

Una volta verificato che $0 \notin \tilde{f}(\partial\tilde{\Omega})$, si definisce

$$d_X(f, \Omega) = d_{\mathbb{R}^N}(\tilde{f}, \tilde{\Omega}).$$

Le proprietà A1, A2 e A3 sono di facile verifica per d_X , che risulta pertanto un grado su X .

Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo che sia definito un grado d_X su X . Procedendo come sopra, si può allora definire un grado su \mathbb{R}^N : se $\tilde{\Omega}$ è un aperto limitato di \mathbb{R}^N e $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione continua tale che $0 \notin \tilde{f}(\partial\tilde{\Omega})$, si considera l'aperto limitato $\Omega = \varphi^{-1}(\tilde{\Omega})$ di X , la funzione continua $f : \Omega \rightarrow X$ definita da $f = \varphi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi$ e si definisce

$$d(\tilde{f}, \tilde{\Omega}) = d_X(f, \Omega).$$

Essendo tale d un grado su \mathbb{R}^N , deve essere $d = d_{\mathbb{R}^N}$. Quindi

$$d_X(f, \Omega) = d_{\mathbb{R}^N}(\tilde{f}, \tilde{\Omega}).$$

2 Il grado di Leray - Schauder

Siano X uno spazio di Banach e $\Omega \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Diremo che una funzione continua $g : \bar{\Omega} \rightarrow X$ è **completamente continua** se manda insiemi limitati in insiemi relativamente compatti; equivalentemente, se presa una successione $(x_n)_n$ limitata, la successione $(g(x_n))_n$ ha una sottosuccessione convergente.

Denotiamo con $K(\bar{\Omega}, X)$ l'insieme delle funzioni $f : \bar{\Omega} \rightarrow X$ del tipo $f = I - g$, con $g : \bar{\Omega} \rightarrow X$ completamente continua.

Theorem 1 (esistenza e unicità del grado) *Esiste ed è unica una funzione d che associa ad ogni aperto limitato $\Omega \subseteq X$ e ad ogni funzione $f \in K(\bar{\Omega}, X)$ tale che $0 \notin f(\partial\Omega)$ un numero reale*

$$d(f, \Omega),$$

con le seguenti tre proprietà:

- *A1 (normalizzazione). Se $0 \in \Omega$, allora $d(I, \Omega) = 1$;*
- *A2 (additività). Se Ω_1 e Ω_2 sono due sottoinsiemi aperti disgiunti di Ω tali che $0 \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2)$;*
- *A3 (invarianza per omotopie). Se $F \in K(\bar{\Omega} \times [0, 1], X)$ è tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$, allora $d(F(\cdot, \lambda), \Omega)$ è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.*

Inoltre, il valore di $d(f, \Omega)$ è sempre un intero e valgono le seguenti proprietà:

- *P1 (excisione). Se Ω_1 è un sottoinsieme aperto di Ω tale che $0 \notin f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_1)$, allora $d(f, \Omega) = d(f, \Omega_1)$.*
- *P2 (esistenza). Se $d(f, \Omega) \neq 0$, allora esiste un $x \in \Omega$ tale che $f(x) = 0$.*
- *P3 (di Rouché). Se $\max_{\partial\Omega} \|f - g\| < \min_{\partial\Omega} \|f\|$, allora $d(f, \Omega) = d(g, \Omega)$.*

Contrariamente a quanto fatto per il grado di Brouwer, dimostreremo prima l'esistenza e solo in seguito l'unicità.

Lemma 1 Se $f \in K(\overline{\Omega}, X)$, allora $f(\partial\Omega)$ è un insieme chiuso.

Dimostrazione. Sia $(y_n)_n$ una successione in $f(\partial\Omega)$ tale che $y_n \rightarrow y$ in X . Vogliamo dimostrare che $y \in f(\partial\Omega)$. Prendiamo $(x_n)_n$ in $\partial\Omega$ tale che $f(x_n) = y_n$. Essendo $f(x_n) = x_n - g(x_n)$, con g completamente continua, esiste una sottosuccessione per cui $(g(x_{n_k}))_k$ converge: si avrà $g(x_{n_k}) \rightarrow z$, per un certo $z \in X$. Allora

$$x_{n_k} = y_{n_k} + g(x_{n_k}) \rightarrow y + z,$$

e $y + z \in \partial\Omega$, essendo $\partial\Omega$ un insieme chiuso. ■

Poniamo

$$\mu := \inf_{\partial\Omega} \|f\| = \text{dist}(0, f(\partial\Omega)).$$

Per il Lemma 1, si ha che $\mu > 0$.

Lemma 2 Se $f \in K(\overline{\Omega}, X)$, esiste un sottospazio X_1 di X , avente dimensione finita, ed esiste una funzione continua $g_1 : \overline{\Omega} \rightarrow X_1$ tale che, ponendo $f_1 = I - g_1$, si ha

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|f - f_1\| < \frac{\mu}{3}.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon \in]0, \mu/3[$. Per ogni $y \in g(\overline{\Omega})$, consideriamo la palla $B_\varepsilon(y)$. Allora

$$\overline{g(\overline{\Omega})} \subseteq \bigcup_y B_\varepsilon(y).$$

Essendo $g(\overline{\Omega})$ relativamente compatto, esiste un sottoricoprimento finito:

$$\overline{g(\overline{\Omega})} \subseteq \bigcup_{k=1}^m B_\varepsilon(y_k).$$

Sia X_1 il sottospazio generato da $\{y_1, \dots, y_m\}$. Definiamo le funzioni

$$\varphi_k(y) = \max\{0, \varepsilon - \|y - y_k\|\},$$

$$\psi_k(y) = \frac{\varphi_k(y)}{\sum_{k=1}^m \varphi_k(y)}.$$

Definiamo $g_1 : \overline{\Omega} \rightarrow X_1$ in questo modo:

$$g_1(x) = \sum_{k=1}^m \psi_k(g(x))y_k.$$

Si vede facilmente che si tratta di una funzione continua, e si ha:

$$\|g(x) - g_1(x)\| \leq \varepsilon,$$

per ogni $x \in \overline{\Omega}$. ■

Ricordiamo che nello spazio finito-dimensionale X_1 è definito il grado, che indicheremo con d_{X_1} .

Una volta determinate le funzioni $g_1 : \bar{\Omega} \rightarrow X_1$ e $f_1 = I - g_1$, consideriamo le loro restrizioni all'insieme $\bar{\Omega} \cap X_1$: la denotiamo con $\tilde{g}_1 : \bar{\Omega} \cap X_1 \rightarrow X_1$ e $\tilde{f}_1 : \bar{\Omega} \cap X_1 \rightarrow X_1$, per cui si ha $\tilde{f}_1 = I - \tilde{g}_1$.

Vediamo che $0 \notin \tilde{f}_1(\partial(\Omega \cap X_1))$. Infatti, se $x \in \partial(\Omega \cap X_1)$, allora $x \in \partial\Omega$ e

$$\|\tilde{f}_1(x)\| \geq \|f(x)\| - \|f(x) - \tilde{f}_1(x)\| > \mu - \frac{\mu}{3} = \frac{2}{3}\mu > 0.$$

Siamo ora pronti a definire il grado di f su Ω : porremo

$$d(f, \Omega) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1).$$

Verifichiamo innanzitutto che si tratta di una buona definizione. Siano X_2 un sottospazio di dimensione finita, $g_2 : \bar{\Omega} \rightarrow X_2$ e $f_2 = I - g_2$ delle funzioni che soddisfino, allo stesso modo del sottospazio X_1 e delle funzioni $g_1 : \bar{\Omega} \rightarrow X_1$ e $f_1 = I - g_1$, alle condizioni del lemma, per cui

$$\sup_{\bar{\Omega}} \|f - f_2\| < \frac{\mu}{3}.$$

Denotiamo con $\tilde{g}_2 : \bar{\Omega} \cap X_2 \rightarrow X_2$ e $\tilde{f}_2 : \bar{\Omega} \cap X_2 \rightarrow X_2$ le loro restrizioni all'insieme $\bar{\Omega} \cap X_2$, per cui si ha $\tilde{f}_2 = I - \tilde{g}_2$. Come sopra, si vede che

$$x \in \partial(\Omega \cap X_2) \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu > 0,$$

per cui $0 \notin \tilde{f}_2(\partial(\Omega \cap X_2))$. Dobbiamo far vedere che

$$d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_2}(\tilde{f}_2, \Omega \cap X_2). \quad (1)$$

