

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea in Matematica

GLI INSIEMI FRATTALI:
IL CONCETTO DI DIMENSIONE, L'AUTOSIMILARITÀ, GLI ALGORITMI

Laureando:
Lorenzo Riccardo Scichilone

Relatore:
Prof. Alessandro Fonda

Anno Accademico 2003-2004

Introduzione

Cos'è un frattale? Sembra strano, ma nessuno è ancora riuscito a dare una risposta soddisfacente a questa domanda.

Benoit Mandelbrot viene considerato il padre dei frattali, siccome è stato lui a coniare il termine e a porre le basi per il loro studio, anche se non se ne considera lo scopritore vero e proprio, siccome egli stesso afferma che forme frattali sono presenti ovunque nella natura e nell'arte fin dall'antichità e che sono frattali certi insiemi considerati dai matematici tra la fine del diciannovesimo e l'inizio del ventesimo secolo, spesso accantonati perché considerati patologici.

La parola "frattale", termine coniato nel 1975, deriva dal termine latino "fractus", che significa frammentato, riferendosi all'aspetto visivo di questi insiemi. Lo stesso Mandelbrot evidenziò subito il problema di darne una definizione. All'inizio pose un "tentativo di definizione": frattale è un insieme per il quale la dimensione di Hausdorff è strettamente maggiore della dimensione topologica. Questo fatto ha spesso portato erroneamente a pensare che un insieme frattale debba avere dimensione di Hausdorff non intera (tanto che in molti testi si afferma che il termine "frattale" derivi da "frazione"). Tuttavia vedremo che certi insiemi molto irregolari, che certamente dovrebbero essere pensati come frattali, hanno dimensione di Hausdorff intera.

In seguito sono state poste molte altre definizioni, ma nessuna ha riscosso un'accoglienza unanime.

È famoso un articolo di Mandelbrot del 1967, dal titolo "How long is the coast of Britain", dove egli ha esposto il problema della sensatezza della misurazione delle coste. Infatti si osserva che la lunghezza diventa via via maggiore quanto più aumentiamo la precisione con la quale misuriamo, perché si presentano sempre nuovi dettagli. Per un vero e proprio frattale che sia una curva chiusa, la lunghezza può essere infinita (è il caso dell'"isola di Koch" che esamineremo). Per le coste reali tale lunghezza può non essere computabile, perché continuando a fare ingrandimenti, diventano indefinite (immaginando di procedere con una precisione fino al livello molecolare, diventerebbe un problema determinare quale molecola appartiene alla costa e quale no, senza contare il movimento delle stesse, le onde che rendono ancor più indefinito il confine, l'erosione, l'alta o la bassa marea, come fare in presenza dei delta dei fiumi, eccetera); non ha senso assegnare loro una lunghezza. Casomai si potrebbe cercare di assegnare loro una dimensione (di Hausdorff o una delle tante altre possibili), valutata in modo approssimato con qualche procedimento empirico e considerarle quindi come insiemi frattali.

Questo lavoro si compone di quattro capitoli. Nel primo capitolo verrà introdotto il concetto di dimensione. Nel secondo capitolo tratteremo di autosimilarità con alcuni esempi di classici insiemi frattali autosimiliari. Nel terzo capitolo verranno presentati degli algoritmi per disegnarne alcuni al computer

e nel quarto capitolo si parlerà degli insiemi di Julia e di Mandelbrot, anch'essi corredati da algoritmi.

1 Misura e dimensione

1.1 Alcuni aspetti basilari di teoria della misura

Sia X un insieme qualunque (nel seguito X sarà lo spazio euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n).

Una collezione non vuota \mathcal{S} di sottoinsiemi di X è detta una σ -algebra se \mathcal{S} è chiusa rispetto alla complementazione e alla unione numerabile, cioè

- 1) $E \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus E \in \mathcal{S}$
- 2) $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{S}$.

Si dimostra che una σ -algebra è anche chiusa rispetto all'intersezione numerabile e rispetto alla differenza di insiemi e che X e \emptyset sono in \mathcal{S} .

Il limite inferiore e superiore di una successione di insiemi $\{E_j\}$ sono definiti come

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j=k}^{\infty} E_j \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} E_j = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j.$$

Quindi $\liminf E_j$ consiste di quei punti giacenti in tutti tranne un numero finito di E_j , e $\limsup E_j$ consiste di quei punti in infiniti insiemi E_j .

Se E_j sta nella σ -algebra \mathcal{S} per ogni j allora $\liminf E_j$ e $\limsup E_j \in \mathcal{S}$.

Se $\liminf E_j = \limsup E_j$, scriviamo $\lim E_j$ per il valore comune; ciò accade sempre se $\{E_j\}$ è una successione crescente o decrescente di insiemi.

Sia \mathcal{C} una qualunque collezione di sottoinsiemi di X . La σ -algebra generata da \mathcal{C} , denotata con $\mathcal{S}(\mathcal{C})$, è l'intersezione di tutte le σ -algre contenenti \mathcal{C} .

Si dimostra che $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ è lei stessa una σ -algebra che può essere pensata come "la più piccola" σ -algebra contenente \mathcal{C} .

Una misura μ è una funzione definita su una σ -algebra \mathcal{S} di sottoinsiemi di X e avente valori in $[0, +\infty]$ tale che:

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$
- 2) $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ (1.1)

per ogni successione di insiemi disgiunti $\{E_j\}$ in \mathcal{S} .

Da (1.1) segue che μ è una funzione crescente di insiemi, cioè se $E \subset E'$ e $E, E' \in \mathcal{S}$, allora $\mu(E) \leq \mu(E')$.

Teorema 1.1

Sia μ una misura su una σ -algebra \mathcal{S} di sottoinsiemi di X .

a) se $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ è una successione crescente di insiemi in \mathcal{S} , allora

$$\mu(\lim_{j \rightarrow \infty} E_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j)$$

b) se $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ è una successione decrescente di insiemi in \mathcal{S} e $\mu(F_1) < \infty$, allora

$$\mu(\lim_{j \rightarrow \infty} F_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j)$$

c) per qualsiasi successione di insiemi $\{F_j\}$ in \mathcal{S}

$$\mu(\liminf_{j \rightarrow \infty} F_j) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j).$$

Dimostrazione

a) Si può esprimere $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ come l'unione disgiunta $E_1 \cup \bigcup_{j=2}^{\infty} (E_j \setminus E_{j-1})$.
Da (1.1) segue

$$\begin{aligned} \mu(\lim_{j \rightarrow \infty} E_j) &= \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\ &= \mu(E_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(E_j \setminus E_{j-1}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\mu(E_1) + \sum_{j=2}^k \mu(E_j \setminus E_{j-1}) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(E_1 \cup \bigcup_{j=2}^k (E_j \setminus E_{j-1})\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k). \end{aligned}$$

b) Se $E_j = F_1 \setminus F_j$, allora $\{E_j\}$ è come in a). Siccome $\bigcap_j F_j = F_1 \setminus \bigcup_j E_j$, allora

$$\begin{aligned} \mu(\lim_{j \rightarrow \infty} F_j) &= \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j\right) \\ &= \mu(F_1) - \mu\left(\bigcup_j E_j\right) \\ &= \mu(F_1) - \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (\mu(F_1) - \mu(E_j)) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j). \end{aligned}$$

c) Sia $E_k = \bigcap_{j=k}^{\infty} F_j$. Allora $\{E_k\}$ è una successione crescente di insiemi in \mathcal{S} , quindi per a)

$$\begin{aligned} \mu(\liminf_{j \rightarrow \infty} F_j) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(E_k) \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j). \end{aligned}$$

■

Introduciamo le misure esterne, che sono essenzialmente misure con la proprietà (1.1) indebolita alla subadditività.

Formalmente, una misura esterna ν su un insieme X è una funzione definita su *tutti* i sottoinsiemi di X avente valori in $[0, +\infty]$ tale che:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \nu(\emptyset) = 0 \\ 2) \quad & \nu(A) \leq \nu(A') \text{ se } A \subset A' \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$3) \quad \nu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j) \tag{1.3}$$

per ogni famiglia di sottoinsiemi A_j di X .

Le misure esterne sono utili siccome c'è sempre una σ -algebra di sottoinsiemi sulla quale si comportano come misure; per misure esterne opportunamente definite questa σ -algebra può essere molto grande.

Un sottoinsieme E di X è detto ν -misurabile o misurabile rispetto alla misura esterna ν se essa decompone ogni sottoinsieme di X additivamente, cioè se

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \tag{1.4}$$

per ogni "insieme di prova" $A \subset X$. In realtà, è sufficiente controllare che

$$\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \tag{1.5}$$

siccome la diseuguaglianza opposta è conseguenza di (1.3).

Teorema 1.2

Sia ν una misura esterna. La collezione \mathcal{M} degli insiemi ν -misurabili forma una σ -algebra, e la restrizione di ν ad \mathcal{M} è una misura.

Dimostrazione

$\emptyset \in \mathcal{M}$, quindi \mathcal{M} è non vuoto.

Per la simmetria di (1.4), $A \in \mathcal{M} \Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{M}$. Allora \mathcal{M} è chiuso rispetto alla complementazione. Per provare che \mathcal{M} è chiuso rispetto all'unione numerabile, supponiamo che $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ e sia A un insieme qualsiasi. Applicando (1.4) a E_1, E_2, \dots in successione con opportuni insiemi di prova,

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu(A \cap E_1) + \nu(A \setminus E_1) \\ &= \nu(A \cap E_1) + \nu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \nu(A \setminus E_1 \setminus E_2) \\ &= \sum_{j=1}^k \nu((A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j) + \nu(A \setminus \bigcup_{j=1}^k E_j). \end{aligned}$$

Quindi, per ogni k ,

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^k \nu((A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i) \cap E_j) + \nu(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$$

quindi

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right). \quad (1.6)$$

D'altro canto

$$A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right),$$

quindi, usando (1.3),

$$\begin{aligned} \nu(A) &\leq \nu\left(A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \\ &\leq \nu(A) \end{aligned}$$

considerando (1.6). Segue che $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{M}$, quindi \mathcal{M} è una σ -algebra. Ora siano E_1, E_2, \dots insiemi disgiunti di \mathcal{M} . Prendendo $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ in (1.6), $\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$ e combinando questa con (1.3) vediamo che ν è una misura su \mathcal{M} . ■

Sia (X, d) uno spazio metrico (X sarà di solito per i nostri scopi lo spazio euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n con d la usuale funzione distanza). Gli insiemi appartenenti alla σ -algebra generata dai sottoinsiemi chiusi di X sono detti gli insiemi boreliani dello spazio. I boreliani includono gli aperti (come complementari dei chiusi), gli insiemi F_σ (unioni numerabili di chiusi) e gli insiemi G_δ (intersezioni numerabili di aperti).

