Analisi Matematica I - modulo B

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica, a.a. 2009/2010

1 Il campo dei numeri complessi

1.1 Definizioni e prime proprietà

Consideriamo l'insieme

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R}\}\,,$$

che spesso si indica con $\mathbb{R}^2$. Definiamo un'operazione di "addizione":

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')\,.$$

Si verificano le seguenti proprietà:

a) (associativa) $(a, b) + ((a', b') + (a'', b'')) = ((a, b) + (a', b')) + (a'', b'')\,;$
b) esiste un "elemento neutro" $(0, 0)$: si ha $(a, b) + (0, 0) = (a, b)\,;$
c) ogni elemento (a, b) ha un "opposto" $-(a, b) = (-a, -b)$: si ha

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)\,;$$

d) (commutativa) $(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)\,;$

Definiamo un'operazione di "moltiplicazione":

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')\,.$$

Si può verificare che valgono le seguenti proprietà:

a) (associativa) $(a, b) \cdot ((a', b') \cdot (a'', b'')) = ((a, b) \cdot (a', b')) \cdot (a'', b'')\,;$
b) esiste un "elemento neutro" $(1, 0)$: si ha $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)\,;$
c) ogni elemento $(a, b) \neq (0, 0)$ ha un "reciproco" $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}\,, \frac{-b}{a^2+b^2})$: si ha

$$(a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}\,, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)\,;$$

d) (commutativa) $(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b)\,;$
e) (distributiva) $(a, b) \cdot ((a', b') + (a'', b'')) = ((a, b) \cdot (a', b')) + ((a, b) \cdot (a'', b''))\,.$

(Nel seguito, ometteremo spesso di scrivere il "$\cdot$"). In questo modo, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ risulta essere un campo, che verrà indicato con $\mathbb{C}$ e si dirà il "campo complesso". I suoi elementi si chiameranno "numeri complessi".

Si può pensare $\mathbb{C}$ come un'estensione di $\mathbb{R}$ in questo modo: si identificano tutti gli elementi della forma $(a, 0)$ con il corrispondente numero reale a. Le operazioni di somma e moltiplicazione indotte su $\mathbb{R}$ sono effettivamente quelle preesistenti:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)\,,$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)\,.$$

Notiamo che vale la seguente uguaglianza:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0)\,.$$

È allora conveniente introdurre un nuovo simbolo per indicare l'elemento $(0, 1)$. Scriveremo

$$(0, 1) = i\,.$$

In questo modo, avendo identificato $(a, 0)$ con a e $(b, 0)$ con b, possiamo scrivere

$$(a, b) = a + ib\,.$$

Posto $z = a + ib$, il numero a si dice "parte reale" di z e si scrive $a = Re(z)$. Il numero b si dice "parte immaginaria" di z e si scrive $b = Im(z)$.

Osserviamo ora che si ha

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1\,.$$

Usando questa semplice informazione, possiamo verificare che valgono le usuali proprietà simboliche formali: ad esempio,

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')\,.$$

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')\,.$$

1.2 la formula di De Moivre

Se $z = a + ib$, si introduce il "modulo" di z:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,,$$

Dati due numeri complessi z e z', si può verificare che

$$|zz'| = |z|\,|z'|\,.$$

In particolare, se $z = z'$, si ha

$$|z^2| = |z|^2\,.$$

Ne segue per induzione che, per $n \in \mathbb{N}$,

$$|z^n| = |z|^n .$$

Inoltre, se $z \neq 0$, essendo $|z^{-1}z| = 1$, si ha

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} .$$

Dato un numero complesso $z = a + ib$, si introduce il numero $z^* = a - ib$, detto il "complesso coniugato" di z. Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^* ; \\
(z_1 z_2)^* &= z_1^* z_2^* ; \\
z^{**} &= z ; \\
zz^* &= |z|^2 ; \\
Re(z) &= \frac{1}{2}(z + z^*) ; \\
Im(z) &= \frac{1}{2i}(z - z^*) .
\end{aligned}$$

Se $z \neq 0$, è

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} .$$

Ogni numero complesso $z \neq 0$ si può scrivere come $z = |z| \frac{z}{|z|}$. Indicheremo con ρ il modulo di z; Siccome $\frac{z}{|z|}$ appartiene alla circonferenza unitaria, esiste un unico $\theta \in [0, 2\pi[$ per cui $\frac{z}{|z|} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Tale θ si dice "argomento principale" di z e si indica con $Arg(z)$. Avremo quindi

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta) .$$

In realtà ogni θ che verifichi questa relazione si chiama "argomento" di z. Due argomenti dello stesso numero complesso differiscono quindi per un multiplo intero di 2π.