Consideriamo lo spazio X_0 generato da $X_1 \cup X_2$. Definiamo le funzioni

$$\hat{g}_1 : \bar{\Omega} \cap X_0 \rightarrow X_0, \quad \hat{g}_2 : \bar{\Omega} \cap X_0 \rightarrow X_0,$$

definite da $\hat{g}_1(x) = g_1(x)$ e $\hat{g}_2(x) = g_2(x)$, per ogni $x \in \bar{\Omega} \cap X_0$. Allo stesso modo, definiamo le funzioni

$$\hat{f}_1 : \bar{\Omega} \cap X_0 \rightarrow X_0, \quad \hat{f}_2 : \bar{\Omega} \cap X_0 \rightarrow X_0,$$

definite da $\hat{f}_1(x) = f_1(x)$ e $\hat{f}_2(x) = f_2(x)$, per ogni $x \in \bar{\Omega} \cap X_0$. Pertanto, si ha che $\hat{f}_1 = I - \hat{g}_1$ e $\hat{f}_2 = I - \hat{g}_2$. Si vede come sopra che

$$x \in \partial(\Omega \cap X_0) \quad \Rightarrow \quad \|\hat{f}_1(x)\| > \frac{2}{3}\mu > 0 \quad \text{e} \quad \|\hat{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu > 0,$$

per cui $0 \notin \hat{f}_1(\partial(\Omega \cap X_0))$ e $0 \notin \hat{f}_2(\partial(\Omega \cap X_0))$. Dimostriamo allora che

$$d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_0}(\hat{f}_2, \Omega \cap X_0). \quad (2)$$

A tal scopo, consideriamo la funzione $F : (\bar{\Omega} \cap X_0) \times [0, 1] \rightarrow X_0$ definita da

$$F(x, \lambda) = (1 - \lambda)\hat{f}_1(x) + \lambda\hat{f}_2(x).$$

Se $x \in \partial(\Omega \cap X_0)$, allora

$$\begin{aligned} \|F(x, \lambda)\| &\geq \|\hat{f}_1(x)\| - \lambda\|\hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu - \|\hat{f}_1(x) - \hat{f}_2(x)\| \\ &\geq \frac{2}{3}\mu - \|\hat{f}_1(x) - f(x)\| - \|f(x) - \hat{f}_2(x)\| > \frac{2}{3}\mu - \frac{\mu}{3} - \frac{\mu}{3} = 0. \end{aligned}$$

L'uguaglianza (2) segue quindi dalla proprietà di invarianza per omotopie del grado.

Vogliamo ora dimostrare che

$$d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0), \quad d_{X_2}(\tilde{f}_2, \Omega \cap X_2) = d_{X_0}(\hat{f}_2, \Omega \cap X_0),$$

da cui segue immediatamente (1), vista la (2). Dimostriamo la prima, essendo la seconda ad essa analoga. Identifichiamo X_0 con \mathbb{R}^N : se $x \in X_0$, scriviamo $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Identifichiamo X_1 con \mathbb{R}^M , ossia

$$X_1 \approx \{x \in \mathbb{R}^N : x_{M+1} = \dots = x_N = 0\}.$$

Ricordiamo che $\hat{g}_1(x) \in X_1$, per ogni $x \in \bar{\Omega} \cap X_0$. Ragionando come nella dimostrazione del teorema sul grado in dimensione finita, è possibile trovare una funzione polinomiale $\hat{q}_1 : \bar{\Omega} \cap X_0 \rightarrow X_0$ tale che $\hat{q}_1(x) \in X_1$, per ogni $x \in \bar{\Omega} \cap X_0$ e, posto $\hat{p}_1 = I - \hat{q}_1 : \bar{\Omega} \cap X_0 \rightarrow X_0$, si abbia che 0 è un valore regolare per \hat{p}_1 e $\max_{\bar{\Omega} \cap X_0} \|\hat{f}_1 - \hat{p}_1\| < \min_{\partial(\Omega \cap X_0)} \|\hat{f}_1\|$. Allora,

$$d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_0}(\hat{p}_1, \Omega \cap X_0) = \sum_{x \in \hat{p}_1^{-1}(0)} \text{sgn}(J_{\hat{p}_1}(x)).$$

Definiamo $\tilde{q}_1 : \bar{\Omega} \cap X_1 \rightarrow X_1$ tale che $\tilde{q}_1(x) = \hat{q}_1(x)$, per ogni $x \in \bar{\Omega} \cap X_1$ e poniamo $\tilde{p}_1 = I - \tilde{q}_1 : \bar{\Omega} \cap X_1 \rightarrow X_1$. Allora

$$d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_1}(\tilde{p}_1, \Omega \cap X_1) = \sum_{u \in \tilde{p}_1^{-1}(0)} \text{sgn}(J_{\tilde{p}_1}(u)).$$

Siccome $\hat{q}_1(x) \in X_1$, si ha

$$\hat{p}_1(x) = (\hat{p}_1^1(x), \dots, \hat{p}_1^M(x), x_{M+1}, \dots, x_N).$$

Allora

$$\begin{aligned} x \in \hat{p}_1^{-1}(0) &\Leftrightarrow (\hat{p}_1^1(x), \dots, \hat{p}_1^M(x), x_{M+1}, \dots, x_N) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_M) \in \tilde{p}_1^{-1}(0), \\ x_{M+1} = \dots = x_N = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre,

$$J_{\hat{p}_1}(x) = \det \begin{pmatrix} I - \left(\frac{\partial \hat{q}_1^i}{\partial x_j}(x) \right) & \dots \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Quindi, se $x \in \hat{p}_1^{-1}(0)$, allora

$$\begin{aligned} J_{\hat{p}_1}(x) &= \det \left(I - \left(\frac{\partial \hat{q}_1^i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_M, 0, \dots, 0) \right) \right) \\ &= \det \left(I - \left(\frac{\partial \tilde{q}_1^i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_M) \right) \right) \\ &= J_{\tilde{p}_1}(x_1, \dots, x_M). \end{aligned}$$

Ponendo $u = (x_1, \dots, x_M)$, abbiamo quindi

$$\sum_{x \in \hat{p}_1^{-1}(0)} \text{sgn}(J_{\hat{p}_1}(x)) = \sum_{u \in \tilde{p}_1^{-1}(0)} \text{sgn}(J_{\tilde{p}_1}(u)).$$

In conclusione,

$$d_{X_0}(\hat{f}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_0}(\hat{p}_1, \Omega \cap X_0) = d_{X_1}(\tilde{p}_1, \Omega \cap X_1) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1),$$

che è quanto volevamo dimostrare. Abbiamo così verificato che la definizione data del grado è una buona definizione.

Sono da dimostrare ora le proprietà A1, A2 e A3. Vediamo A1: se $0 \in \Omega$, allora $0 \in \Omega \cap X_1$ e quindi

$$d(I, \Omega) = d_{X_1}(I, \Omega \cap X_1) = 1.$$

Vediamo A2: siano Ω_1 e Ω_2 due sottoinsiemi aperti disgiunti di Ω tali che $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, Usando il Lemma 2, possiamo prendere il sottospazio X_1 per definire tutti e tre i gradi

$$\begin{aligned} d(f, \Omega) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1), \\ d(f, \Omega_1) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_1 \cap X_1), \\ d(f, \Omega_2) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_2 \cap X_1). \end{aligned}$$

Essendo $\Omega_1 \cap X_1$ e $\Omega_2 \cap X_1$ aperti disgiunti di $\Omega \cap X_1$, si ha

$$\begin{aligned} d(f, \Omega) &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1) \\ &= d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_1 \cap X_1) + d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_2 \cap X_1) \\ &= d(f, \Omega_1) + d(f, \Omega_2). \end{aligned}$$

Infine, vediamo A3: sia $F \in K(\overline{\Omega} \times [0, 1], X)$ tale che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$. Per il Lemma 2 si può trovare un sottospazio X_1 ed una funzione continua $G_1 : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow X_1$ tale che, ponendo $F_1 = I - G_1$, risulta

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|F - F_1\| < \frac{1}{3} \text{dist}(0, F(\partial\Omega \times [0, 1])).$$

Definendo $\tilde{F}_1 : (\Omega \cap X_1) \times [0, 1] \rightarrow X_1$, la restrizione di F_1 , si ha

$$d(F(\cdot, \lambda), \Omega) = d_{X_1}(\tilde{F}_1(\cdot, \lambda), \Omega \cap X_1).$$

Siccome $0 \notin \tilde{F}_1(\partial(\Omega \cap X_1) \times [0, 1])$, il grado è indipendente da $\lambda \in [0, 1]$.

Le proprietà P1 - P3 seguono facilmente dalle A1 - A3, come già visto nel caso finito-dimensionale.

Veniamo ora alla dimostrazione dell'unicità del grado. Indichiamo con d_X il grado sopra definito. Supponiamo che sia definito un grado d , e dimostriamo che deve essere $d = d_X$. Sia Ω un aperto limitato di X e $f \in K(\overline{\Omega}, X)$. Procedendo come sopra, per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo un sottospazio di dimensione finita X_1 e una funzione continua $g_1 : \overline{\Omega} \rightarrow X_1$ tale che, ponendo $f_1 = I - g_1$, si ha

$$\sup_{\overline{\Omega}} \|f - f_1\| < \varepsilon.$$

Sia $K_{\#}(\overline{\Omega}, X)$ l'insieme delle funzioni $f : \overline{\Omega} \rightarrow X$ del tipo $f = I - g$, con $g : \overline{\Omega} \rightarrow X$ continua avente immagine contenuta in un sottospazio di dimensione finita. Da quanto sopra, considerando la topologia della convergenza uniforme, $K_{\#}(\overline{\Omega}, X)$ è denso in $K(\overline{\Omega}, X)$. Quindi, basterà dimostrare che $d(f, \Omega) = d_X(f, \Omega)$ per ogni $f \in K_{\#}(\overline{\Omega}, X)$.