Una misura esterna ν su X è detta misura esterna metrica se

$$\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F) \quad (1.7)$$

ogni volta che E ed F sono positivamente distanziati, cioè, ogni qualvolta $\delta(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0$.

Se ν è una misura esterna metrica, allora la collezione degli insiemi ν -misurabili include i boreliani. La dimostrazione è basata sulla seguente versione di un lemma di Carathéodory.

Lemma 1.3

Sia ν una misura esterna metrica su (X, d) . $\{A_j\}$ sia una successione crescente di sottoinsiemi di X con $A = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j$ e supponiamo che $\delta(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$ per ogni j . Allora $\nu(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j)$.

Dimostrazione

È sufficiente provare che $\nu(A) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j)$ dal momento che la disuguaglianza opposta segue da (1.2).

Sia $B_1 = A_1$ e $B_j = A_j \setminus A_{j-1}$ per $j \geq 2$. Se $j + 2 \leq i$ (ossia $j + 1 \leq i - 1$), allora $B_j \subset A_j$ e $B_i \subset A \setminus A_{i-1} \subset A \setminus A_{j+1}$, quindi B_i e B_j sono positivamente distanziati. Quindi, applicando (1.7) $(m - 1)$ volte,

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{k=1}^m B_{2k-1}\right) &= \sum_{k=1}^m \nu(B_{2k-1}), \\ \nu\left(\bigcup_{k=1}^m B_{2k}\right) &= \sum_{k=1}^m \nu(B_{2k}).\end{aligned}$$

Possiamo assumere che entrambe le serie associate convergano (se non convergessero, avremmo $\lim \nu(A_j) = \infty$, dal momento che $\bigcup_{k=1}^m B_{2k-1}$ e $\bigcup_{k=1}^m B_{2k}$ sono entrambe contenute in A_{2m}), quindi la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(B_k)$ converge.

Segue

$$\begin{aligned}\nu(A) &= \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \\ &= \nu\left(A_l \cup \bigcup_{k=l+1}^{\infty} B_k\right) \\ &\leq \nu(A_l) + \sum_{k=l+1}^{\infty} \nu(B_k) \\ &\leq \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\nu(A_l) + \sum_{k=l+1}^{\infty} \nu(B_k)\right).\end{aligned}$$

Siccome $\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} \nu(B_k) = 0$, prendendo l sufficientemente grande la somma può essere resa minore di una qualsiasi quantità positiva assegnata e ne segue che

$$\nu(A) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j).$$

■

Teorema 1.4

Se ν è una misura esterna metrica su (X, d) , allora tutti i sottoinsiemi boreliani di X sono ν -misurabili.

Dimostrazione

Dal momento che gli insiemi ν -misurabili formano una σ -algebra e i boreliani formano la più piccola σ -algebra contenente i sottoinsiemi chiusi di X , è sufficiente provare che (1.5) è verificata quando E è chiuso ed A è arbitrario.

Sia A_j l'insieme dei punti in $A \setminus E$ tali che A_j ed E siano positivamente distanziati di almeno $\frac{1}{j}$. Allora

$\delta(A \cap E, A_j) \geq \frac{1}{j}$, quindi

$\nu(A \cap E) + \nu(A_j) = \nu((A \cap E) \cup A_j) \leq \nu(A)$ per ogni j , essendo ν una misura esterna metrica. La successione di insiemi $\{A_j\}$ è crescente e, siccome E è chiuso, $A \setminus E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j$.

Se $x \in A \setminus E \setminus A_{j+1}$, esiste $z \in E$ con $d(x, z) < \frac{1}{j+1}$, quindi se $y \in A_j$, allora $d(x, y) \geq d(y, z) - d(x, z) > \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0$.

Quindi $\delta(A_j, A \setminus E \setminus A_{j+1}) > 0$.

Quindi, se $\delta(A_j, A \setminus E \setminus A_{j+1}) > 0$ per ogni j , il lemma 1.3 fornisce $\nu(A \setminus E) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j)$ e (1.5) segue da (1.7). \blacksquare

1.2 Misura di Hausdorff

Lavoriamo nello spazio euclideo n -dimensionale, \mathbb{R}^n , anche se molto di quello che diremo è valido in un generico spazio metrico.

Se U è un sottoinsieme non vuoto di \mathbb{R}^n , definiamo il diametro di U come $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$. Poniamo inoltre $|\emptyset| = 0$. Sia $\{U_i\}$ una successione di insiemi. Se $E \subset \bigcup_i U_i$ e $0 \leq |U_i| \leq \delta$ per ogni i , diciamo che $\{U_i\}$ è un δ -ricoprimento di E .

Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia s un numero non negativo. Per $\delta > 0$ definiamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s, \quad (1.8)$$

dove l'inf è calcolato su tutti i δ -ricoprimenti $\{U_i\}$ di E .

Lemma 1.5

\mathcal{H}_δ^s è una misura esterna su \mathbb{R}^n .

Dimostrazione

-Verifichiamo che $\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = 0$.

Un δ -ricoprimento dell'insieme vuoto è costituito dall'insieme vuoto stesso.

Quindi

$$\mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = \inf |\emptyset|^s = \inf 0 = 0.$$

-Verifichiamo che $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(A')$ se $A \subset A'$. Siano

$$S_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_i \text{ ricopre } A \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_i \text{ ricopre } A' \right\}.$$

Siccome $S_2 \subset S_1$, si ha $\inf S_1 \leq \inf S_2$.

Ne discende la tesi.

-Verifichiamo che $\mathcal{H}_\delta^s(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |V_k|^s : \{V_k\}_k \text{ } \delta\text{-ricoprimento di } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |U_{ji}|^s : \{U_{ji}\}_i \text{ } \delta\text{-ricoprimento di } A_j \text{ per ogni } j \right\}. \end{aligned}$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per ogni $j \geq 1$, esiste un δ -ricoprimento $\{U_{ji}\}_i$ di A_j tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_{ji}|^s \leq \mathcal{H}_{\delta}^s(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Mettendo assieme tutti questi $\{U_{ji}\}_i$, per $j = 1, 2, 3, \dots$ si ottiene quindi un δ -ricoprimento di $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ e si ha

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |U_{ji}|^s &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\mathcal{H}_{\delta}^s(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^s(A_j) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathcal{H}_{\delta}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^s(A_j) + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , si deve avere che

$$\mathcal{H}_{\delta}^s\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_{\delta}^s(A_j).$$

■

Lemma 1.6

\mathcal{H}_{δ}^s cresce al decrescere di δ .

Dimostrazione

Se $\delta_1 < \delta_2$ allora ogni δ_1 -ricoprimento è un δ_2 -ricoprimento, quindi se

$$S_1 = \left\{ \sum |U_i|^s : \{U_i\}_i \text{ } \delta_1\text{-ricoprimento} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \sum |U_i|^s : \{U_i\}_i \text{ } \delta_2\text{-ricoprimento} \right\},$$

allora $S_1 \subset S_2$.

Pertanto $\inf S_1 \geq \inf S_2$, cioè $\mathcal{H}_{\delta_1}^s(A) \geq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(A)$ per ogni A .

■

Per ottenere la misura esterna s -dimensionale di Hausdorff di E facciamo tendere δ a 0. Quindi

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_{\delta}^s(E).$$

Il limite esiste, ma potrebbe essere infinito, dal momento che \mathcal{H}_{δ}^s cresce al decrescere di δ .

Lemma 1.7

\mathcal{H}^s è una misura esterna.

Dimostrazione

-Verifichiamo che $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

$$\mathcal{H}^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} 0 = 0.$$

-Verifichiamo che $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(A')$ se $A \subset A'$.

Siccome \mathcal{H}_δ^s è una misura esterna, $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \mathcal{H}_\delta^s(A')$ e quindi $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A')$ che è ciò che volevamo dimostrare.

-Verifichiamo che $\mathcal{H}^s(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(A_j)$.

Siccome \mathcal{H}_δ^s è una misura esterna, $\mathcal{H}_\delta^s(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j)$.

$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j)$.

Se dimostro che $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A_j)$ ho concluso.

Sia S il valore del secondo membro. Posso supporre $S < +\infty$. Per ogni $N \geq 1$, si ha

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathcal{H}_\delta^s(A_j) = \sum_{j=1}^N \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A_j) \leq S.$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Esiste un $\bar{\delta} > 0$ tale che

$$0 < \delta < \bar{\delta} \Rightarrow \sum_{j=1}^N \mathcal{H}_\delta^s(A_j) \leq S + \varepsilon$$

per ogni $N \geq 1$, da cui $\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j) \leq S + \varepsilon$.

Quindi $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j) \leq S + \varepsilon$.

Per l'arbitrarietà di ε , $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_j) \leq S$. ■

Lemma 1.8

\mathcal{H}^s è una misura esterna metrica.

Dimostrazione

Prendiamo E ed F sottoinsiemi di \mathbb{R}^n tali che $\delta(E, F) > 0$. Verifichiamo che $\mathcal{H}^s(E \cup F) = \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$.

Se δ è minore del distanziamento positivo tra E ed F , nessun insieme in un δ -ricoprimento di $E \cup F$ può intersecare entrambi E ed F , quindi $\mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^s(E) + \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Allora $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E \cup F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ che è ciò che volevamo dimostrare. ■

La restrizione di \mathcal{H}^s alla σ -algebra degli insiemi \mathcal{H}^s -misurabili, che per il Teorema 1.4 include i boreliani è detta misura di Hausdorff s -dimensionale.

Si noti che un'equivalente definizione della misura di Hausdorff si ottiene se l'inf in (1.8) è preso sui δ -ricoprimenti di E con insiemi convessi dello stesso diametro. Similmente, talvolta è conveniente considerare δ -ricoprimenti di insiemi aperti o alternativamente chiusi. Sebbene si possa ottenere un diverso valore per \mathcal{H}_δ^s per $\delta > 0$, il valore del limite \mathcal{H}^s è lo stesso. Un altro discorso vale se si vuole prendere l'inf su δ -ricoprimenti costituiti da palle: come dimostrato da Besicovich, la misura potrebbe in questo caso essere diversa.

Lemma 1.9

Per ogni insieme E , $\mathcal{H}^s(E)$ è non crescente al crescere di s da 0 a ∞ . Più precisamente, se $s < t$, allora $\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(E)$.

Dimostrazione

$|U_i| \leq \delta$ per ogni i , cioè $\frac{|U_i|}{\delta} \leq 1$; quindi se $s < t$, si ha $(\frac{|U_i|}{\delta})^s > (\frac{|U_i|}{\delta})^t$, e ne segue che $\delta^{-s}|U_i|^s > \delta^{-t}|U_i|^t$. Quindi,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq \delta^{s-t} \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^t.$$

■

Lemma 1.10

Posto $s < t$, se $\mathcal{H}^t(E)$ è positiva o $+\infty$, allora $\mathcal{H}^s(E)$ è infinita.