Dati due numeri complessi

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta), \quad z' = \rho'(\cos\theta' + i \sin\theta') ,$$

avremo che

$$\begin{aligned}
zz' &= \rho\rho'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')] \\
&= \rho\rho'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')] .
\end{aligned}$$

Quindi, moltiplicando due numeri complessi, gli argomenti corrispondenti si sommano. In particolare,

$$z^2 = \rho^2[\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)] ,$$

e, per induzione,

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] .$$

Come caso particolare, per $\rho = 1$, abbiamo la **formula di De Moivre**:

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) .$$

1.3 La risoluzione delle equazioni algebriche

Affrontiamo ora il problema dell'esistenza delle radici n-esime di un numero complesso z. Scriviamo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e consideriamo l'equazione

$$u^n = z\,,$$

con $n \geq 1$. Cerchiamo le soluzioni u nella forma $u = r(\cos\phi + i\sin\phi)$. Usando la formula di De Moivre si avrà:

$$r^n(\cos(n\phi) + i\sin(n\phi)) = \rho(cos\theta + i\sin\theta))\,,$$

per cui

$$r^n = \rho\,, \qquad n\phi = \theta + 2\pi k\,,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Allora sarà

$$r = \sqrt[n]{\rho}\,, \qquad \phi = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\,.$$

Si noti però che gli argomenti ϕ di questo tipo individuano solamente n angoli distinti che, al variare di k in $\mathbb{Z}$, si ripetono ciclicamente con periodo n. In conclusione, le radici n-esime di z sono in numero di n e si possono scrivere come segue:

$$u = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, ..., n-1\,.$$

Possiamo ora considerare un'equazione del secondo grado

$$Au^2 + Bu + C = 0\,,$$

dove A, B, C sono numeri complessi fissati, con $A \neq 0$. Come facilmente si vede, l'equazione è equivalente a

$$\left(u + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}\,.$$

Ponendo $v = u + \frac{B}{2A}$ e $z = \frac{B^2-4AC}{(2A)^2}$, ci si riconduce al problema delle radici seconde che abbiamo già risolto.

Per concludere, consideriamo l'equazione più generale

$$A_n u^n + A_{n-1}u^{n-1} + ... + A_1 u + A_0 = 0\,,$$

dove $A_0, A_1, ..., A_n$ sono numeri complessi fissati, con $A_n \neq 0$. In altri termini, vogliamo trovare le radici di un polinomio a coefficienti complessi. Il seguente teorema, che enunciamo senza dimostrazione, è noto come **teorema fondamentale dell'algebra**.

Teorema. *Ogni polinomio di grado $n \geq 1$ ha, nel campo complesso, almeno una radice.*

Il problema di trovare una formula generale che fornisca le radici è però tutt'altro che facile. Lo abbiamo affrontato nel caso $n = 2$ e si può risolvere anche se $n = 3$ o 4. Se $n \geq 5$, però, è stato dimostrato che non esiste alcuna formula algebrica generale che fornisca una radice del polinomio.