Sia quindi $f \in K_{\#}(\overline{\Omega}, X)$, e sia X_1 un sottospazio di dimensione finita che contiene l'immagine di $g = I - f$. Su X_1 è univocamente definito un grado, che indichiamo con d_{X_1} .

Sia X_2 un sottospazio tale che $X = X_1 \oplus X_2$. Per ogni $x \in X$, scriveremo $x = x_1 + x_2$, dove $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$. Sia $F : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow X$ la funzione definita da

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)[f(x_1) + x_2]$$

Vediamo che $0 \notin F(\partial\Omega \times [0, 1])$. Infatti, se $F(x, \lambda) = 0$, allora

$$\lambda(x_1 - g(x)) + (1 - \lambda)f(x_1) + x_2 = 0.$$

Siccome sia $x_1 - g(x)$ che $f(x_1)$ appartengono a X_1 , ne segue che deve essere $x_2 = 0$ e quindi $x = x_1$, da cui

$$\lambda(x - g(x)) + (1 - \lambda)f(x) = 0,$$

ossia $f(x) = 0$. Siccome $0 \notin f(\partial\Omega)$, si ha che $x \notin \partial\Omega$.

Sia $\hat{f} : \bar{\Omega} \rightarrow X$ definita da

$$\hat{f}(x) = f(x_1) + x_2 = x - g(x_1).$$

Chiaramente, $\hat{f} \in K_{\#}(\bar{\Omega}, X)$. Da quanto visto sopra, usando l'invarianza per omotopie, si ha che

$$d(f, \Omega) = d(\hat{f}, \Omega).$$

Fissato $\rho > 0$, sia

$$B_{\rho}^2 = \{x \in X_2 : \|x\| < \rho\},$$

e sia inoltre $\Omega_1 = \Omega \cap X_1$. Osserviamo che

$$\hat{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_1 \in X_1.$$

Per la proprietà di excisione,

$$d(\hat{f}, \Omega) = d(\hat{f}, \Omega_1 + B_{\rho}^2).$$

Sia ora $\tilde{f}_1 : \bar{\Omega}_1 \rightarrow X_1$ definita da $\tilde{f}_1(x) = f(x)$. Si può verificare che $0 \notin \tilde{f}_1^{-1}(\partial\Omega_1)$. Poniamo allora

$$d(\tilde{f}_1, \Omega_1) = d(\hat{f}, \Omega_1 + B_{\rho}^2),$$

con $\rho > 0$ arbitrario.

Si noti che ogni aperto limitato Ω_1 di X_1 si può ottenere come intersezione dell'aperto limitato $\Omega_1 + B_{\rho}^2$ di X con X_1 , e ogni funzione continua $\tilde{f}_1 : \bar{\Omega}_1 \rightarrow X_1$ tale che $0 \notin \tilde{f}_1^{-1}(\partial\Omega_1)$ si può ottenere come sopra, a partire da una funzione $f \in K_{\#}(\bar{\Omega}_1 + B_{\rho}^2, X)$ tale che $0 \notin f^{-1}(\partial(\Omega_1 + B_{\rho}^2))$, ad esempio definendo $f(x) = \tilde{f}_1(x_1) + x_2$.

Resta pertanto definito $d(\tilde{f}_1, \Omega_1)$ per ogni aperto limitato Ω_1 di X_1 e ogni funzione continua $\tilde{f}_1 : \bar{\Omega}_1 \rightarrow X_1$ tale che $0 \notin \tilde{f}_1^{-1}(\partial\Omega_1)$. A questo punto, si può verificare che valgono le proprietà A1 - A3, per cui $d(\tilde{f}_1, \Omega_1)$ definisce un grado su X_1 . Ma allora, per l'unicità,

$$d(\tilde{f}_1, \Omega_1) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega_1),$$

Ricordiamo ora che d_X è stato definito ponendo

$$d_X(f, \Omega) = d_{X_1}(\tilde{f}_1, \Omega \cap X_1).$$

Se ne conclude che

$$d_X(f, \Omega) = d(f, \Omega),$$

e la dimostrazione è completa.

[Il teorema di Brouwer ha il suo corrispettivo, con dimostrazione praticamente identica, che ora enunciamo.]

Teorema di Schauder. *Se $g : X \rightarrow X$ è completamente continua ed esiste una palla chiusa \overline{B}_R tale che*

$$g(\overline{B}_R) \subseteq \overline{B}_R,$$

allora esiste un $x \in \overline{B}_R$ tale che $g(x) = x$. Inoltre, se g non ha punti fissi su ∂B_R , allora

$$d(I - g, B_R) = 1.$$

[]

3 Il problema periodico

Cerchiamo soluzioni T -periodiche dell'equazione

$$x'' + g(t, x) = 0, \tag{3}$$

dove $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e T -periodica nella sua prima variabile. A tal scopo sarà conveniente considerare il problema più generale

$$(P) \quad \begin{cases} x'' + g(t, x) = 0, \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \end{cases}$$

dove $g : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua. Notiamo infatti che, se $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è T -periodica nella prima variabile, ogni soluzione $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ del problema (P) si può estendere per T -periodicità a tutto \mathbb{R} , e risulta così una soluzione T -periodica dell'equazione (3). Per questo motivo, chiameremo (P) “problema periodico”, e le sue soluzioni “soluzioni periodiche”.

Consideriamo lo spazio $X = C([0, T])$ delle funzioni continue $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, dotato della norma $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0, T]\}$. Nel seguito, considereremo anche gli spazi $C^1([0, T])$ e $C^2([0, T])$, rispettivamente, con norme $\|f\|_{C_T^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ e $\|f\|_{C_T^2} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$.

Definiamo l'operatore $L : D(L) \subseteq X \rightarrow X$ in questo modo:

$$\begin{aligned} D(L) &= \{x \in C^2([0, T]) : x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T)\}, \\ Lx &= -x''. \end{aligned}$$

Definiamo inoltre l'operatore di Nemitzki:

$$\begin{aligned} N : X &\rightarrow X, \\ (Nx)(t) &= g(t, x(t)). \end{aligned}$$

Si vede facilmente che N è continuo e manda limitati in limitati. Abbiamo così che il problema (P) corrisponde a trovare $x \in D(L)$ tale che

$$Lx = Nx. \quad (4)$$

3.1 Proprietà dell'operatore differenziale

Siccome le soluzioni dell'equazione

$$x'' = 0$$

sono del tipo

$$x(t) = at + b,$$

si ha che il nucleo $\mathcal{N}(L)$ è costituito dalle funzioni costanti. Determiniamo ora l'immagine $\mathcal{I}(L)$: se $e \in C([0, T])$, le soluzioni dell'equazione

$$x'' = e(t)$$

sono date da

$$x(t) = x_0 + y_0 t + \int_0^t \int_0^s e(\tau) d\tau ds.$$

Tali soluzioni appartengono a $D(L)$ se e solo se

$$y_0 = -\frac{1}{T} \int_0^T \int_0^s e(\tau) d\tau ds, \quad \int_0^T e(\tau) d\tau = 0.$$

Abbiamo quindi che l'immagine $\mathcal{I}(L)$ è l'insieme delle funzioni aventi media nulla.

Consideriamo l'equazione differenziale scalare

$$x'' + \lambda x = e(t), \quad (5)$$

dove $e \in C([0, T])$ e λ è un numero reale.

3.1.1 Il caso $\lambda > 0$

Se $\lambda > 0$, le soluzioni dell'equazione

$$x'' + \lambda x = 0 \quad (6)$$

sono tutte periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$:

$$x(t) = a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t).$$

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\lambda x, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono ellissi di equazione $y^2 + \lambda x^2 = c$, con $c \geq 0$, che circondano l'origine, il quale pertanto è un **centro isocrono**.

Consideriamo ora, sempre per $\lambda > 0$, l'equazione (5) e scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\lambda x + e(t). \end{cases}$$

Ponendo $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la soluzione con punto iniziale $u(0) = u_0$ è data da

$$u(t) = W(t) \left(u_0 + \int_0^t W^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ e(s) \end{pmatrix} ds \right),$$

dove $W(t)$ è la matrice wronskiana con $W(0) = I$:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \\ -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} t) & \cos(\sqrt{\lambda} t) \end{pmatrix}.$$

Scrivendo $u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e sviluppando, essendo

$$W^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} s) & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} s) \\ \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} s) & \cos(\sqrt{\lambda} s) \end{pmatrix},$$

troviamo

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\sqrt{\lambda} t) \left(x_0 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds \right), \\ y(t) &= -\sin(\sqrt{\lambda} t) \left(\sqrt{\lambda} x_0 - \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \cos(\sqrt{\lambda} t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds \right). \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi con caratteristiche completamente diverse.