Dimostrazione

Si ha

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{s-t} \cdot \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^t(E).$$

Il termine a destra è il prodotto di una quantità che tende a ∞ con una quantità positiva, quindi tende a ∞ e allora $\mathcal{H}^s(E)$ è infinita. ■

1.3 Dimensione di Hausdorff

Se C è un cubo di lato 1 in \mathbb{R}^n , dividendo C in k^n cubetti di lato $\frac{1}{k}$ nella maniera ovvia, notiamo che se $\delta \geq k^{-1}n^{\frac{1}{2}}$, allora $\mathcal{H}_\delta^n(C) \leq k^n(k^{-1}n^{\frac{1}{2}})^n \leq n^{\frac{1}{2}n}$ in modo che $\mathcal{H}^n(C) < \infty$. Quindi se $s > n$, allora $\mathcal{H}^s(C) = 0$ e $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$, dal momento che \mathbb{R}^n si può esprimere come unione numerabile di tali cubi. Ne segue che $0 \leq \dim E \leq n$ per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$.

Come conseguenza del lemma 1.10 e di quanto sopra c'è un unico valore, $\dim E$, tale che $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ se $0 \leq s < \dim E$, $\mathcal{H}^s(E) = 0$ se $\dim E < s < \infty$. Questo valore è detto *dimensione di Hausdorff* di E .

Un insieme \mathcal{H}^s -misurabile $E \subset \mathbb{R}^n$ per il quale $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ è detto un s -insieme; un 1-insieme è a volte detto un insieme linearmente misurabile.

Si possono dimostrare le seguenti proprietà della dimensione di Hausdorff

Monotonia: $E \subset F \Rightarrow \dim E \leq \dim F$

Stabilità: $\dim(E \cup F) = \max(\dim E, \dim F)$

Stabilità numerabile: $\dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim F_i$

Invarianza geometrica: $\dim f(F) = \dim F$ se f è una trasformazione di \mathbb{R}^n come una traslazione, rotazione, similitudine o affinità

Insiemi numerabili: $\dim F = 0$ se F è finito o numerabile

Insiemi aperti: F è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim F = n$

Varietà differenziali: $\dim F = m$ se F è una varietà m -dimensionale.

1.4 Alcune definizioni alternative di dimensione

Per prima cosa devo menzionare la definizione "classica" di dimensione: trattasi della *dimensione topologica*. Essa è sempre un numero naturale.

Un insieme ha dimensione topologica 0 se ogni punto ha intorno arbitrariamente piccoli le cui frontiere non intersecano l'insieme. Un insieme S ha dimensione topologica k se ogni punto in S ha intorno arbitrariamente piccoli le cui frontiere incontrano S in un insieme di dimensione $k - 1$ e k è il minimo intero non negativo per il quale vale ciò.

La *dimensione di conteggio dei box* è una delle dimensioni più largamente usate, siccome è facile calcolarla matematicamente e stimarla empiricamente. È nota anche con altri nomi.

Sia F un qualsiasi sottoinsieme non vuoto limitato di \mathbb{R}^n . Le dimensioni di conteggio dei box inferiore e superiore sono rispettivamente definite come

$$\underline{dim}_b F = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}, \quad \overline{dim}_b F = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta},$$

e, se il limite esiste, la dimensione di conteggio dei box di F è definita da

$$dim_b F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}, \quad (1.9)$$

dove $N_\delta(F)$ è uno qualsiasi dei seguenti:

- 1) il più piccolo numero di insiemi di diametro al massimo δ che ricoprono F ;
- 2) il più piccolo numero di palle chiuse di raggio δ che ricoprono F ;
- 3) il più piccolo numero di cubi di lato δ che ricoprono F ;
- 4) il numero di cubi di una δ -griglia che intersecano F ;
- 5) il più piccolo numero di insiemi di diametro al massimo δ che ricoprono F ;
- 6) il più grande numero di palle disgiunte di raggio δ con centri in F .

Questa lista potrebbe essere ulteriormente estesa; in pratica si adotta la definizione più conveniente per una particolare applicazione.

È importante capire la relazione tra la dimensione di conteggio dei box e quella di Hausdorff. Se F può essere ricoperto da $N_\delta(F)$ insiemi di diametro δ , allora $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s$. Se $1 < \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$, allora $\ln N_\delta(F) + s \ln \delta > 0$ se δ è sufficientemente piccolo. Quindi $s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$ e ne segue che

$$dim F \leq \underline{dim}_b F \leq \overline{dim}_b F$$

per ogni $F \subset \mathbb{R}^n$.

In generale qui non abbiamo l'uguaglianza. Sebbene le due dimensioni siano uguali per molti insiemi "sufficientemente regolari", ci sono molti esempi dove la disuguaglianza è stretta.

La (1.9) ci dice che $N_\delta(F)\delta^s \rightarrow \infty$ se $s < \dim_b F$ e $N_\delta(F)\delta^s \rightarrow 0$ se $s > \dim_b F$. Però

$$N_\delta(F)\delta^s = \inf\left\{\sum_i \delta^s : \{U_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento (finito) di } F\right\},$$

che deve essere comparato con

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_i |U_i|^s : \{U_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } F\right\},$$

che compare nelle definizioni della misura e dimensione di Hausdorff.

Nel calcolare la dimensione di Hausdorff, assegnamo pesi differenti $|U_i|^s$ agli insiemi ricoprenti U_i ; invece per le dimensioni di conteggio dei box usiamo lo stesso peso δ^s per ogni insieme ricoprente; si può pensare che esse indichino l'efficienza con la quale un insieme possa essere ricoperto da piccoli insiemi della stessa grandezza, mentre la dimensione di Hausdorff coinvolge ricoprimenti con insiemi di grandezza piccola ma largamente variabile. Le dimensioni di conteggio dei box non possiedono molte buone proprietà che potremmo aspettarci, tuttavia sono determinate da ricoprimenti con insiemi della stessa grandezza ed allora tendono ad essere più facili da calcolare rispetto alla dimensione di Hausdorff.

La dimensione di conteggio dei box purtroppo presenta dei problemi. Consideriamo a questo scopo il seguente teorema.

Teorema 1.11

Sia \overline{F} la chiusura di F . Allora

$$\underline{\dim}_b \overline{F} = \underline{\dim}_b F, \quad \overline{\dim}_b \overline{F} = \overline{\dim}_b F.$$

Un'immediata conseguenza di questo è che se F è un sottoinsieme denso di una regione aperta di \mathbb{R}^n , allora $\underline{\dim}_b F = \overline{\dim}_b F = n$.

Ad esempio, sia F l'insieme (numerabile) dei numeri razionali tra 0 e 1. Allora \overline{F} è l'intervallo $[0, 1]$ e quindi $\underline{\dim}_b F = \overline{\dim}_b F = 1$. Ne segue che insiemi numerabili possono avere dimensione di conteggio dei box non nulla. La dimensione di conteggio dei box di ogni numero razionale considerato come singolo è chiaramente 0, ma l'unione numerabile di questi singoli ha dimensione 1. Quindi non vale la proprietà della stabilità numerabile. Incontriamo nuove difficoltà anche se ci restringiamo solo agli insiemi chiusi. Ad esempio, $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ è un insieme compatto con $\dim_b F = \frac{1}{2}$, ma nessuno vorrebbe considerarlo un frattale. Tuttavia la dimensione di conteggio dei box ha una certa importanza teorica: se si dimostra che per un insieme coincide con la dimensione di Hausdorff, questo ha delle proprietà particolari.

Un'altro tipo importante di dimensione è la *dimensione del compasso*. Consideriamo la curva C , immagine dell'intervallo $[a, b]$ tramite una biiezione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se C è una curva e $\delta > 0$, definiamo $M_\delta(C)$ come il numero massimo di punti x_0, x_1, \dots, x_m sulla curva C , in quest'ordine, tali che $|x_k - x_{k-1}| = \delta$ per $k = 1, 2, \dots, m$. Quindi $(M_\delta(C) - 1)\delta$ può essere pensato come la lunghezza della curva C misurata con un compasso aperto su un'ampiezza δ . La dimensione del compasso è definita come

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln M_\delta(C)}{-\ln \delta},$$

assumendo che il limite esista (altrimenti potremmo definire le dimensioni del compasso inferiore e superiore usando i limiti inferiore e superiore). Si può dimostrare che per una curva la dimensione del compasso è almeno uguale alla dimensione di conteggio dei box (assumendo che entrambe esistano) e sono uguali anche per semplici figure autosimilari, come la curva di Koch. L'affermazione che la costa della Gran Bretagna ha dimensione 1,2 viene di solito fatta considerando la dimensione del compasso; questo valore empirico deriva da stime per valori di δ compresi tra circa 20m e 200km.

2 Alcuni esempi di frattali e il concetto di autosimilarità

2.1 Curve di dimensione frazionaria

Il miglior modo per ottenere una funzione il cui grafico presenta una struttura frastagliata è di sommare una successione di funzioni che oscillano sempre più velocemente. Quindi se $\sum_{i=1}^n |a_i| < \infty$ e $\lambda_i \rightarrow \infty$, ci si aspetterebbe che la funzione definita dalla serie di funzioni trigonometriche

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sin(\lambda_i x) \quad (2.1)$$

abbia un grafico di dimensione maggiore di 1, se gli a_i ed i λ_i sono scelti opportunamente.

Forse il più noto esempio di questo tipo è la funzione

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} \sin(\lambda^i x),$$

dove $1 < s < 2$ e $\lambda > 1$, costruita da Weierstrass per trovare un esempio di funzione continua ma non differenziabile in alcun punto. Si congettura che la funzione di Weierstrass abbia un grafico di dimensione s . (Sebbene una dimostrazione non sia ancora apparsa in letteratura, si ha notizia di una pre-pubblicazione apparsa in Cina in cui se ne annuncia una prova.)

Per una computazione più semplice è conveniente sostituire la funzione seno in (2.1) con funzioni periodiche lineari a tratti.

Sia g la funzione a "zig-zag" di periodo 4 definita su \mathbb{R} da

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ x - 4 & \text{se } 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

per $0 \leq x < 4$ e che si ripete periodicamente con periodo 4 su tutto \mathbb{R} .

Si può allora dimostrare che il grafico della funzione

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)i} g(\lambda^i x),$$

per $x \in [0, 1]$, dove $1 < s < 2$ e $\lambda > 1$, ha dimensione s .

2.2 Insiemi autosimilari

Molti dei classici insiemi frattali sono autosimilari. Da un punto di vista intuitivo ciò significa che sono formati da parti geometricamente simili all'intera

figura, però in scala ridotta. Figure che presentano caratteristiche di autosimilarità sono presenti già nell'arte antica e, come fa notare Mandelbrot, le possiamo immaginare osservando la natura (ne parla in "The fractal geometry of nature").