2 Serie numeriche

2.1 Introduzione e prime proprietà

Data una successione $(a_k)_k$ di numeri reali o complessi, chiameremo "serie numerica" (ad essa associata) la successione $(s_n)_n$ così definita:

$$\begin{aligned}
&s_0 = a_0 \, , \\
&s_1 = a_0 + a_1 \, , \\
&s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \, , \\
&\; ... \\
&s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \, , \\
&\; ...
\end{aligned}$$

La terminologia differisce da quella delle successioni, in generale, essenzialmente per motivi di tradizione. Il numero a_k si dice "termine $k-$esimo", mentre $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ si dice "somma parziale $n-$esima" della serie. Nel caso in cui esiste il limite di $(s_n)_n$ ed è un numero S (reale o complesso), si dice che la serie "converge". In tal caso, il numero S si dice "somma della serie" e si scrive

$$S = \lim_n \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) = \sum_{k=0}^\infty a_k \, ,$$

o talvolta anche

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

Se si tratta di una serie a termini reali e $\lim_n s_n = +\infty$, si dice che la serie "diverge a $+\infty$". Analogamente per il caso $-\infty$. Se la successione $(s_n)_n$ non ha limite, si dice che la serie è "indeterminata".

Con un abuso di notazioni, si usa spesso indicare la serie stessa con i simboli

$$\sum_{k=0}^\infty a_k \, , \qquad \text{oppure} \qquad a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \, ,$$

rischiando di confondere la serie con la sua eventuale somma. Seguendo la tradizione, ci adegueremo anche noi a queste notazioni. Talvolta, per brevità, scriveremo semplicemente $\sum_k a_k$.

Esempi. 1) Per $\alpha \in \mathbb{R}$, la "serie geometrica"

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + ... + \alpha^n + ...$$

ha termine $k-$esimo $a_k = \alpha^k$. Se $\alpha \neq 1$, la somma parziale $n-$esima vale

$$s_n = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1} \, ,$$

mentre se $\alpha = 1$, si ha $s_n = n+1$. Quindi la serie converge se e solo se $|\alpha| < 1$, nel qual caso la sua somma è

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}\,.$$

Se $\alpha \geq 1$, la serie diverge a $+\infty$. Se $\alpha \leq -1$, la serie è indeterminata.

2) La "serie di Mengoli"

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} + \ldots$$

ha termine $k-$esimo $a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Essa è di tipo "telescopico":

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots$$

Si vede quindi che gli addendi si elidono a due a due, e la somma parziale $n-$esima è, semplicemente,

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+2}\,,$$

per cui $\lim_n s_n = 1$. In altri termini, la serie converge e ha somma 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = 1\,.$$

Naturalmente, possiamo anche scrivere, equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} = 1\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1\,,$$

o usare diverse altre varianti, legate alla notazione di sommatoria.

3) La "serie armonica"

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \ldots$$

ha termine $k-$esimo $a_k = \frac{1}{k+1}$. Essa diverge. Lo si può vedere scrivendola in questo modo:

$$\begin{aligned} 1 &+ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \\ &+ \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \ldots\,, \end{aligned}$$

raggruppando prima due termini, poi quattro, poi otto, poi sedici e così via, raddoppiando di volta in volta. È facile vedere ora che le somme nelle parentesi danno un risultato che è sempre maggiore di $\frac{1}{2}$. La successione delle somme parziali (che è strettamente crescente) dovrà quindi tendere a $+\infty$. Talvolta si scrive

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty\,.$$

Teorema. *Se una serie $\sum_k a_k$ converge, allora*

$$\lim_n a_n = 0\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Sia $\lim_n s_n = S$ un numero reale o complesso. Allora anche $\lim_n s_{n-1} = S$, da cui

$$\lim_n a_n = \lim_n (s_n - s_{n-1}) = \lim_n s_n - \lim_n s_{n-1} = S - S = 0\,.$$

■

Enunciamo una semplice conseguenza della proprietà associativa e distributiva di addizione e moltiplicazione.

Teorema. *Supponiamo che le due serie $\sum_k a_k$ e $\sum_k b_k$ convergano e abbiano somma A e B, rispettivamente. Allora converge anche la serie $\sum_k (a_k + b_k)$ e la sua somma vale $A + B$. Inoltre, per ogni numero fissato α, converge anche la serie $\sum_k (\alpha a_k)$ e la sua somma vale αA. Scriveremo brevemente*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Siano $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ e $s'_n = \sum_{k=0}^n b_k$. Allora

$$s_n + s'_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\,, \qquad \alpha s_n = \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k)\,,$$

da cui segue la tesi. ■

Raramente si ha la fortuna di riuscire a calcolare la somma di una serie, se questa esiste. Molto spesso, ci si accontenta di stabilire se la serie converge o meno. Se la serie converge, si potrà forse trovare in un secondo tempo una stima numerica della sua somma.