I caso. Se $\lambda = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$, per un certo intero positivo N , considerando i coefficienti di Fourier ⁶

$$a_N = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos\left(\frac{2\pi N}{T} s\right) ds, \quad b_N = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin\left(\frac{2\pi N}{T} s\right) ds,$$

⁶Ricordiamo che si ha

$$e(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right).$$

si vede che

$$x(T) = x_0 - \frac{T^2 b_N}{4\pi N}, \quad y(T) = y_0 + \frac{T a_N}{2}.$$

Quindi, in questo caso, ci sono soluzioni T -periodiche di (5) se e solo se $a_N = b_N = 0$. In tal caso, **tutte le soluzioni** di (5) **sono T -periodiche**.

Al contrario, se $a_N \neq 0$ o $b_N \neq 0$, **tutte le soluzioni** di (5) **sono illimitate**, sia in passato che in futuro. Si vede infatti che, per $k \in \mathbb{Z}$,

$$x(kT) = x_0 - k \frac{T^2 b_N}{4\pi N}, \quad y(kT) = y_0 + k \frac{T a_N}{2}.$$

II caso. Se $\lambda > 0$ è tale che $\lambda \neq (\frac{2\pi n}{T})^2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$\alpha_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds, \quad \beta_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds.$$

Cerchiamo una soluzione T -periodica di (5) imponendo che sia $u(T) = u_0$. Risolvendo il sistema $\{x(T) = x_0, y(T) = y_0\}$, ossia

$$\begin{cases} x_0 = \cos(\sqrt{\lambda} T) \left(x_0 - \frac{T}{2\sqrt{\lambda}} \beta_\lambda \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} T) \left(y_0 + \frac{T}{2} \alpha_\lambda \right), \\ y_0 = -\sin(\sqrt{\lambda} T) \left(\sqrt{\lambda} x_0 - \frac{T}{2} \beta_\lambda \right) + \cos(\sqrt{\lambda} T) \left(y_0 + \frac{T}{2} \alpha_\lambda \right), \end{cases}$$

troviamo

$$x_0 = \frac{T}{4\sqrt{\lambda}} \left(\beta_\lambda + \frac{\sin(\sqrt{\lambda} T)}{1 - \cos(\sqrt{\lambda} T)} \alpha_\lambda \right), \quad y_0 = \frac{T}{4} \left(\frac{1 + \cos(\sqrt{\lambda} T)}{\sin(\sqrt{\lambda} T)} \beta_\lambda - \alpha_\lambda \right).$$

Quindi, in questo caso, **esiste un'unica soluzione T -periodica** di (5). La denotiamo con $x_{\lambda,e}(t)$. La funzione $\Psi_\lambda : C([0, T]) \rightarrow D(L)$ definita da

$$\Psi_\lambda : e \mapsto x_{\lambda,e}$$

è lineare. Tutte **le altre soluzioni** di (5) **sono** del tipo

$$x(t) = x_{\lambda,e}(t) + a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t),$$

e sono pertanto **tutte limitate** su \mathbb{R} .

Si noti inoltre che esiste una costante $c_\lambda \geq 0$ per cui si ha

$$|x_{\lambda,e}(t)| + |x'_{\lambda,e}(t)| \leq c_\lambda \int_0^T |e(s)| ds,$$

per ogni $t \in [0, T]$. Da queste stime e dall'equazione differenziale si vede quindi che la funzione lineare $\Psi_\lambda : C([0, T]) \rightarrow D(L)$ è continua: esiste una costante $c_\lambda \geq 0$ per cui si ha

$$\|\Psi_\lambda(e)\|_{C^2} \leq c_\lambda \|e\|_\infty,$$

per ogni $e \in C([0, T])$.

Notiamo infine che, se λ tende a $(\frac{2\pi N}{T})^2$, per un certo $N \in \mathbb{N}$, allora $\alpha_\lambda \rightarrow a_N$, $\beta_\lambda \rightarrow b_N$ e l'ampiezza di $x_{\lambda,e}(t)$ tende all'infinito se $a_N \neq 0$ o $b_N \neq 0$.

3.1.2 Il caso $\lambda < 0$

Se $\lambda < 0$, le soluzioni non nulle dell'equazione (6) sono tutte illimitate:

$$x(t) = a \cosh(\sqrt{-\lambda} t) + b \sinh(-\sqrt{-\lambda} t).$$

L'equazione (5) si risolve in modo analogo a quanto già visto nella sezione precedente: ponendo $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, la soluzione con punto iniziale $u(0) = u_0$ è data da

$$u(t) = W(t) \left(u_0 + \int_0^t W^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ e(s) \end{pmatrix} ds \right),$$

dove $W(t)$ questa volta è:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{-\lambda} t) & \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh(\sqrt{-\lambda} t) \\ \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda} t) & \cosh(\sqrt{-\lambda} t) \end{pmatrix}.$$

Scrivendo $u_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ e sviluppando, troviamo

$$\begin{aligned} x(t) &= \cosh(\sqrt{-\lambda} t) \left(x_0 - \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \int_0^t e(s) \sinh(\sqrt{-\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \sinh(\sqrt{-\lambda} t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cosh(\sqrt{-\lambda} s) ds \right), \\ y(t) &= -\sinh(\sqrt{-\lambda} t) \left(\sqrt{-\lambda} x_0 - \int_0^t e(s) \sinh(\sqrt{-\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \cosh(\sqrt{-\lambda} t) \left(y_0 + \int_0^t e(s) \cosh(\sqrt{-\lambda} s) ds \right). \end{aligned}$$

Ponendo

$$\tilde{\alpha}_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cosh(\sqrt{-\lambda} s) ds, \quad \tilde{\beta}_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sinh(\sqrt{-\lambda} s) ds,$$

risolvendo il sistema $\{x(T) = x_0, y(T) = y_0\}$, troviamo

$$x_0 = \frac{T}{4\sqrt{-\lambda}} \left(\tilde{\beta}_\lambda + \frac{\sinh(\sqrt{-\lambda} T)}{1 - \cosh(\sqrt{-\lambda} T)} \tilde{\alpha}_\lambda \right), \quad y_0 = \frac{T}{4} \left(\frac{1 + \cosh(\sqrt{-\lambda} T)}{\sinh(\sqrt{-\lambda} T)} \tilde{\beta}_\lambda - \tilde{\alpha}_\lambda \right).$$

Quindi, anche in questo caso **esiste un'unica soluzione T -periodica** $x_{\lambda,e}$.
Le considerazioni fatte sopra sulla funzione $\Psi_\lambda : e \mapsto x_{\lambda,e}$ continuano a valere.

3.1.3 Conclusioni

Abbiamo visto che gli autovalori dell'operatore $L : D(L) \subseteq X \rightarrow X$, sono i numeri del tipo $(\frac{2\pi N}{T})^2$, con $N \in \mathbb{N}$. Inoltre, abbiamo visto che, se $\lambda \neq (\frac{2\pi N}{T})^2$ per ogni $N \in \mathbb{N}$, allora $(L - \lambda I)^{-1} = \Psi_\lambda : X \rightarrow D(L)$ è continua.

Scelto un $\lambda \in \rho(L)$, possiamo trasformare (4) in un problema di punto fisso:

$$x = (L - \lambda I)^{-1}(N - \lambda I)x := \mathcal{T}(x). \quad (7)$$

Dimostriamo che $\mathcal{T} : X \rightarrow X$ è completamente continuo. Sia $(x_n)_n$ una successione limitata in X . Ponendo $y_n = (N - \lambda I)x_n$, si ha che $(y_n)_n$ è anch'essa limitata in X , e ponendo $z_n = \mathcal{T}(x_n)$, ossia $z_n = (L - \lambda I)^{-1}y_n = \Psi_\lambda(y_n)$, si ha che $(z_n)_n$ è limitata in $C^2([0, T])$. Per il teorema di Ascoli–Arzelà, esiste una sottosuccessione $(z_{n_k})_k$ che converge in X .