Dal punto di vista matematico sono noti insiemi autosimiliari fin dalla fine del diciannovesimo e dall'inizio del ventesimo secolo (li vedremo alla fine di questo capitolo), tuttavia solo verso la fine del ventesimo ci sono stati tentativi di porre la loro teoria su una base sistematica.

Una funzione $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta una contrazione se esiste un $c < 1$ per cui

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq c|x - y| \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Qualsiasi contrazione è una funzione continua. Il minimo valore di c per il quale è soddisfatta questa disuguaglianza per ogni x e y è detto rapporto di contrazione. Una contrazione che trasforma ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^n in un insieme geometricamente simile è detta una similitudine. Quindi una similitudine è composizione di una dilatazione, una rotazione, una traslazione e forse una riflessione; il rapporto di contrazione è quindi semplicemente il fattore di scala della similitudine.

Diciamo che un insieme $E \in \mathbb{R}^n$ è invariante per un insieme di contrazioni ψ_1, \dots, ψ_m se $E = \bigcup_{j=1}^m \psi_j(E)$. Se in più le contrazioni sono similitudini e per qualche s abbiamo $\mathcal{H}^s(E) > 0$ ma $\mathcal{H}^s(\psi_i(E) \cap \psi_j(E)) = 0$ per $i \neq j$, allora E è autosimilare. (Questa condizione sulla misura assicura che le caratteristiche di autosimilarità di E non si perdano tramite sovrapposizioni.)

Se ψ_j (j va da 1 a m) è un insieme di contrazioni, ψ denota la trasformazione di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n definita da

$$\psi(F) = \bigcup_{j=1}^m \psi_j(F).$$

Denotiamo le iterate di ψ nel seguente modo: $\psi^0(F) = F$ e $\psi^{k+1}(F) = \psi(\psi^k(F))$ per $k \geq 0$.

Sia X uno spazio metrico completo con la metrica d . Per ogni sottoinsieme compatto A di X e $\varepsilon > 0$, definiamo l' ε -collare di A come

$$A_\varepsilon = \{x \in X : d(x, y) \leq \varepsilon \text{ per qualche } y \in A\}.$$

Dati due sottoinsiemi compatti A e B di X , la distanza di Hausdorff è

$$d_h(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subset B_\varepsilon \text{ e } B \subset A_\varepsilon\}.$$

Si può dimostrare che lo spazio di tutti i sottoinsiemi compatti non vuoti di X con la distanza di Hausdorff è uno spazio metrico completo.

Teorema 2.1

Dato un insieme di contrazioni $\{\psi_j\}$ (dove j va da 1 a m) su \mathbb{R}^n con rapporti di contrazione $r_j < 1$, esiste un unico insieme compatto non vuoto E tale che $E = \psi(E) = \bigcup_{j=1}^m \psi_j(E)$.

In più, se F è un qualsiasi sottoinsieme compatto non vuoto di \mathbb{R}^n , le iterate $\psi^k(F)$ convergono ad E nella metrica di Hausdorff per $k \rightarrow \infty$.

Dimostrazione

Sia \mathcal{C} la classe di tutti gli insiemi compatti non vuoti di \mathbb{R}^n . Se $F_1, F_2 \in \mathcal{C}$, allora dalla definizione di d_h ,

$$\begin{aligned} d_h(\psi(F_1), \psi(F_2)) &= d_h\left(\bigcup_{j=1}^m \psi_j(F_1), \bigcup_{j=1}^m \psi_j(F_2)\right) \\ &\leq \max_j d_h(\psi_j(F_1), \psi_j(F_2)) \\ &\leq (\max_j r_j) d_h(F_1, F_2). \end{aligned}$$

Siccome $\max_j r_j < 1$, ψ è una contrazione su \mathcal{C} . Secondo il teorema delle contrazioni c'è un unico $E \in \mathcal{C}$ con $\psi(E) = E$ e, in più, $d_h(\psi^k(F), E) \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$ per ogni $F \in \mathcal{C}$. ■

Diciamo che è soddisfatta la condizione di insieme aperto per le contrazioni $\{\psi_j\}$ (dove j va da 1 a m) se esiste un insieme aperto limitato V tale che

$$\psi(V) = \bigcup_{j=1}^m \psi_j(V) \subset V$$

con quest'unione disgiunta. Il seguente teorema ci sarà estremamente utile per il calcolo della dimensione di Hausdorff.

Teorema 2.2

Supponiamo che valga la condizione di insieme aperto per le similitudini ψ_j con rapporti di contrazione r_j ($1 \leq j \leq m$). Allora l'insieme invariante compatto associato E è un s -insieme autosimilare, dove s è determinato da

$$\sum_{j=1}^m r_j^s = 1 \tag{2.2}$$

2.3 Esempi di insiemi autosimilari

a) L'insieme di Cantor

L'insieme risale al 1872.

Partiamo dall'intervallo $F = [0, 1]$. Togliamo l'intervallo aperto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, cioè rimuoviamo il terzo centrale da $[0, 1]$, ma non i punti $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Ciò lascia 2 intervalli: $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, ciascuno di lunghezza $\frac{1}{3}$. Poniamo F_1 la loro unione. Così

è completato il primo passo di costruzione. Adesso ripetiamo il procedimento; rimuoviamo i terzi centrali degli intervalli $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, il che porta a 4 intervalli di lunghezza $\frac{1}{9}$. Chiamiamo F_2 l'unione di questi 4 intervalli. Continuiamo in questo modo. Al passo n -esimo si hanno esattamente 2^n intervalli chiusi di lunghezza $\frac{1}{3^n}$. L'insieme di Cantor è definito da $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Ai fini della sua rappresentazione grafica, però, preferiamo non disegnare i singoli punti, ma linee verticali passanti per i punti dell'insieme al fine di vedere meglio com'è fatto l'insieme.



Un punto x appartiene all'insieme di Cantor se siamo certi che non verrà tolto indipendentemente da quante volte iteriamo il processo. Ovviamente $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}$ sono esempi di tali punti perché sono gli estremi degli intervalli che vengono creati nei passi di costruzione. Si può immaginare che tutti i punti dell'insieme di Cantor siano di questo tipo, ma ciò non è vero. In effetti, esso non è numerabile.

L'insieme di Cantor è autosimilare con rapporto di contrazione $\frac{1}{3}$. Infatti è invariante rispetto alle similitudini dell'asse reale

$$\psi_1(x) = \frac{x}{3}, \quad \psi_2(x) = \frac{x+2}{3}.$$

Verifichiamo che vale la condizione di insieme aperto per ψ_1 e ψ_2 , prendendo come insieme aperto $]0, 1[$.

$$\psi_1(]0, 1[) \cup \psi_2(]0, 1[) =]0, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, 1[\subset]0, 1[.$$

Usiamo il teorema 2.2 per calcolare la dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor. Qui $r_j = \frac{1}{3}$ per $j = 1, 2$. La (2.2) diventa

$$2 \cdot \frac{1}{3^s} = 1,$$

cioè $s = \log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} \simeq 0,631$.

b) Il triangolo e il tappeto di Sierpinski

Il triangolo ed il tappeto furono introdotti nel 1916.

La costruzione del triangolo di Sierpinski è la seguente: iniziamo con un triangolo F nel piano, prendiamo i 3 punti medi dei suoi lati che insieme ai 3 vertici del triangolo definiscono 4 triangoli congruenti di cui togliamo quello centrale. Ciò completa un passo della costruzione. Dopo il primo passo abbiamo 3 triangoli congruenti i cui lati sono la metà dei lati del triangolo di partenza e si toccano in tre punti. Poniamo F_1 la loro unione. Ripetiamo lo stesso procedimento con i 3 triangoli rimasti. Il triangolo di Sierpinski è definito da $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Usiamo il teorema 2.2 per calcolarne la dimensione di Hausdorff. Qui $r_j = \frac{1}{2}$ per $j = 1, 2, 3$. La (2.2) diventa

$$3 \cdot \frac{1}{2^s} = 1,$$

cioè $s = \log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1,585$.

Si può fare un'analoga costruzione nello spazio tridimensionale a partire da un tetraedro. Il frattale corrispondente viene chiamato tetrax. Usiamo il teorema 2.2 per calcolarne la dimensione di Hausdorff.

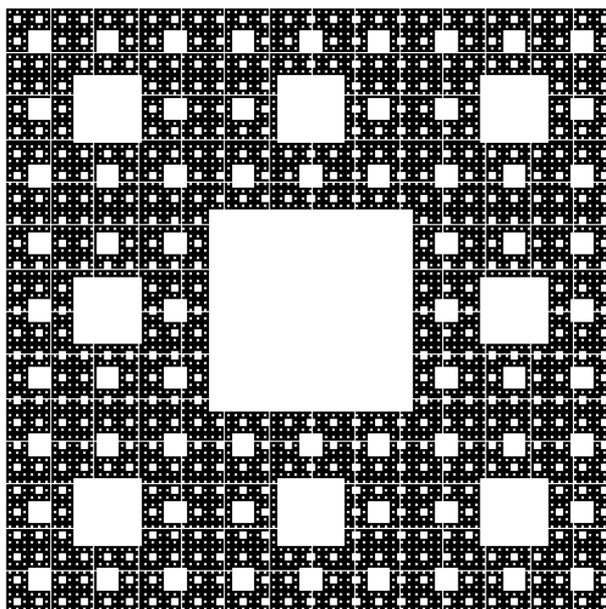
Qui $r_j = \frac{1}{2}$ per $j = 1, \dots, 4$. La (2.2) diventa

$$4 \cdot \frac{1}{2^s} = 1,$$

cioè $s = \log_2 4 = 2$.

Notiamo che la dimensione di Hausdorff è, in questo caso, un numero intero.

La costruzione del tappeto di Sierpinski è la seguente:



Iniziamo con un quadrato nel piano. Suddividiamolo in 9 piccoli quadrati congruenti di cui togliamo quello centrale. Poniamo F_1 l'unione degli 8 quadrati rimasti e ripetiamo il procedimento. Il tappeto di Sierpinski è definito da $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$.

Usiamo il teorema 2.2 per calcolarne la dimensione di Hausdorff. Qui $r_j = \frac{1}{3}$ per $j = 1, \dots, 8$. La (2.2) diventa

$$8 \cdot \frac{1}{3^s} = 1,$$

cioè $s = \log_3 8 = \frac{\ln 8}{\ln 3} \simeq 1,893$.

Si può fare un'analogia costruzione nello spazio tridimensionale a partire da un cubo. Il frattale corrispondente viene chiamato spugna di Menger.