Ricordiamo che la serie $\sum_k a_k$ converge se esiste il limite $\lim_n s_n$, ed è un numero (reale o complesso). Possiamo allora fare la seguente considerazione.

Se modifichiamo solo un numero finito di termini di una serie, otteniamo una nuova serie con la seguente proprietà: essa converge se e solo se converge la serie di partenza.

2.2 Serie a termini reali

Sono particolarmente importanti le serie a termini reali positivi. Se per ogni k si ha che a_k è reale e $a_k \geq 0$, la successione $(s_n)_n$ è crescente e pertanto ha limite. In questo caso, la serie ha due sole alternative: o converge, o diverge a $+\infty$. È molto utile il seguente **criterio del confronto**.

Teorema. *Siano* $\sum_k a_k$ *e* $\sum_k b_k$ *due serie a termini reali tali che*

$$\exists \bar{k} : \quad k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq a_k \leq b_k \,.$$

Possiamo affermare che:
a) se la serie $\sum_k b_k$ *converge, allora converge anche la serie* $\sum_k a_k$ *;*
b) se la serie $\sum_k a_k$ *diverge, allora diverge anche la serie* $\sum_k b_k$ *.*

Dimostrazione. Poniamo

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \,, \qquad s'_n = b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_n \,.$$

Dimostriamo a). Se la serie $\sum_k b_k$ converge, esiste il limite

$$\lim_n s'_n = S' \in \mathbb{R} \,.$$

Usando la considerazione fatta in precedenza, possiamo modificare un numero finito di termini nelle due serie e supporre che sia $0 \leq a_k \leq b_k$, per ogni k. Allora anche

$$s_n \leq s'_n \,,$$

per ogni n. Inoltre, la successione $(s_n)_n$ è crescente e pertanto ha limite. Da quanto sopra, $\lim_n s_n \leq S'$, per cui la serie $\sum_k a_k$ converge.

Veniamo alla dimostrazione di b): siccome la successione $(s'_n)_n$ è crescente, essa ha limite. Quindi, se la serie $\sum_k b_k$ non diverge, allora essa converge. Ma allora, per a), anche $\sum_k a_k$ converge. ■

Esempio. La serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots$$

converge. Lo si vede confrontandola con la serie

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \ldots \,,$$

ottenuta dalla serie di Mengoli aggiungendo all'inizio l'addendo 1. Si verifica immediatamente che i termini della prima sono tutti minori o uguali ai termini della seconda.

Come primo corollario, abbiamo il **criterio del confronto asintotico**.

Corollario 1. *Siano* $\sum_k a_k$ *e* $\sum_k b_k$ *due serie a termini reali e positivi tali che esista il limite*

$$\ell = \lim_k \frac{a_k}{b_k}\,.$$

Si possono verificare tre casi:
1. $\ell \in]0,+\infty[$*; allora le due serie convergono o divergono contemporaneamente.*
2. $\ell = 0$*; se la serie* $\sum_k b_k$ *converge, allora converge anche la serie* $\sum_k a_k$*.*
3. $\ell = +\infty$*; se la serie* $\sum_k b_k$ *diverge, allora diverge anche la serie* $\sum_k a_k$*.*

Dimostrazione. 1. Se $\ell \in]0,+\infty[$, esiste un $\bar{k}$ tale che

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3\ell}{2}\,,$$

ossia

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad a_k \leq \frac{3\ell}{2}\, b_k \quad \text{e} \quad b_k \leq \frac{2}{\ell}\, a_k\,.$$

La conclusione segue allora dal criterio di confronto.
2. Se $\ell = 0$, allora esiste un $\bar{k}$ tale che, se $k \geq \bar{k}$, allora $a_k \leq b_k$. Si applica quindi direttamente il criterio di confronto.
3. È analogo al caso 2, con i ruoli di a_k e b_k scambiati. ■

Il seguente corollario ci fornisce il cosiddetto **criterio del rapporto**.