3.2 Sotto-soluzioni e sopra-soluzioni

Diremo che una funzione $\alpha \in C^2([0, T])$ è una sotto-soluzione del problema (P) se

$$\begin{cases} -\alpha''(t) \leq g(t, \alpha(t)), \\ \alpha(0) = \alpha(T), \quad \alpha'(0) \geq \alpha'(T); \end{cases}$$

una funzione $\beta \in C^2([0, T])$ è una sopra-soluzione del problema (P) se

$$\begin{cases} -\beta''(t) \geq g(t, \beta(t)), \\ \beta(0) = \beta(T), \quad \beta'(0) \leq \beta'(T). \end{cases}$$

Theorem 2 (Knobloch, 1963) *Siano α una sotto-soluzione e β una sopra-soluzione di (P) tali che $\alpha \leq \beta$. Allora esiste una soluzione x di (P) tale che $\alpha \leq x \leq \beta$.*

Dimostrazione. Sia $\eta : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\eta(t, x) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{se } x \leq \alpha(t), \\ x & \text{se } \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), \\ \beta(t) & \text{se } \beta(t) \leq x, \end{cases}$$

e

$$h(t, x) = g(t, \eta(t, x)) + \eta(t, x) - x.$$

Vediamo che il problema

$$(P)_{mod} \quad \begin{cases} x'' + h(t, x) = 0, \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \end{cases}$$

ha una soluzione. Infatti, scriviamo l'analogo di (7) per il problema $(P)_{mod}$, prendendo $\lambda = -1$:

$$x(\cdot) = (L + I)^{-1}(g(\cdot, \eta(\cdot, x(\cdot))) + \eta(\cdot, x(\cdot))) := \widehat{\mathcal{T}}(x(\cdot)).$$

In questo caso la funzione $\widehat{\mathcal{T}} : X \rightarrow X$ è limitata, per cui esiste una palla B_R tale che $\widehat{\mathcal{T}}(B_R) \subseteq B_R$. Essendo $\widehat{\mathcal{T}}$ completamente continua, il teorema di Schauder ci assicura che essa ha un punto fisso, che è proprio la soluzione di $(P)_{mod}$ che stiamo cercando.

Sia dunque $x(t)$ una soluzione di $(P)_{mod}$. Dimostriamo che $\alpha \leq x$. Poniamo $u = x - \alpha$.

Per assurdo, supponiamo che il minimo di u sia negativo, e sia t_0 un punto di minimo. Se $t_0 \in]0, T[$ allora, essendo $x(t_0) < \alpha(t_0)$,

$$\begin{aligned} 0 \leq u''(t_0) &= x''(t_0) - \alpha''(t_0) = -h(t_0, x(t_0)) - \alpha''(t_0) \\ &= -g(t_0, \alpha(t_0)) - \alpha(t_0) + x(t_0) - \alpha''(t_0) < 0, \end{aligned}$$

una contraddizione. Se invece $t_0 = 0$ o $t_0 = T$, allora u raggiunge il suo minimo sul bordo di $[0, T]$, per cui $u'(0) \geq 0 \geq u'(T)$, ossia

$$x'(0) - \alpha'(0) \geq 0 \geq x'(T) - \alpha'(T).$$

Ma $\alpha'(0) \geq \alpha'(T)$ e $x'(0) = x'(T)$, per cui deve essere $x'(0) = \alpha'(0)$ e $x'(T) = \alpha'(T)$, ossia $u'(0) = u'(T) = 0$. Allora

$$u'(t) = \int_0^t u''(s) ds = \int_0^t (x''(s) - \alpha''(s)) ds = \int_0^t (-h(s, x(s)) - \alpha''(s)) ds,$$

e per $s > 0$ sufficientemente piccolo,

$$-h(s, x(s)) - \alpha''(s) = -g(s, \alpha(s)) - \alpha(s) + x(s) - \alpha''(s) < 0.$$

Quindi $u'(t) < 0$, per $t > 0$ piccolo, una contraddizione col fatto che 0 è punto di minimo di u .

In modo analogo si dimostra che $x \leq \beta$. In conclusione, si ha che x , soluzione di $(P)_{mod}$, soddisfa $\alpha \leq x \leq \beta$, per cui $\eta(t, x) = x$ e x è soluzione di (P). ■

Corollary 1 *Siano α, β due numeri reali tali che $\alpha \leq \beta$ e*

$$g(t, \alpha) \geq 0 \geq g(t, \beta),$$

per ogni $t \in [0, T]$. Allora esiste una soluzione x di (P) tale che $\alpha \leq x \leq \beta$.

Dimostrazione. Basta notare che α è una sotto-soluzione (costante) e β è una sopra-soluzione di (P). ■

Nel caso in cui si possa scrivere $g(t, x) = g(x) - e(t)$, con $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ed $e : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, abbiamo il seguente

Corollary 2 *Siano α, β due numeri reali tali che $\alpha \leq \beta$ e*

$$g(\alpha) \geq e(t) \geq g(\beta), \tag{8}$$

per ogni $t \in [0, T]$. Allora esiste una soluzione x di

$$(Q) \quad \begin{cases} x'' + g(x) = e(t), \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \end{cases}$$

tale che $\alpha \leq x \leq \beta$.

Si noti che l'ipotesi $\alpha \leq \beta$ non è eliminabile. Ad esempio, il problema

$$\begin{cases} x'' + x = \sin t, \\ x(0) = x(2\pi), \quad x'(0) = x'(2\pi), \end{cases}$$

non ha soluzioni, ma $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ soddisfano (8).

Esempi. 1) Il problema

$$\begin{cases} x'' - x^3 = e(t), \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \end{cases}$$

ha soluzione per ogni funzione continua $e(t)$. Basta prendere $\alpha \leq (\min e)^{1/3}$ e $\beta \geq (\max e)^{1/3}$.

2) Così non è per

$$\begin{cases} x'' - \arctan x = e(t), \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Infatti, integrando l'equazione si vede che una condizione necessaria per l'esistenza di una soluzione è che

$$-\frac{\pi}{2} < \bar{e} < \frac{\pi}{2},$$

dove, lo ricordiamo,

$$\bar{e} = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt.$$

Vedremo in seguito che questa è anche una condizione sufficiente. Usando il Corollario 2, si vede che esiste una soluzione se

$$-\frac{\pi}{2} < e(t) < \frac{\pi}{2}, \quad \text{per ogni } t \in [0, T].$$

3) Il problema

$$\begin{cases} x'' + x^2 \sin(x) = e(t), \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \end{cases}$$

ha infinite soluzioni, poiché si possono trovare sotto-soluzioni e sopra-soluzioni costanti arbitrariamente grandi, sia positive che negative.

4) Il pendolo forzato

$$x'' + a \sin x = e(t),$$

con $e(t)$ continua e T -periodica, ha una soluzione T -periodica se

$$-a \leq e(t) \leq a, \quad \text{per ogni } t \in [0, T].$$

Anche qui, in realtà, ci sarebbero infinite soluzioni. Ma è chiaro che, essendo $\sin x$ una funzione 2π -periodica, se $x(t)$ è una soluzione, anche $x(t) + 2\pi k$ è una soluzione, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Nel caso dell'esempio 2, è possibile essere più precisi.

Theorem 3 *Se esiste un $R > 0$ tale che*

$$|x| \geq R \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(x)g(x) \leq \bar{e},$$

allora il problema (Q) ha soluzione.

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che $\bar{e} = 0$ e che

$$|x| \geq R \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(x)g(x) \leq 0.$$

Sia $x_e(t)$ una soluzione di

$$\begin{cases} x'' = e(t), \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Prendendo $\alpha(t) = -k + x_e(t)$, con $k > 0$ sufficientemente grande avremo che $\alpha(t) \leq -R$, per cui

$$-\alpha''(t) = -e(t) \leq g(\alpha(t)) - e(t),$$

per ogni $t \in [0, T]$. Essendo inoltre $\alpha(0) = \alpha(T)$ e $\alpha'(0) = \alpha'(T)$, si ha che α è una sotto-soluzione di (Q).

In modo analogo si vede che, prendendo $\beta(t) = k + x_e(t)$, con $k > 0$ sufficientemente grande, si ha che $\beta(t) \geq R$ per ogni $t \in [0, T]$, e tale β è una sopra-soluzione di (Q). ■

Corollary 3 *Se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è decrescente, allora (Q) ha soluzione se e solo se*

$$\bar{e} \in g(\mathbb{R}).$$

4 Il principio di continuazione

Allo scopo di dimostrare l'esistenza di una soluzione T -periodica del problema (P), introduciamo una famiglia di problemi con un parametro $\sigma \in [0, 1]$:

$$(P_\sigma) \quad \begin{cases} x'' + \hat{g}(t, x; \sigma) = 0, \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T). \end{cases}$$

Qui $\hat{g} : [0, T] \times \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che

$$\hat{g}(t, x; 0) = \lambda x, \quad \hat{g}(t, x; 1) = g(t, x),$$

e si suppone che

$$\lambda \notin \left\{ \left(\frac{2\pi n}{T} \right)^2 : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad (9)$$

In questo modo, il problema corrispondente a $\sigma = 0$ è lineare e ha solo la soluzione nulla, mentre il problema (P) corrisponde al caso in cui $\sigma = 1$.