Usiamo il teorema 2.2 per calcolarne la dimensione di Hausdorff. Qui $r_j = \frac{1}{3}$ per $j = 1, \dots, 20$. La (2.2) diventa

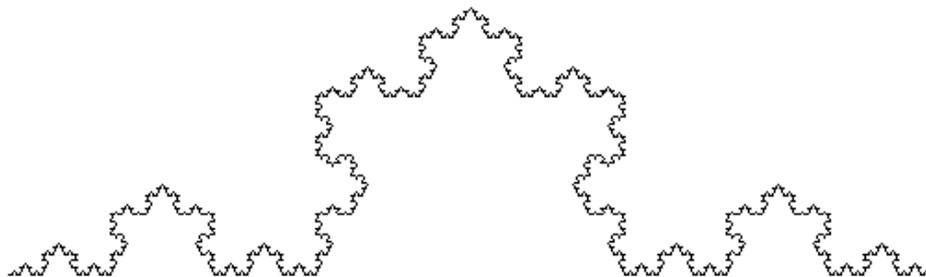
$$20 \cdot \frac{1}{3^s} = 1,$$

cioè $s = \log_3 20 = \frac{\ln 20}{\ln 3} \simeq 2,727$.

c) La curva di Koch

La curva risale al 1904.

La costruzione della curva di Koch è la seguente: partiamo da un segmento (che ad esempio può essere identificato con l'intervallo $[0, 1]$). Dividiamolo in 3 parti uguali e sostituiamo il terzo centrale con 2 lati di un triangolo equilatero di lato il segmento sostituito (il lato mancante è la base). Ciò completa un passo della costruzione. Poniamo F_1 l'unione dei 4 segmenti e ripetiamo il processo con ciascuno di essi. La curva di Koch è definita da $E = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$, dove il limite è inteso nella metrica di Hausdorff.



Koch introdusse questa curva per dare un altro esempio di una scoperta fatta dal matematico tedesco Karl Weierstrass come visto nella sezione 2.1. Egli aveva descritto una curva che non è differenziabile in alcun punto, cioè

non ammette tangente in nessuno dei suoi punti. Se una curva ha uno spigolo, non c'è modo di tracciare un'unica tangente. La curva di Koch è un esempio di curva che in un certo senso è composta da spigoli dappertutto, quindi non c'è modo di definire una tangente in alcuno dei suoi punti.

Mettendo insieme 3 copie della curva di Koch opportunamente ruotate otteniamo una figura che per ovvie ragioni è detta curva a fiocco di neve o isola di Koch.

La curva di Koch è invariante rispetto alle trasformazioni

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{3}(x, y), \\ \psi_2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2} + 1, \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} \right), \\ \psi_3 &= \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} + 2, -\frac{(x-1)\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2} \right), \\ \psi_4 &= \frac{1}{3}(x+2, y).\end{aligned}$$

Il triangolo equilatero aperto di base $]0, 1[$, rivolto verso l'alto (cioè in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$) viene trasformato dalle ψ_1, \dots, ψ_4 in 4 triangoli equilateri aperti disgiunti contenuti nel triangolo di partenza (quindi vale la condizione di insieme aperto).

Usiamo il teorema 2.2 per calcolare la dimensione di Hausdorff della curva di Koch. Qui $r_j = \frac{1}{3}$ per $j = 1, \dots, 4$. La (2.2) diventa

$$4 \cdot \frac{1}{3^s} = 1,$$

cioè $s = \log_3 4 = \frac{\ln 4}{\ln 3} \simeq 1,262$.

Può essere interessante calcolarne la lunghezza, e da essa dedurne la lunghezza della "costa" dell'isola di Koch. Denotiamo con K la lunghezza del segmento di partenza. Allora la lunghezza della curva al k -esimo passo sarà:

$$L_k = 4^k \cdot K \cdot \frac{1}{3^k}$$

e quindi la lunghezza della curva di Koch risulterà:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = \lim_{k \rightarrow \infty} K \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty.$$

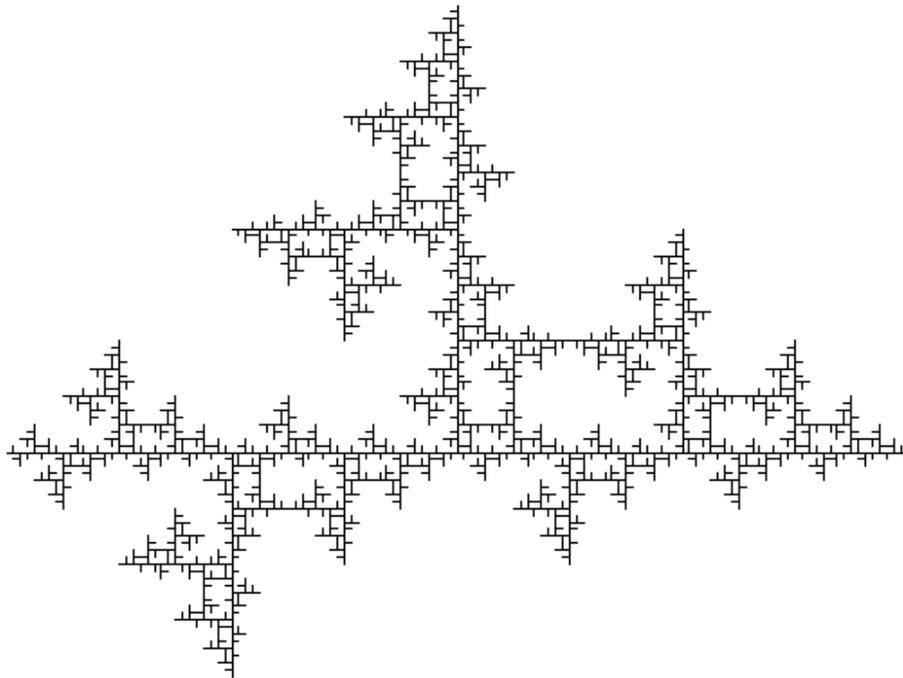
Ne segue che anche la "costa" dell'isola di Koch avrà lunghezza infinita, mentre la sua area sarà finita, siccome è contenuta in una regione limitata del piano.

d) Analizziamo ora un altro insieme frattale, che però non ci risulta avere nessun nome particolare.

La costruzione è la seguente: prendiamo un segmento orizzontale e aggiungiamogli un altro segmento lungo la metà perpendicolarmente verso l'alto

uscende dal punto medio. Possiamo interpretare la figura come 3 segmenti uguali; poniamo F_1 la loro unione. Questo completa il primo passo della costruzione. Su ciascuno dei 3 segmenti ripetiamo la stessa costruzione, stando però attenti al verso nel quale puntano i nuovi segmentini (al primo passo veniva aggiunto un solo segmento ed allora non c'erano problemi): sul segmento di destra il nuovo segmentino punterà verso l'alto, su quello centrale il segmentino punterà verso sinistra e su quello a sinistra il segmentino punterà verso il basso. Poniamo F_2 l'unione di questi nuovi segmentini. Adesso possiamo procedere allo stesso modo stando attenti al verso in cui punteranno.

Il frattale voluto è definito da $E = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$, dove il limite è inteso nella metrica di Hausdorff. In questo caso, $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.



Usiamo il teorema 2.2 per calcolarne la dimensione di Hausdorff. Qui $r_j = \frac{1}{2}$ per $j = 1, 2, 3$. La (2.2) diventa

$$3 \cdot \frac{1}{2^s} = 1,$$

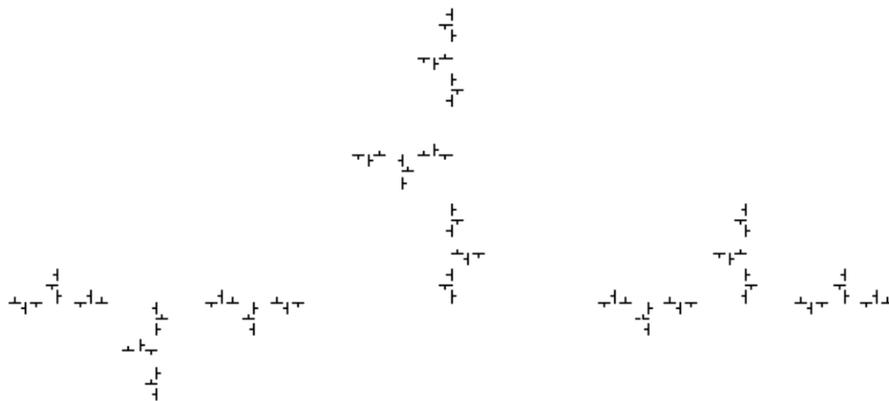
cioè $s = \log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1,585$.

e) Analizziamo ora un altro insieme frattale che non ci risulta avere un nome particolare.

La costruzione è la seguente: prendiamo un segmento orizzontale, "tagliamo" il terzo centrale, ruotiamolo di un angolo retto attorno al suo punto medio,

trasliamolo in modo che un estremo coincida col punto medio del segmento di partenza e che il segmento "appena tagliato" punti verso l'alto. Abbiamo 3 segmenti; poniamo F_1 la loro unione. Questo completa il primo passo della costruzione. Su ciascuno dei 3 segmenti applichiamo il procedimento appena descritto, stando però attenti al verso nel quale puntano i nuovi segmentini (al primo passo veniva tagliato e spostato un solo segmento ed allora non c'erano problemi): sul segmento di destra il nuovo segmentino punterà verso l'alto, su quello centrale il segmentino punterà verso sinistra e su quello a sinistra il segmentino punterà verso il basso. Poniamo F_2 l'unione di questi nuovi segmentini. Adesso possiamo procedere allo stesso modo stando attenti al verso in cui punteranno.

Il frattale voluto è definito da $E = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$, dove il limite è inteso nella metrica di Hausdorff.



Usiamo il teorema 2.2 per calcolarne la dimensione di Hausdorff. Qui $r_j = \frac{1}{3}$ per $j = 1, 2, 3$. La (2.2) diventa

$$3 \cdot \frac{1}{3^s} = 1,$$

cioè $s = \log_3 3 = 1$.

Notiamo che la dimensione di Hausdorff è, in questo caso, un numero intero.

3 Algoritmi per i frattali

Tipicamente i frattali sono costruiti tramite algoritmi (già in teoria), quindi sono adatti ad essere generati da programmi per computer (anzi, è stata proprio l'introduzione dei computers a spianare la via alla ricerca sui frattali).

In particolare, per la maggior parte dei frattali funzionano molto bene gli algoritmi ricorsivi. Vediamo esattamente cosa sono.

Una funzione definita tramite ricorsione ha 2 caratteristiche principali: la condizione base e il passo di riduzione. La condizione base ritorna dei valori (per uno o più "particolari" valori del dominio) senza effettuare alcuna chiamata ricorsiva; di solito si tratta di costanti o comunque di valori facili da calcolare esplicitamente. Il passo di riduzione mette in relazione la funzione calcolata in uno o più valori del dominio con la stessa funzione calcolata in uno o più altri valori del dominio. La successione dei valori del dominio che vengono chiamati nella ricorsione deve convergere ai valori per i quali vale la condizione base, diversamente avremmo una continua chiamata della stessa funzione che impedirebbe la computazione effettiva.