Corollario 2. *Sia* $\sum_k a_k$ *una serie a termini reali e positivi per cui esista il limite*

$$L = \lim_k \frac{a_{k+1}}{a_k}\,.$$

Se $L < 1$, *allora la serie converge.*

Dimostrazione. Fissiamo un $\alpha \in]L,1[$. Allora esiste un $\bar{k}$ tale che

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \alpha\,.$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
&a_{\bar{k}+1} \leq \alpha a_{\bar{k}} \\
&a_{\bar{k}+2} \leq \alpha a_{\bar{k}+1} \leq \alpha^2 a_{\bar{k}} \\
&a_{\bar{k}+3} \leq \alpha a_{\bar{k}+2} \leq \alpha^3 a_{\bar{k}} \\
&\dots \\
&a_{\bar{k}+m} \leq \alpha a_{\bar{k}+m-1} \leq \alpha^m a_{\bar{k}} \\
&\dots,
\end{aligned}$$

ossia, con un cambio di indici,

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad a_k \leq \alpha^{k-\bar{k}} a_{\bar{k}} = \frac{a_{\bar{k}}}{\alpha^{\bar{k}}}\, \alpha^k\,.$$

La conclusione segue per confronto con la serie geometrica di base α, che converge, essendo $0 < \alpha < 1$. ■

In modo simile si dimostra il cosiddetto **criterio della radice**.

Corollario 3. *Sia* $\sum_k a_k$ *una serie a termini reali e positivi per cui esista il limite*

$$L = \lim_k \sqrt[k]{a_k} \, .$$

Se $L < 1$, *allora la serie converge.*

Dimostrazione. Fissiamo un $\alpha \in]L, 1[$. Allora esiste un $\bar{k}$ tale che

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[k]{a_k} \leq \alpha \, ,$$

ossia

$$k \geq \bar{k} \quad \Rightarrow \quad a_k \leq \alpha^k \, ,$$

La conclusione segue per confronto con la serie geometrica di base α, che converge, essendo $0 < \alpha < 1$. ■

Vediamo ora il **criterio di condensazione**. Si tratta di un procedimento che già abbiamo usato nel trattare la serie armonica.

Teorema. *Se* $(a_k)_k$ *è una successione decrescente di numeri positivi, allora le due serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, , \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$$

convergono o divergono contemporaneamente.

Dimostrazione. Per semplicità, tralasciamo il termine a_0. Supponiamo che la serie $\sum_k 2^k a_{2^k}$ converga. Si ha:

$$\begin{aligned}
& a_1 + (a_2 + a_3) \leq a_1 + 2a_2 \\
& a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 \\
& a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \\
& \quad +(a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17}) \leq \\
& \quad \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \\
& \dots
\end{aligned}$$

Per confronto, si vede che anche la serie $\sum_k a_k$ converge.

Supponiamo ora che la serie $\sum_k a_k$ converga. Allora

$$\begin{aligned}
& a_1 + 2a_2 \leq 2(a_1 + a_2) \\
& a_1 + 2a_2 + 4a_4 \leq 2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4)) \\
& a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \leq 2(a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8)) \\
& \dots
\end{aligned}$$

Per confronto, siccome $\sum_k 2a_k$ converge, anche la serie $\sum_k 2^k a_{2^k}$ converge. ■

Esempio 1. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}\,.$$

La successione $(a_k)_k$, con $a_k = 1/k^\beta$, è decrescente se $\beta > 0$. La "serie condensata" è

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\beta})^k\,.$$

È una serie geometrica di ragione $\alpha = 2^{1-\beta}$. Essa converge se e solo se $\alpha < 1$. Quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\beta} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta > 1\,.$$

Esempio 2. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta}\,.$$

Facendo uso del calcolo differenziale, si dimostra che la successione $(a_k)_k$, con $a_k = 1/k(\ln k)^\beta$, è decrescente se $\beta > 0$. La "serie condensata" è

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\ln 2^k)^\beta} = \frac{1}{(\ln 2)^\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\beta}\,.$$

Da quanto visto nell'Esempio 1, si ha:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta > 1\,.$$

Consideriamo ora una serie a termini di segno alternato:

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n + \ldots\,,$$

dove gli a_k sono reali e positivi. Abbiamo il seguente **criterio di Leibniz**.