Theorem 4 (Leray - Schauder, 1934) *Se esiste un $R > 0$ tale che ogni (eventuale) soluzione x di (P_σ) è tale che $\|x\|_\infty < R$, allora (P) ha almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Definiamo inoltre l'operatore di Nemytski $N_\sigma : X \rightarrow X$ in questo modo:

$$(N_\sigma x)(t) = \hat{g}(t, x(t); \sigma).$$

Sappiamo che (P_σ) è equivalente all'equazione

$$Lx = N_\sigma x,$$

che possiamo scrivere come

$$x = (L - \lambda I)^{-1}(N_\sigma - \lambda I)x.$$

Siccome il problema non ha soluzioni sulla frontiera di B_R , abbiamo

$$d(I - (L - \lambda I)^{-1}(N_1 - \lambda I), B_R) = d(I - (L - \lambda I)^{-1}(N_0 - \lambda I), B_R) = d(I, B_R) = 1.$$

Pertanto, esiste un $x \in B_R$ tale che $Lx = N_1x$. ■

5 Oscillatori asimmetrici

Consideriamo l'equazione differenziale scalare

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = e(t), \quad (10)$$

dove $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e T -periodica e μ, ν sono due numeri reali positivi. Qui

$$x^+ = \max\{x, 0\} = \frac{x + |x|}{2}, \quad x^- = \max\{-x, 0\} = \frac{-x + |x|}{2}.$$

Si noti che $x = x^+ - x^-$, mentre $|x| = x^+ + x^-$. Se $\mu = \nu$, abbiamo un'equazione lineare.

Le soluzioni dell'equazione

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = 0 \quad (11)$$

sono tutte periodiche di periodo

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}.$$

Una soluzione è data da

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu}t) & \text{se } t \in \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right], \\ \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\left(\sqrt{\nu}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} - t\right)\right) & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}, \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right], \end{cases}$$

estesa a tutto \mathbb{R} in modo da risultare τ -periodica. Tutte le altre soluzioni di (11) sono del tipo $x(t) = \rho\phi(t + \theta)$, con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, \tau[$.

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\mu x^+ + \nu x^-, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono curve chiuse che circondano l'origine, il quale pertanto è un centro isocrono. Ognuna di queste curve è ottenuta incollando assieme due semi-ellissi, ossia

$$\{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } y^2 + \mu x^2 = c\} \cup \{(x, y) : x \leq 0 \text{ e } y^2 + \nu x^2 = c\},$$

con $c \geq 0$.

Come nel caso lineare si considerano gli autovalori dell'operatore differenziale, così qui possiamo considerare l'insieme Σ delle coppie (μ, ν) per cui l'equazione (11) ha soluzioni T -periodiche non nulle. Si vede allora che Σ contiene, oltre ai due assi cartesiani $\{\mu = 0\}$ e $\{\nu = 0\}$, una successione $(C_N)_{N \geq 1}$ di curve:

$$C_N = \left\{ (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \mu > 0, \nu > 0, N \left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} \right) = T \right\}.$$

L'insieme Σ prende il nome di **spettro di Fucík**.

A differenza dell'equazione lineare, non è pensabile di scrivere le soluzioni T -periodiche di (10) in modo esplicito.

5.1 Non risonanza nonlineare

Theorem 5 (Dancer, 1976) *Se $(\mu, \nu) \notin \Sigma$, allora l'equazione (10) ha almeno una soluzione T -periodica.*

Dimostrazione. Useremo il principio di continuazione. Consideriamo, per $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1]$, il problema (P_σ) , con

$$\hat{g}(t, x; \sigma) = \mu x^+ - \nu x^- - (2\sigma - 1)e(t).$$

Dimostriamo che esiste un $R > 0$ tale che, per ogni soluzione di (P_σ) si ha che $\|x\|_\infty \leq R$. Se così non fosse, esisterebbero una successione $(\sigma_n)_n$ in $[\frac{1}{2}, 1]$ e una corrispondente successione $(x_n)_n$ di soluzioni, con $\|x_n\|_\infty \rightarrow +\infty$. Ponendo $v_n = x_n / \|x_n\|_\infty$, abbiamo che

$$v_n''(t) + \mu v_n^+(t) - \nu v_n^-(t) = \frac{2\sigma_n - 1}{\|x_n\|_\infty} e(t).$$

Ecco che $(v_n)_n$ è limitata in C_T^2 , per cui esistono $(\sigma_{n_k})_k$, e $(v_{n_k})_k$, un numero $\sigma \in [0, 1]$, e una funzione $v \in C_T^1$ tali che $\sigma_{n_k} \rightarrow \sigma$, e $v_{n_k} \rightarrow v$ in C_T^1 . Passando alla formulazione integrale dell'equazione differenziale, si vede allora che $v \in C_T^2$ e

$$v'' + \mu v^+ - \nu v^- = 0.$$

D'altra parte, $\|v\|_\infty = 1$, per cui v è una soluzione non nulla, in contraddizione con l'ipotesi che $(\mu, \nu) \notin \Sigma$.

Ora consideriamo la parte di curva

$$C_{(\mu,\nu)} = \left\{ (u, v) : \frac{\pi}{\sqrt{u}} + \frac{\pi}{\sqrt{v}} = \tau \right\},$$

con $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}$, che va da $((\frac{2\pi}{\tau})^2, (\frac{2\pi}{\tau})^2)$ a (μ, ν) e la parametrizziamo con $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$. Ad esempio, definiamo

$$\sigma \mapsto (\mu(\sigma), \nu(\sigma)) = (\rho(\sigma) \cos \theta(\sigma), \rho(\sigma) \sin \theta(\sigma)),$$

con

$$\begin{aligned} \theta(\sigma) &= (1 - 2\sigma) \frac{\pi}{4} + 2\sigma \arctan\left(\frac{\nu}{\mu}\right), \\ \rho(\sigma) &= \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta(\sigma)}} + \frac{1}{\sqrt{\sin \theta(\sigma)}} \right)^2. \end{aligned}$$

Allora

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mu(\sigma)}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu(\sigma)}} = \tau,$$

per cui il problema

$$\begin{cases} x'' + \mu(\sigma)x^+ + \nu(\sigma)x^- = 0, \\ x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \end{cases}$$

ha solo la soluzione nulla, per ogni $\sigma \in [0, \frac{1}{2}]$. Il principio di continuazione si applica e permette di concludere. ■

Remark 1 Si noti che la soluzione non è necessariamente unica. Ad esempio, prendendo $e(t) = 1$, costante, abbiamo un punto di equilibrio $x = \frac{1}{\mu}$. In un intorno di questo punto, le soluzioni risolvono l'equazione lineare

$$x'' + \mu x = 0$$

e sono pertanto periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. D'altra parte, le soluzioni di grande ampiezza hanno un periodo che si avvicina a τ . Supponiamo che sia $\nu < \mu$. Se n è un intero positivo tale che

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} < \frac{T}{n} < \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}},$$

troviamo in corrispondenza una soluzione T -periodica, di periodo minimo $\frac{T}{n}$. Di tali n ce ne possono essere molti.

Il risultato ottenuto per l'oscillatore asimmetrico si può generalizzare.

Theorem 6 (Drabek - Invernizzi, 1986) *Supponiamo che, per alcune costanti a_1, a_2, b_1, b_2 reali e positive, si abbia*

$$\begin{aligned} a_1 &\leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq b_1, \\ a_2 &\leq \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq b_2, \end{aligned}$$

uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$, e

$$([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) \cap \Sigma = \emptyset.$$

Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.

5.2 Condizioni non bilaterali

Nel risultato seguente il controllo bilaterale sulla funzione $g(t, x)$ è richiesto solo per gli x negativi, mentre per gli x positivi si ha solo il controllo da un lato.

Theorem 7 (Fabry - Habets, 1993) *Supponiamo che, per alcune costanti a_1, a_2, b_2 reali e positive, si abbia*

$$\begin{aligned} a_1 &\leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x}, \\ a_2 &\leq \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq b_2, \end{aligned}$$

uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$. Se

$$\text{dist}([a_1, +\infty[\times [a_2, b_2], \Sigma) > 0,$$

Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.

Corollary 4 (Mawhin - Ward, 1983) *Supponiamo che*

$$\begin{aligned} 0 < a_1 &\leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x}, \\ 0 < a_2 &\leq \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq b_2 < \left(\frac{\pi}{T}\right)^2, \end{aligned}$$

uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$. Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.

Corollary 5 *Supponiamo che*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(t, x)}{x} = +\infty,$$

ed esista un intero $N \geq 1$ tale che, per a_2, b_2 reali e positivi, si abbia

$$\left(\frac{N\pi}{T}\right)^2 < a_2 \leq \liminf_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(t, x)}{x} \leq b_2 < \left(\frac{(N+1)\pi}{T}\right)^2,$$

uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$. Allora il problema (P) ha almeno una soluzione.

Tutti i risultati di questa sezione hanno i loro corrispettivi in cui sono scambiate le ipotesi per $x > 0$ con quelle per $x < 0$.

5.3 Risonanza nonlineare

Torniamo all'equazione (10) e supponiamo stavolta che sia

$$(\mu, \nu) \in \Sigma.$$

Pertanto, T è un multiplo intero di τ . In questo caso si parla di “risonanza nonlineare”.

Scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\mu x^+ + \nu x^- + e(t). \end{cases}$$

Indichiamo con $(x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0))$ la soluzione avente punto iniziale

$$x(0; x_0, y_0) = x_0, \quad y(0; x_0, y_0) = y_0.$$

È quindi ben definita la funzione di Poincaré $\mathcal{P} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in questo modo:

$$\mathcal{P}(x_0, y_0) = (x(T; x_0, y_0), y(T; x_0, y_0)).$$

Vogliamo trovare un punto fisso di \mathcal{P} . A questo scopo, calcoleremo il grado di Brouwer di $\mathcal{P} - I$ sull'insieme

$$\Omega_\varepsilon = \left\{ (r\phi(s), r\phi'(s)) : 0 \leq r < \frac{1}{\varepsilon}, s \in [0, \tau] \right\},$$

con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, dove ϕ è la funzione definita più sopra. Con il cambio di variabili

$$x(t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon} \phi(t + \theta(t)), \quad y(t) = \frac{\rho(t)}{\varepsilon} \phi'(t + \theta(t)),$$

otteniamo

$$\begin{cases} \rho' \phi(t + \theta) + \rho \phi'(t + \theta)(1 + \theta') = \rho \phi'(t + \theta), \\ \rho' \phi'(t + \theta) + \rho \phi''(t + \theta)(1 + \theta') = \\ = -\mu \rho \phi^+(t + \theta) + \nu \rho \phi^-(t + \theta) + \varepsilon e(t), \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} \rho' \phi(t + \theta) + \rho \phi'(t + \theta) \theta' = 0, \\ \rho' \phi'(t + \theta) + \rho \phi''(t + \theta) \theta' = \varepsilon e(t). \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\phi'(t + \theta)$, la seconda per $\phi(t + \theta)$ e sottraendo, otteniamo

$$\rho[\phi'(t + \theta)^2 - \phi(t + \theta)\phi''(t + \theta)]\theta' = -\varepsilon e(t)\phi(t + \theta).$$

Tornando al sistema, moltiplicando la prima equazione per $\phi''(t + \theta)$, la seconda per $\phi'(t + \theta)$ e sottraendo, otteniamo

$$\rho'[\phi(t + \theta)\phi''(t + \theta) - \phi'(t + \theta)^2] = -\varepsilon e(t)\phi'(t + \theta).$$

Essendo, per ogni $s \in \mathbb{R}$,

$$\phi'(s)^2 - \phi(s)\phi''(s) = 1,$$

abbiamo

$$\begin{cases} \theta' = -\varepsilon \frac{1}{\rho} e(t)\phi(t + \theta), \\ \rho' = \varepsilon e(t)\phi'(t + \theta). \end{cases}$$

Sia $(\theta(t; \theta_0), \rho(t; \theta_0))$ la soluzione con punto iniziale $\theta(0; \theta_0) = \theta_0 \in [0, \tau]$, $\rho(0; \theta_0) = 1$. Si vede che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \theta(t; \theta_0) = \theta_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \rho(t; \theta_0) = 1, \quad (12)$$

uniformemente in $t \in [0, T]$ e in $\theta_0 \in [0, \tau]$. Quindi, se $\varepsilon > 0$ è piccolo, allora $\rho(t; \theta_0) > 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

Definiamo la funzione $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in questo modo:

$$\Phi(\theta) = \int_0^T e(t)\phi(t + \theta) dt.$$

Il lemma seguente sarà fondamentale per la stima della funzione di Poincaré.

Lemma 3 *Si ha*⁷

$$\begin{cases} \theta(T; \theta_0) = \theta_0 - \varepsilon \Phi(\theta_0) + o(\varepsilon), \\ \rho(T; \theta_0) = 1 + \varepsilon \Phi'(\theta_0) + o(\varepsilon). \end{cases}$$

Dimostrazione. Usando (12), si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^T \frac{1}{\rho(t)} e(t) \phi(t + \theta(t)) dt = \Phi(\theta_0),$$

e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^T e(t) \phi'(t + \theta(t)) dt = \Phi'(\theta_0),$$

uniformemente rispetto a $\theta_0 \in [0, \tau]$. ■

Introduciamo il vettore

$$\varphi(t) = (\phi(t), \phi'(t)).$$

Deduciamo dal Lemma 3 che, se $(x_0, y_0) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\theta_0)$, allora

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi(\theta_0)\right) &= \frac{\rho(T; \theta_0)}{\varepsilon} \varphi(\theta(T; \theta_0)) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[(1 + \varepsilon \Phi'(\theta_0)) \varphi(\theta_0 - \varepsilon \Phi(\theta_0)) + o(\varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \left[(1 + \varepsilon \Phi'(\theta_0)) (\varphi(\theta_0) - \varepsilon \Phi(\theta_0) \varphi'(\theta_0)) + o(\varepsilon) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \varphi(\theta_0) - \left[\Phi(\theta_0) \varphi'(\theta_0) - \Phi'(\theta_0) \varphi(\theta_0) \right] + \frac{1}{\varepsilon} o(\varepsilon), \end{aligned}$$

per cui

$$(\mathcal{P} - I)\left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi(\theta_0)\right) = -\Phi(\theta_0) \varphi'(\theta_0) + \Phi'(\theta_0) \varphi(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon} o(\varepsilon).$$

Si noti che i due vettori $\varphi'(\theta_0), \varphi(\theta_0)$ costituiscono una base di \mathbb{R}^2 che ruota nel tempo, compiendo una rotazione completa in senso orario nel tempo τ . In questa base, le coordinate di $(\mathcal{P} - I)\left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi(\theta_0)\right)$ sono

$$\left(-\Phi(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon} o(\varepsilon), \Phi'(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon} o(\varepsilon) \right).$$

⁷Usiamo qui la notazione $o(\varepsilon)$ con questo significato: per una certa funzione $R(\varepsilon; \theta_0)$,

$$R(\varepsilon; \theta_0) = o(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} R(\varepsilon; \theta_0) = 0, \quad \text{uniformemente per } \theta_0 \in [0, \tau].$$

Supporremo ora che sia

$$\Phi(\theta_0)^2 + \Phi'(\theta_0)^2 \neq 0, \quad \text{per ogni } \theta_0 \in [0, \tau].$$

Allora, la curva

$$\theta_0 \mapsto (-\Phi(\theta_0), \Phi'(\theta_0))$$

compie, nel tempo τ , un certo numero ζ di rotazioni attorno all'origine, in senso antiorario. Se ε è piccolo, lo stesso avverrà per la curva

$$\theta_0 \mapsto \left(-\Phi(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon}o(\varepsilon), \Phi'(\theta_0) + \frac{1}{\varepsilon}o(\varepsilon) \right),$$

per la proprietà di Rouché. In conclusione, al variare di θ_0 tra 0 e τ , la curva

$$\theta_0 \mapsto (\mathcal{P} - I) \left(\frac{1}{\varepsilon} \varphi(\theta_0) \right)$$

ruota esattamente $1 - \zeta$ volte in senso orario attorno all'origine, per ε sufficientemente piccolo. Abbiamo quindi calcolato il grado:

$$d(\mathcal{P} - I, \Omega_\varepsilon) = 1 - \zeta.$$

Notiamo che la funzione Φ si annulla esattamente 2ζ volte nell'intervallo $[0, \tau[$.

Theorem 8 (Fabry - Fonda, 1998) *Se gli zeri della funzione Φ nell'intervallo $[0, \tau[$ sono tutti semplici ed il loro numero non è esattamente 2, allora (10) ha soluzione.*

Dimostrazione. Da quanto sopra, la funzione Φ si annulla esattamente 2ζ volte nell'intervallo $[0, \tau[$. Se $\zeta \neq 1$, il grado di Brouwer di $\mathcal{P} - I$ sull'insieme Ω_ε è non nullo, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo. Pertanto, $\mathcal{P} - I$ ha almeno uno zero, cioè \mathcal{P} ha almeno un punto fisso. ■

6 Appendice

Sul teorema di Stone–Weierstrass

In questa sezione, supponiamo che E sia uno spazio metrico compatto. Indichiamo con $C(E)$ lo spazio delle funzioni continue $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, dotato della norma

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(u)| : u \in E\}.$$

Ricordiamo che se $(f_n)_n$ è una successione che ha limite in $C(E)$, si dice che $(f_n)_n$ converge uniformemente in E . È ben noto che $C(E)$ è un'algebra, e che oltre alle usuali proprietà della norma, si ha anche la seguente:

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Si può dimostrare che, data una sottoalgebra A di $C(E)$, la sua chiusura \overline{A} è ancora una sottoalgebra di $C(E)$.

Cominciamo con l'esporre il **Teorema di Dini**.