L'esempio per eccellenza di funzione definita tramite ricorsione è il fattoriale.

$$0! = 1$$

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Per il fattoriale la condizione base è $0! = 1$, mentre il passo di riduzione è $n! = n \cdot (n - 1)!$. È ben definito, siccome quando vogliamo calcolare $n!$, ci riferiamo ad $(n - 1)!$ che a sua volta si riferisce ad $(n - 2)!$ e così via, quindi alla fine arriveremo a dover valutare $0!$, il che sappiamo fare.

Adesso dovrebbe risultare più chiaro perché per i frattali vanno bene gli algoritmi ricorsivi; il motivo è legato all'autosimilarità. Volendo disegnare l'iterata k -esima di un frattale, questa si ottiene dall'iterata $(k - 1)$ -esima, la quale si ottiene allo stesso modo dall'iterata $(k - 2)$ -esima e così via, fino ad arrivare alla struttura dalla quale bisogna partire; la condizione base della ricorsione avrà appunto il compito di disegnarla.

Da quel che ho scritto risulta chiaro che ciò che comparirà sullo schermo del computer non sarà il frattale, ma la sua iterata k -esima, infatti la griglia di pixel del computer è discreta e non consente di rappresentare figure con dettagli infinitamente piccoli, senza contare che il computer non può eseguire una computazione infinitamente lunga.

Sebbene i frattali presentino strutture infinitamente complesse, per essi è caratteristico che sono generati da algoritmi estremamente semplici (vale anche per frattali particolari come l'insieme di Mandelbrot e gli insiemi di Julia, i quali non si ottengono esattamente come descritto poco fa) il che in termini informatici si tradurrebbe in programmi di pochissime righe. Ed effettivamente le parti essenziali di tali programmi sono lunghe poche righe, tuttavia molte volte sono necessarie altre istruzioni; il loro numero dipende dal particolare linguaggio di programmazione utilizzato; queste istruzioni di solito definiscono

le variabili ed il loro tipo, inizializzano la grafica, effettuano un cambiamento di coordinate rispetto alle coordinate del computer, definiscono i colori ed eseguono altre operazioni standard. Ciò che ho appena detto vale comunque per programmi grezzi che si limitano a disegnare singoli frattali; il numero di istruzioni aumenta molto aggiungendo "finezze": ad esempio per creare "bottoni" che premuti fanno passare all'iterata successiva, per fare in modo che cliccando col mouse su di un punto, si ottiene un ingrandimento centrato in quel punto (queste 2 operazioni si possono ad esempio implementare in Java), per cambiare i valori dei parametri o semplicemente per ottimizzare gli algoritmi.

Ora passiamo finalmente a degli algoritmi specifici. Per sapere come sono definiti certi frattali, riferirsi alla sezione 2.3. Userò uno pseudocodice di facile comprensione.

Nota: nel seguito le trasformazioni, che denoterò con ψ_1 , ψ_2 , eccetera, non sono esattamente le ψ_i ($1 \leq i \leq m$) del capitolo 2: lì erano le trasformazioni tali che, se denotiamo il frattale con E , allora

$$E = \bigcup_{i=1}^m \psi_i(E).$$

Qui invece sono le trasformazioni che trasformano parti dell'iterata k -esima in parti dell'iterata $(k + 1)$ -esima (avrei potuto chiamarle in modo diverso), tuttavia la loro forma nei 2 casi è simile.

a) L'insieme di Cantor

Scegliendo di rappresentare la versione con le linee verticali (che, avendo un certo spessore durante le iterazioni, vengono trattate come rettangoli), si può procedere come segue per disegnare la k -esima iterata.

Descrizione delle variabili e convenzioni:

x1 - coordinata dell'estremo sinistro di un segmento

x2 - coordinata dell'estremo destro di un segmento

k - iterata

h - altezza di un rettangolo

Se una procedura viene dichiarata ad esempio con "procedura (scalare)=psi1(x)" significa che essa si chiamerà psi1, avrà come parametro x e ritornerà uno scalare.

Se una procedura viene dichiarata ad esempio con "procedura cantor(k,x1,x2)" significa che essa si chiamerà cantor, avrà come parametri k, x1 e x2 e non ritornerà alcunché (ma farà un disegno).

Nella procedura "disegna Rettangolo pieno" il primo argomento rappresenta l'ascissa del lato sinistro di un rettangolo, il secondo la sua larghezza ed il terzo la sua altezza.

Ecco le procedure che definiscono le trasformazioni:

```
procedura (scalare)=psi1(x)
  ritorna x/3;
```

```

procedura (scalare)=psi2(x)
  ritorna (x+2)/3;

```

Ecco la procedura ricorsiva:

```

procedura cantor(k,x1,x2)
  se k=0
    disegna_rettangolo_pieno(x1,x2-x1,h);
  altrimenti
    punto1:=psi1(x1);
    punto2:=psi1(x2);
    punto3:=psi2(x1);
    punto4:=psi2(x2);
    cantor(k-1,punto1,punto2);
    cantor(k-1,punto3,punto4);

```

b) Il tappeto di Sierpinski

Si può procedere come segue per disegnare la k -esima iterata.

Descrizione delle variabili e convenzioni:

x,y - coordinate dell'estremo in alto a sinistra di un quadrato

k - iterata

l - lato di un quadrato

Per le procedure standard valgono analoghe convenzioni come per l'insieme di Cantor.

Nella procedura "disegna_quadrato_pieno" il primo argomento rappresenta l'ascissa del punto in alto a sinistra di un quadrato, il secondo la sua ordinata, il terzo il lato del quadrato.

Ecco le procedure che definiscono le trasformazioni:

```

procedura (vettore a 2 componenti)=psi1(x,y)
  a:=x/3;
  b:=y/3;
  ritorna (a,b);

```

```

procedura (vettore a 2 componenti)=psi2(x,y)
  a:=(x+1)/3;
  b:=y/3;
  ritorna (a,b);

```

```

procedura (vettore a 2 componenti)=psi3(x,y)
  a:=(x+2)/3;
  b:=y/3;

```

```

    ritorna (a,b);

procedura (vettore a 2 componenti)=psi4(x,y)
    a:=x/3;
    b:=(y+1)/3;
    ritorna (a,b);

procedura (vettore a 2 componenti)=psi5(x,y)
    a:=(x+2)/3;
    b:=(y+1)/3;
    ritorna (a,b);

procedura (vettore a 2 componenti)=psi6(x,y)
    a:=x/3;
    b:=(y+2)/3;
    ritorna (a,b);

procedura (vettore a 2 componenti)=psi7(x,y)
    a:=(x+1)/3;
    b:=(y+2)/3;
    ritorna (a,b);

procedura (vettore a 2 componenti)=psi8(x,y)
    a:=(x+2)/3;
    b:=(y+2)/3;
    ritorna (a,b);

```

Ecco la procedura ricorsiva:

```

procedura sierpinski(k,x,y,l)
    se k=0
        disegna_quadrato_pieno(x,y,l);
    altrimenti
        punto1:=psi1(x,y);
        punto2:=psi2(x,y);
        punto3:=psi3(x,y);
        punto4:=psi4(x,y);
        punto5:=psi5(x,y);
        punto6:=psi6(x,y);
        punto7:=psi7(x,y);
        punto8:=psi8(x,y);
        sierpinski(k-1,punto1(1),punto1(2),l/3);
        sierpinski(k-1,punto2(1),punto2(2),l/3);

```

```

sierpinski(k-1,punto3(1),punto3(2),1/3);
sierpinski(k-1,punto4(1),punto4(2),1/3);
sierpinski(k-1,punto5(1),punto5(2),1/3);
sierpinski(k-1,punto6(1),punto6(2),1/3);
sierpinski(k-1,punto7(1),punto7(2),1/3);
sierpinski(k-1,punto8(1),punto8(2),1/3);

```

Per disegnare il triangolo di Sierpinski l'algoritmo è simile.

c) La curva di Koch

Si può procedere come segue per disegnare la k -esima iterata.

Descrizione delle variabili e convenzioni:

x_1, y_1 - coordinate dell'estremo sinistro di un segmento

x_2, y_2 - coordinate dell'estremo destro di un segmento

k - iterata

Per le procedure standard valgono analoghe convenzioni come per l'insieme di Cantor.

Nella procedura "disegna_segmento" gli argomenti rappresentano le coordinate degli estremi del segmento stesso.

Ecco le procedure che definiscono le trasformazioni:

```

procedura (vettore a 2 componenti)=psi1(x,y)
  a:=(x+2*x1)/3;
  b:=(y+2*y1)/3;
  ritorna (a,b);

```

```

procedura (vettore a 2 componenti)=psi2(x,y)
  a:=(x-radice_quadrata(3)*(y-y1)+3*x1+2*x2)/6;
  b:=(radice_quadrata(3)*(x-x1)+y+3*y1+2*y2)/6;
  ritorna (a,b);

```

```

procedura (vettore a 2 componenti)=psi3(x,y)
  a:=(x+radice_quadrata(3)*(y-y2)+8*x1+3*x2)/6;
  b:=(-radice_quadrata(3)*(x-x2)+y+8*y1+3*y2)/6;
  ritorna (a,b);

```

```

procedura (vettore a 2 componenti)=psi4(x,y)
  a:=(x+2*x2)/3;
  b:=(y+2*y2)/3;
  ritorna (a,b);

```

Ecco la procedura ricorsiva:

```

procedura koch(k,x1,y1,x2,y2)

```

```
se k=0
    disegna_segmento(x1,y1,x2,y2);
altrimenti
    punto1:=psi1(x1,y1);
    punto2:=psi1(x2,y2);
    punto3:=psi2(x1,y1);
    punto4:=psi2(x2,y2);
    punto5:=psi3(x1,y1);
    punto6:=psi3(x2,y2);
    punto7:=psi4(x1,y1);
    punto8:=psi4(x2,y2);
    koch(k-1,punto1(1),punto1(2),punto2(1),punto2(2));
    koch(k-1,punto3(1),punto3(2),punto4(1),punto4(2));
    koch(k-1,punto5(1),punto5(2),punto6(1),punto6(2));
    koch(k-1,punto7(1),punto7(2),punto8(1),punto8(2));
```

4 Gli insiemi di Julia e di Mandelbrot

Gli insiemi di Julia e di Mandelbrot sono costruiti in modo completamente diverso dai frattali "classici" e hanno caratteristiche diverse, ad esempio non sono autosimilari (anche se l'insieme di Mandelbrot presenta delle caratteristiche di quasi autosimilarità). Continuiamo a chiamarli frattali perché questi ultimi, nonostante tutto, presentano la tipica struttura frastagliata che si mantiene ad ogni possibile ingrandimento. Riguardo a tutto ciò è interessante la seguente citazione (tradotta) di Benoit Mandelbrot.