Teorema. *Se $(a_k)_k$ è una successione decrescente di numeri positivi e*

$$\lim_k a_k = 0\,,$$

allora la serie $\sum_k (-1)^k a_k$ converge.

<u>Dimostrazione</u>. Sia

$$s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n\,,$$

la successione delle somme parziali. Consideriamo le due sottosuccessioni di $(s_n)_n$ ottenute prendendo i termini con indice pari o i termini con indice dispari, rispettivamente. Siccome $(a_k)_k$ è positiva e decrescente, si ha:

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \quad \ldots \quad \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0 \,.$$

Pertanto, la successione $(s_{2m+1})_m$ con gli indici dispari è crescente e limitata superiormente, mentre la successione $(s_{2m})_m$ con gli indici dispari è decrescente e limitata inferiormente. Quindi, esse hanno entrambe un limite reale:

$$\lim_m s_{2m+1} = \ell_1 \,, \qquad \lim_m s_{2m} = \ell_2 \,.$$

D'altra parte,

$$\ell_1 - \ell_2 = \lim_m (s_{2m+1} - s_{2m}) = \lim_m (-a_{2m+1}) = 0 \,,$$

per cui $\ell_1 = \ell_2$. Ne segue che anche la successione $(s_n)_n$ ha lo stesso limite. ■

2.3 Serie a termini complessi

Consideriamo una successione $(s_n)_n$ di numeri complessi; scriveremo

$$s_n = \sigma_n + i\tau_n$$

dove σ_n, τ_n sono reali (parte reale e parte immaginaria di s_n).

Teorema. *La successione $(s_n)_n$ ha limite in $\mathbb{C}$ se e solo se le successioni $(\sigma_n)_n$ e $(\tau_n)_n$ hanno limite in $\mathbb{R}$. In tal caso, si ha:*

$$\lim_n s_n = \lim_n \sigma_n + i \lim_n \tau_n \,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che esista il limite $\lim_n s_n$ e che sia un numero complesso $S = S_1 + iS_2$. Voglio far vedere che $\lim_n \sigma_n = S_1$ e $\lim_n \tau_n = S_2$. Fisso $\varepsilon > 0$. Essendo $\lim_n s_n = S$, esiste un $\bar{n}$ tale che

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |s_n - S| < \varepsilon \,.$$

In altri termini

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(\sigma_n - S_1)^2 + (\tau_n - S_2)^2} < \varepsilon \,.$$

Da questo segue che

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |\sigma_n - S_1| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\tau_n - S_2| < \varepsilon \,,$$

per cui $\lim_n \sigma_n = S_1$ e $\lim_n \tau_n = S_2$.

Supponiamo ora che esistano i limiti $\lim_n \sigma_n$, $\lim_n \tau_n$ e che siano due numeri reali S_1 e S_2, rispettivamente. Fisso $\varepsilon > 0$. Essendo $\lim_n \sigma_n = S_1$, esiste un $\bar{n}_1$ tale che

$$n \geq \bar{n}_1 \quad \Rightarrow \quad |\sigma_n - S_1| < \varepsilon\,.$$

Essendo $\lim_n \tau_n = S_2$, esiste un $\bar{n}_2$ tale che

$$n \geq \bar{n}_2 \quad \Rightarrow \quad |\tau_n - S_2| < \varepsilon\,.$$

Ponendo $\bar{n} = \max\{\bar{n}_1, \bar{n}_2\}$, da quanto sopra segue che

$$n \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |s_n - (S_1 + iS_2)| = \sqrt{(\sigma_n - S_1)^2 + (\tau_n - S_2)^2} < \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon\,,$$

e questo è sufficiente per affermare che $\lim_n s_n = S_1 + iS_2$. ■

Corollario. *Se $a_k = x_k + iy_k$, con x_k e y_k reali, la serie $\sum_k a_k$ converge se e solo se convergono le serie $\sum_k x_k$ e $\sum_k y_k$. In tal caso, la somma della serie è data da*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + i \sum_{k=0}^{\infty} y_k\,.$$