Teorema. *Se $(f_n)_n$ è una successione crescente di funzioni in $C(E)$ e $g \in C(E)$ è tale che $\lim_n f_n(t) = g(t)$, per ogni $t \in E$, allora $\lim_n f_n = g$, uniformemente in E .*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni fissato $x \in E$, esiste un indice $n(x)$ tale che

$$m \geq n(x) \quad \Rightarrow \quad g(x) - f_m(x) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Per la continuità, esiste un intorno aperto $U(x)$ di x tale che

$$u \in U(x) \quad \Rightarrow \quad |g(u) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad |f_{n(x)}(u) - f_{n(x)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ne segue che, per ogni $u \in U(x)$, si ha $g(u) - f_{n(x)}(u) \leq \varepsilon$. Al variare di x in E , tali aperti $U(x)$ ricoprono E , ed essendo E compatto, possiamo trovare un suo sottoricoprimento finito $U(x_1), \dots, U(x_k)$. Sia $\bar{n} = \max\{n(x_1), \dots, n(x_k)\}$. Allora, per ogni $u \in E$, tale u appartiene a uno degli $U(x_i)$ e pertanto, se $n \geq \bar{n}$, si ha che

$$g(u) - f_n(u) \leq g(u) - f_{\bar{n}}(u) \leq g(u) - f_{n(x_i)}(u) \leq \varepsilon.$$

La dimostrazione è così conclusa. ■

Diremo che una sottoalgebra A separa i punti di E se, dati due punti distinti x e y di E , esiste una funzione f in A tale che $f(x) \neq f(y)$. Possiamo ora enunciare il **Teorema di Stone–Weierstrass**.

Teorema. *Se una sottoalgebra A di $C(E)$ contiene le funzioni costanti e separa i punti di E , allora $\bar{A} = C(E)$.*

Per poter dimostrare il teorema, iniziamo con il seguente risultato preliminare.

Lemma. *Esiste una successione $(p_n)_n$ di polinomi $p_n(t)$ che converge uniformemente alla funzione \sqrt{t} nell'intervallo $[0, 1]$.*

Dimostrazione. Definiamo p_n per ricorrenza, ponendo $p_0(t) \equiv 0$, e

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{t - p_n(t)^2}{2}.$$

Dimostriamo per induzione che $p_n(t) \leq \sqrt{t}$, per ogni $t \in [0, 1]$. La disuguaglianza è sicuramente vera se $n = 0$. Supponiamo che valga per un certo n ; allora

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \sqrt{t} - p_n(t) - \frac{t - p_n(t)^2}{2} = \left(\sqrt{t} - p_n(t)\right) \left(1 - \frac{\sqrt{t} + p_n(t)}{2}\right),$$

ed essendo $\frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t)) \leq \sqrt{t} \leq 1$, si conclude che $p_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$, per ogni $t \in [0, 1]$.

Ne segue immediatamente che $p_n(t) \leq p_{n+1}(t)$, per ogni $t \in [0, 1]$, per cui la successione $(p_n)_n$ è crescente e limitata superiormente su $[0, 1]$. Essa ha pertanto un limite $\lim_n p_n(t) = v(t)$, con $t \in [0, 1]$. Passando al limite nell'uguaglianza della definizione della $(p_n)_n$ si ha che

$$v(t) = v(t) + \frac{t - v(t)^2}{2},$$

ed essendo $v(t) \geq 0$, per ogni $t \in [0, 1]$, si conclude che $v(t) = \sqrt{t}$.

Per il teorema di Dini, la convergenza di $(p_n)_n$ a v è uniforme su $[0, 1]$. ■

Esponiamo ora la dimostrazione del Teorema di Stone–Weierstrass, che verrà suddivisa in cinque passi.

Primo passo. Se $f \in \bar{A}$, allora $|f| \in \bar{A}$.

Infatti, se $(p_n)_n$ è la successione di polinomi trovata nel precedente Lemma, consideriamo le funzioni $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, definite da

$$g_n(u) = \|f\|_\infty p_n\left(\frac{f(u)^2}{\|f\|_\infty^2}\right),$$

e notiamo che $|f| = \lim_n g_n$, uniformemente in E . Inoltre, siccome \bar{A} contiene le costanti, le operazioni polinomiali mantengono le funzioni nella sottoalgebra, per cui si ha che $g_n \in \bar{A}$, per ogni n .

Secondo passo. Se $f, g \in \bar{A}$, allora $\inf\{f, g\} \in \bar{A}$ e $\sup\{f, g\} \in \bar{A}$.

Infatti, possiamo scrivere

$$\inf\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2}, \quad \sup\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2},$$

e si conclude usando il primo passo.

Terzo passo. Dati due punti distinti x e y di E , e dati due numeri reali α e β , esiste una funzione f in A tale che $f(x) = \alpha$ e $f(y) = \beta$.

Per ipotesi, esiste una funzione $g \in A$ tale che $g(x) \neq g(y)$. Siccome A contiene le funzioni costanti, prendiamo $f \in A$ così definita:

$$f(u) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{g(u) - g(x)}{g(y) - g(x)}.$$

Quarto passo. Dati $\varepsilon > 0$, $x \in E$ e $f \in C(E)$, esiste una $g \in \bar{A}$ tale che $g(x) = f(x)$, e $g(u) \leq f(u) + \varepsilon$, per ogni $u \in E$.

Infatti, usando il terzo passo, per ogni fissato $z \in E$, esiste una funzione $h_z \in A$ tale che $h_z(x) = f(x)$ e $h_z(z) = f(z)$. Per la continuità, esiste quindi un intorno aperto $V(z)$ di z tale che, per ogni $u \in V(z)$, si ha $h_z(u) \leq f(u) + \varepsilon$. Al variare di z in E , tali aperti $V(z)$ ricoprono E , ed essendo E compatto, possiamo trovare un suo sottoricoprimento finito $V(z_1), \dots, V(z_m)$. Definiamo $g = \inf\{h_{z_1}, \dots, h_{z_m}\}$. Per il secondo passo, abbiamo che $g \in \bar{A}$. Inoltre, g verifica le condizioni richieste.

Quinto passo. Dati $\varepsilon > 0$ e $f \in C(E)$, esiste una $\varphi \in \bar{A}$ tale che $f(u) - \varepsilon \leq \varphi(u) \leq f(u) + \varepsilon$, per ogni $u \in E$.

Infatti, per il quarto passo, per ogni fissato $x \in E$ esiste una funzione $g_x \in \bar{A}$ tale che $g_x(x) = f(x)$ e $g_x(u) \leq f(u) + \varepsilon$, per ogni $u \in E$. Per la continuità, esiste un intorno aperto $U(x)$ di x tale che, per ogni $u \in U(x)$, si ha $g_x(u) \geq f(u) - \varepsilon$. Al variare di x in E , tali aperti $U(x)$ ricoprono E , ed essendo E compatto, possiamo trovare un suo sottoricoprimento finito $U(x_1), \dots, U(x_k)$. Definiamo $\varphi = \sup\{g_{x_1}, \dots, g_{x_k}\}$. Per il secondo passo, abbiamo che $\varphi \in \bar{A}$. Inoltre, φ verifica le condizioni richieste. ■

Come immediata conseguenza, abbiamo il seguente

Corollario. *Se E è un sottoinsieme compatto di \mathbb{R}^N , ogni funzione continua $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ è limite uniforme di una successione di funzioni polinomiali.*

Dimostrazione. È chiaro che l'algebra dei polinomi contiene le costanti. Inoltre, essa separa i punti: presi due punti distinti $x = (x_1, \dots, x_N)$ e $y = (y_1, \dots, y_N)$ di E , si ha che $x_i \neq y_i$ per almeno un indice i , e il polinomio $p(u_1, \dots, u_N) = u_i$ è tale che $p(x) \neq p(y)$. ■

References

- [1] H. Amann and S. A. Weiss, On the uniqueness of the topological degree, Math. Z. 130 (1973), 39–54.
- [2] L. E. J. Brouwer, Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71 (1912), 97–115.
- [3] E.N. Dancer, Boundary-value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations, Bull. Australian Math. Soc. 15 (1976), 321–328.
- [4] P. Drabek e S. Invernizzi, On the periodic boundary value problem for forced Duffing equations with jumping nonlinearity, Nonlinear Analysis 10 (1986), 643–650.
- [5] C. Fabry e A. Fonda, Nonlinear resonance in asymmetric oscillators, J. Differential Equations 147 (1998), 58–78.

- [6] C. Fabry e P. Habets, Periodic solutions of second order differential equations with superlinear asymmetric nonlinearities, Arch. Math. 60 (1993), 266–276.
- [7] S. Fučík, Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems, Reidel, Boston, 1980.
- [8] H. Knobloch, Eine neue Methode zur Approximation periodischer Lösungen nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Z. 82 (1963), 177–197.
- [9] J. Leray e J. Schauder, Topologie et équations fonctionnelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 51 (1934), 45–78.
- [10] J. Mawhin e J.R. Ward, Periodic solutions of some forced Ljapunov differential equations at resonance, Arch. Math. 41 (1983), 337–351.
- [11] M. Spivak, Calculus on Manifolds, Benjamin, Amsterdam, 1965.