"Nell'insieme di Mandelbrot la natura (o è la matematica?) ci fornisce una potente controparte visuale dell'idea musicale di "tema e variazione": le stesse forme si ripetono ovunque, anche se ogni ripetizione è in qualche misura differente. Sarebbe stato impossibile scoprire questa proprietà dell'iterazione se fossimo stati limitati al calcolo a mano, e penso che nessuno sarebbe stato sufficientemente brillante o ingegnoso da "inventare" questi ricchi e complicati temi e variazioni. Non ci lasciano annoiare in alcun modo, siccome appaiono nuove cose tutto il tempo, e nemmeno perderci, siccome tornano indietro cose famigliari ancora e ancora. A causa di questa costante novità questo insieme non è veramente frattale secondo la maggior parte delle definizioni; possiamo chiamarlo un frattale al confine, un frattale limite che contiene molti frattali. Comparato con i veri frattali, le sue strutture sono più numerose, le sue armonie sono più ricche e la sua "inaspettatezza" è più inaspettata."

L'insieme di Mandelbrot è chiamato anche "multifrattale", cioè una composizione di frattali, ciascuno con la propria dimensione di Hausdorff, anche se non si sa se questa definizione è del tutto legittima.

4.1 Gli insiemi di Julia

Ci interessa studiare le iterazioni della funzione $z \rightarrow z^2 + c$ definita sui numeri complessi.

Ricordiamo a questo scopo una formula. Siano z e w due numeri complessi, scriviamoli in coordinate polari:

$$\begin{aligned}z &= |z|(\cos \phi + i \sin \phi), \\w &= |w|(\cos \psi + i \sin \psi).\end{aligned}$$

Allora il loro prodotto è

$$z \cdot w = |z| \cdot |w|(\cos(\phi + \psi) + i \sin(\phi + \psi)).$$

Ne segue che per ogni intero positivo n vale $z^n = |z|^n(\cos(n\phi) + i \sin(n\phi))$.

Quindi, geometricamente, elevare al quadrato un numero complesso z significa che il modulo di z viene elevato al quadrato e che l'anomalia (l'angolo) viene raddoppiata modulo 2π .

Per cominciare, supponiamo $c = 0$. Chiaramente, se prendiamo un numero complesso con modulo minore di 1 e applichiamo iterativamente la funzione $z \rightarrow z^2$ infinite volte, otterremo numeri complessi con modulo sempre minore e che quindi tenderanno al numero complesso $0+0i$; se facciamo lo stesso con un numero complesso con modulo maggiore di 1, otterremo numeri complessi con modulo sempre maggiore e che quindi scapperanno all'infinito; se facciamo lo stesso con un numero complesso con modulo esattamente 1, otterremo numeri complessi con modulo sempre uguale a 1.

Il piano complesso è quindi diviso in 2 regioni: per i numeri complessi dentro la circonferenza unitaria, la successione rimane limitata e quindi chiamiamo questa regione insieme di intrappolamento I ; per i numeri complessi fuori dalla circonferenza unitaria la successione scappa all'infinito e quindi chiamiamo questa regione insieme di fuga F . La frontiera comune di I ed F è la circonferenza unitaria ed è detta insieme di Julia di parametro complesso c uguale a 0. L'insieme di Julia è invariante rispetto all'iterazione presa in esame. Notiamo che l'insieme di intrappolamento può essere interpretato come bacino di attrazione del punto 0 e che ci sono 2 punti fissi: 0 e 1. 1 però è un punto repulsivo, cioè se iniziamo l'iterazione vicino ad 1, ci allontaniamo da esso sempre di più. Effettivamente, quello che abbiamo visto finora è un caso particolare. L'orbita z_0, z_1, z_2, \dots del punto iniziale z_0 è data da

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

L'insieme di fuga per il parametro c è

$$F_c = \{z_0 : |z_n| \rightarrow \infty \text{ per } n \rightarrow \infty\}.$$

L'insieme di intrappolamento per il parametro c è

$$I_c = \{z_0 : z_0 \notin F_c\}$$

(è il complementare di F_c).

L'insieme di Julia per il parametro c è la frontiera dell'insieme di fuga F_c . Ai fini della computazione effettiva dobbiamo trovare un metodo per scoprire se un'orbita di punto iniziale z_0 scapperà all'infinito. Esso è dato dal seguente lemma.

Lemma 4.1

Sia z_0 un numero complesso tale che $|z_0| \geq |c|$ e $|z_0| > 2$. Allora z_0 scapperà all'infinito per effetto dell'iterazione di $z \rightarrow z^2 + c$.

Dimostrazione

Fissiamo il valore di c e consideriamo che valgono $|z_0| \geq |c|$ e $|z_0| > 2$. Allora esiste un numero positivo $\varepsilon > 0$ con $|z_0| = 2 + \varepsilon$. La disuguaglianza triangolare per i numeri complessi implica

$$|z_0^2| = |z_0^2 + c - c| \leq |z_0^2 + c| + |c|.$$

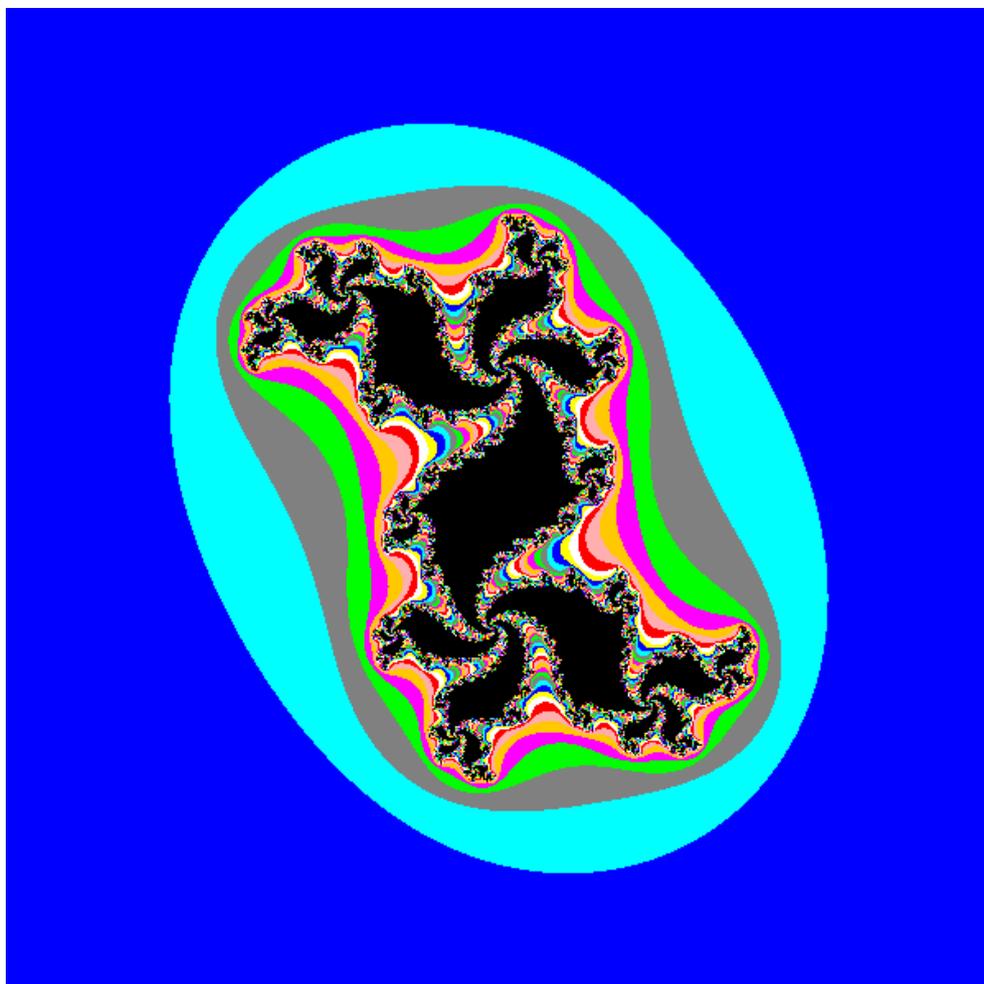
Ora,

$$|z_0^2 + c| \geq |z_0^2| - |c| = |z_0|^2 - |c| \geq |z_0|^2 - |z_0| = (|z_0| - 1)|z_0| = (1 + \varepsilon)|z_0|.$$

Quindi se iteriamo una volta, il modulo aumenterà di un fattore $1 + \varepsilon$. La k -esima iterata avrà modulo almeno $(1 + \varepsilon)^k$ volte il modulo di z_0 . Quindi il modulo tende all'infinito e allora z_0 sta nell'insieme di fuga. ■

Corollario 4.2

Se, iterando $z \rightarrow z^2 + c$, un punto z_k dell'orbita soddisfa le condizioni $|z_k| \geq |c|$ e $|z_k| > 2$, l'orbita scappa all'infinito. In particolare il punto iniziale dell'orbita z_0 sta nell'insieme di fuga.



Ora vediamo un algoritmo per disegnare gli insiemi di Julia. Siccome di solito i computers non lavorano direttamente con i numeri complessi, scriviamo la formula dell'iterazione nelle componenti reale ed immaginaria.

L'iterazione è $z_{k+1} = z_k^2 + c$, con

$$z_k = x_k + y_k i, \quad c = a + b i.$$

Quindi,

$$\begin{aligned}z_k^2 + c &= (x_k + y_k i)^2 + a + bi \\ &= x_k^2 - y_k^2 + 2x_k y_k i + a + bi \\ &= x_k^2 - y_k^2 + a + (2x_k y_k + b)i\end{aligned}$$

Descrizione delle variabili e convenzioni:

x,y - parti reale ed immaginaria di z

modqz - modulo al quadrato di z

xtemp - variabile che tiene temporaneamente il valore di x

xmin, xmax - minimo e massimo valore che può assumere x nella griglia di pixel

ymin, ymax - minimo e massimo valore che può assumere y nella griglia di pixel

a,b - parti reale ed immaginaria di c

px, py - passi dei quali ci muoviamo nella griglia di pixel lungo le direzioni delle ascisse e delle ordinate

n - numero massimo di iterazioni

maxcol - numero massimo di colori (stiamo supponendo di possedere un elenco finito di colori)

Con k mod maxcol indico il resto della divisione tra k e maxcol

Algoritmo:

```
imposta sfondo nero
per i che va da xmin ad xmax con passo px
  x:=i;
  per j che va da ymin ad ymax con passo py
    y:=j;
    per k che va da 1 ad n con passo 1
      xtemp:=quadrato(x)-quadrato(y)+a;
      y:=2*x*y+b;
      x:=xtemp;
      modqz:=quadrato(x)+quadrato(y);
      se modqz>4
        scegli_colore(k mod maxcol);
        disegna_punto(x,y);
        esci dal ciclo;
      fine del terzo ciclo "per"
    x:=i;
  fine del secondo ciclo "per"
fine del primo ciclo "per"
```

Il programma scritto sopra assume che se non si verifica mai la condizione che ci assicura che la successione diverge entro il numero massimo di iterazioni,

allora il punto appartiene all'insieme di Julia. Ciò in generale non è vero, ma senza questo accorgimento dovremmo effettuare infinite iterazioni per tutti i punti appartenenti all'insieme di Julia della griglia di pixel. Più è grande il numero massimo di iterazioni, più il disegno è preciso.

Ho usato una variabile temporanea perché diversamente il calcolo di $2xy + b$ sarebbe risultato errato, in quanto il valore di x sarebbe già stato aggiornato. Ho confrontato i quadrati dei moduli dei numeri complessi per evitare l'operazione radice in modo da velocizzare l'algoritmo.

Gli insiemi di Julia, a seconda del valore del parametro c , sono di 2 tipi: connessi (formati da un pezzo) o totalmente sconnessi (le componenti connesse sono formate da singoli punti, l'aspetto visivo è una "polvere").

Come ultima cosa voglio nominare un diverso tipo di insiemi di Julia. Finora li abbiamo costruiti a partire dai numeri complessi e quindi si trovavano nel piano. Si possono costruire anche a partire da quaternioni, cioè numeri a 4 componenti, introdotti nel 1843 dal fisico e matematico irlandese William R. Hamilton. Essi sono della forma $x = a + bi + cj + dk$, dove j e k sono 2 nuove unità immaginarie e a, b, c, d sono le 4 componenti del quaternione. Per i quaternioni valgono quasi tutte le regole per i numeri complessi a parte per la moltiplicazione che non è commutativa.

Le unità immaginarie soddisfano alle seguenti regole:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k$$

$$jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j.$$

Un insieme di Julia costruito sui quaternioni, ristretto al piano complesso, prendendo c complesso, è identico ad un insieme di Julia tradizionale.

4.2 L'insieme di Mandelbrot

L'insieme di Mandelbrot è certamente il frattale più popolare, probabilmente il più popolare oggetto della matematica contemporanea in assoluto. Certe persone affermano che non è solo il più bello, ma anche il più complesso oggetto mai visto. Da quando Mandelbrot fece il suo straordinario esperimento nel 1979, è stato riprodotto da decine di migliaia di scienziati amatoriali nel mondo. Abbiamo visto che gli insiemi di Julia sono generati dall'iterazione di $z \rightarrow z^2 + c$ e che per ogni c abbiamo un diverso insieme di Julia. Abbiamo anche visto che per certi parametri c l'insieme di Julia è connesso e per altri è totalmente sconnesso. Nel 1979 Mandelbrot ebbe l'idea di rappresentare graficamente questa dicotomia facendo variare i parametri c nel piano complesso. Così definì in questo modo l'insieme di Mandelbrot:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ è connesso} \}.$$

Decise di colorare di nero tutti i punti di questo insieme, di bianco gli altri. Ottenne un'immagine che non sembrò proprio stupefacente a causa della tecnologia grafica disponibile allora (nonostante Mandelbrot lavorasse all'IBM e fossero all'avanguardia in questo campo). Tuttavia Mandelbrot intuì di aver scoperto qualcosa di importante e allora approfondì un ramo della matematica che fu lasciato in disparte per circa 60 anni (cioè da quando Julia e Fatou studiarono ciò che oggi chiamiamo gli insiemi di Julia; essi non si resero conto di quanto fossero complicati questi insiemi, perché non potevano disegnarli a mano). Mandelbrot utilizzò il seguente risultato per computare se un parametro c appartiene o meno al suo insieme.

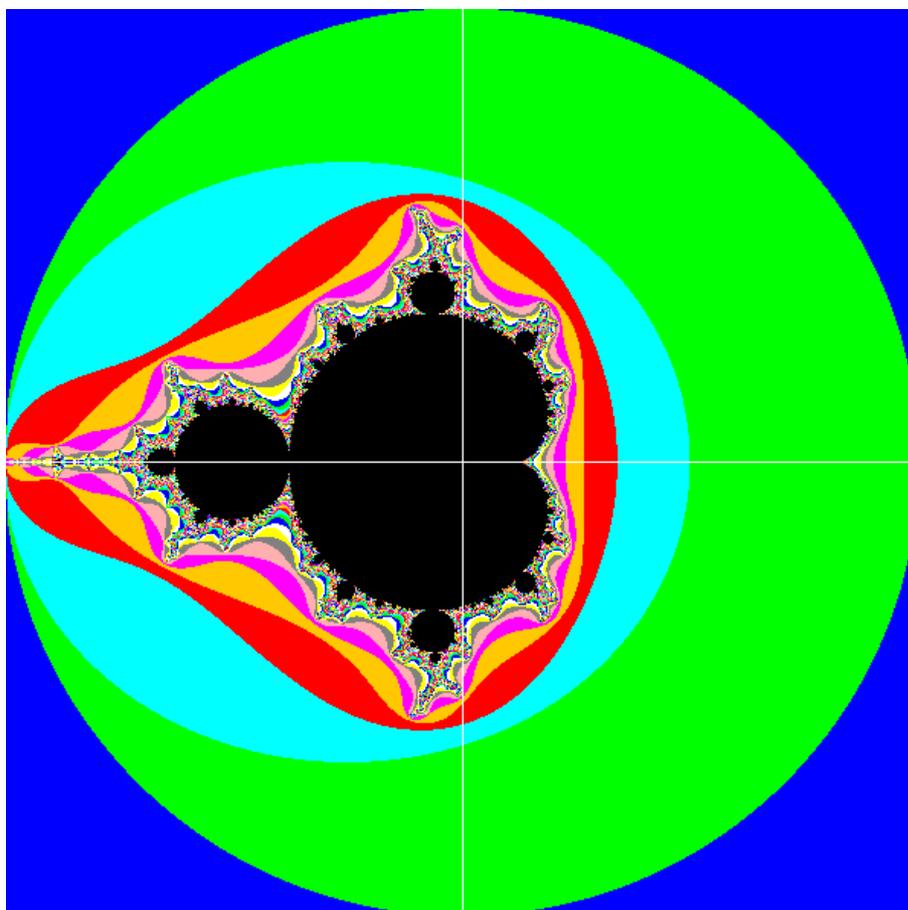
Lemma 4.3

L'insieme di intrappolamento I_c è connesso se e solo se l'orbita $0 \rightarrow c \rightarrow c^2 + c \rightarrow (c^2 + c)^2 + c \dots$ (scegliendo $z_0 = 0$) è limitata.

Questo porta ad una definizione alternativa dell'insieme di Mandelbrot:

$$M = \{c \in \mathbb{C} : c \rightarrow c^2 + c \rightarrow (c^2 + c)^2 + c \dots \text{ è limitata} \}.$$

Mandelbrot utilizzò proprio questa per i suoi esperimenti del 1979.



Mentre l'insieme di Julia è la parte del piano dei valori iniziali z_0 le cui orbite risiedono nello stesso piano complesso, l'insieme di Mandelbrot è nel piano dei parametri c e non è opportuno disegnare alcuna orbita in questo piano.

Possiamo subito dire che tutto ciò che sta fuori dal disco di raggio 2 non fa parte dell'insieme di Mandelbrot, perché se $|c| > 2$, allora la successione scappa all'infinito secondo il lemma 4.1 ed il corollario 4.2.

L'insieme di Mandelbrot non è autosimilare, ma si trovano in esso piccole copie dell'insieme stesso, anche se tutte un po' diverse. Potremmo dire che l'insieme di Mandelbrot è "quasi" autosimilare.

Ora vediamo un algoritmo per disegnare l'insieme di Mandelbrot.

Descrizione delle variabili e convenzioni:

x, y - parti reale ed immaginaria di z

$\text{mod}qz$ - modulo al quadrato di z

x_{temp} - variabile che tiene temporaneamente il valore di x

a, b - parti reale ed immaginaria di c

$a_{\text{min}}, a_{\text{max}}$ - minimo e massimo valore che può assumere a nella griglia di pixel

$b_{\text{min}}, b_{\text{max}}$ - minimo e massimo valore che può assumere b nella griglia di pixel

p_x, p_y - passi dei quali ci muoviamo nella griglia di pixel lungo le direzioni delle ascisse e delle ordinate

n - numero massimo di iterazioni

maxcol - numero massimo di colori (stiamo supponendo di possedere un elenco finito di colori)

Con $k \bmod \text{maxcol}$ indico il resto della divisione tra k e maxcol

Algoritmo:

```
imposta sfondo nero
per a che va da amin ad amax con passo px
  per b che va da bmin ad bmax con passo py
    x:=0;
    y:=0;
    per k che va da 1 ad n con passo 1
      xtemp:=quadrato(x)-quadrato(y)+a;
      y:=2*x*y+b;
      x:=xtemp;
      modqz:=quadrato(x)+quadrato(y);
      se modqz>4
        scegli_colore(k mod maxcol);
        disegna_punto(a,b);
        esci dal ciclo;
    fine del terzo ciclo "per"
```

```
    fine del secondo ciclo "per"  
fine del primo ciclo "per"
```

Valgono le stesse note che ho scritto per il programma per l'insieme di Julia.

Bibliografia

M. F. Barnsley, R. L. Devaney, B. B. Mandelbrot, H.-O. Peitgen, D. Saupe e R. F. Voss, *The Science of Fractal Images*, Springer, New York 1988.

R. L. Devaney, *Chaos, Fractals and Dynamics: Computer experiments in Mathematics* (videocassetta), New York 1989.

R. L. Devaney, *Transition to Chaos: the orbit diagram and the Mandelbrot Set* (videocassetta), New York 1990.

G. A. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer, New York 1990.

K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

K. J. Falconer, *Fractal Geometry - Mathematical Foundations and Applications*, Wiley and Sons, New York 1997.

H.-O. Peitgen, H. Jürgens e D. Saupe, *Fractals for the Classroom* (due volumi), Springer, New York 1992.

H.-O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe e C. Zahlten, *I Frattali Illustrati da E. Lorenz e B. B. Mandelbrot* (videocassetta), Le Scienze, Roma 1991.

Siti internet

R. Sedgewick e K. Wayne, www.cs.princeton.edu/introcs/27recursion/

E. Stepp e K. Shirriff, www.non.com/news.answers/fractal-faq.html

Liceo Scientifico Statale "Paolo Frisi", www.miorelli.net/frattali