Dimostrazione. Sia $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Allora

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (x_k + iy_k) = \sum_{k=0}^{n} x_k + i \sum_{k=0}^{n} y_k\,.$$

Pertanto, si ha $s_n = \sigma_n + i\tau_n$, dove $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ è la parte reale di s_n e $\tau_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$ è la sua parte immaginaria. Usando il teorema precedente, si ha la tesi. ■

Esempio. Consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k+1} = 1 + \frac{i}{2} - \frac{1}{3} - \frac{i}{4} + \frac{1}{5} + \frac{i}{6} - \frac{1}{7} - \frac{i}{8} + \dots + \frac{i^n}{n+1} + \dots\,.$$

La serie delle parti reali è

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\,,$$

mentre quella delle parti immaginarie è

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots\,.$$

Entrambe convergono, per il criterio di Leibniz sulle serie reali a segni alternati. Quindi anche la serie di partenza converge.

2.4 Serie assolutamente covergenti

Iniziamo con il dimostrare la completezza di $\mathbb{C}$, ossia di $\mathbb{R}^2$, con la distanza euclidea. [1]

Teorema. $\mathbb{C}$ *è completo.*

Dimostrazione. Sia $(s_n)_n$ una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$, con $s_n = \sigma_n + i\tau_n$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |s_n - s_m| < \varepsilon \,.$$

Siccome

$$|s_n - s_m| = \sqrt{|\sigma_n - \sigma_m|^2 + |\tau_n - \tau_m|^2} \,,$$

si ha che $|\sigma_n - \sigma_m| \leq |s_n - s_m|$ e $|\tau_n - \tau_m| \leq |s_n - s_m|$. Pertanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |\tau_n - \tau_m| < \varepsilon \,.$$

Pertanto $(\sigma_n)_n$ e $(\tau_n)_n)$ sono entrambe successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$. Essendo $\mathbb{R}$ completo, esse hanno limite in $\mathbb{R}$. Ne segue che $(s_n)_n$ ha limite in $\mathbb{C}$. ■

Vediamo come si adatta alle serie il **criterio di Cauchy**.

Teorema. *Una serie $\sum_k a_k$ (a termini reali o complessi) converge se e solo se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \,.$$

Dimostrazione. Essendo sia $\mathbb{R}$ che $\mathbb{C}$ completi, abbiamo che la successione $(s_n)_n$ ha limite finito se e solo se è di Cauchy, ossia

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad |s_n - s_m| < \varepsilon \,.$$

Non essendo restrittivo supporre $m < n$, sostituendo $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $s_m = \sum_{k=0}^{m} a_k$ si ha la tesi. ■

Corollario 2. *Se la serie $\sum_k |a_k|$ converge, allora anche $\sum_k a_k$ converge.*

In tal caso, si dice che la serie $\sum_k a_k$ "converge assolutamente".

Dimostrazione. Se $\sum_k |a_k|$ converge, per il criterio di Cauchy si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \,.$$

Ma, essendo $\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|$, ne segue che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \,.$$

Quindi, per il criterio di Cauchy, $\sum_k a_k$ converge. ■

[1] La completezza di $\mathbb{R}$ è stata dimostrata dal Prof. Del Santo.

Un esempio di serie convergente ma non assolutamente convergente è il seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,.$$

Date due serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, si definisce la serie "prodotto alla Cauchy" in questo modo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j \right)\,.$$

Teorema (di Mertens). *Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge e ha somma A, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge e ha somma B e almeno una delle due converge assolutamente, allora la serie prodotto alla Cauchy converge e ha somma AB.*

Dimostrazione. [2] Supponiamo, per fissare le idee, che sia la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a convergere assolutamente. Indichiamo con $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j$, il termine $k-$esimo della serie prodotto. Siano $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $s'_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ e $s''_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Sia inoltre $r'_n = B - s'_n$. Allora

$$\begin{aligned}
s''_n &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + \ldots + (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n) \\
&= a_0 s'_n + a_1 s'_{n-1} + \ldots + a_{n-1} s'_1 + a_n s'_0 \\
&= a_0 (B - r'_n) + a_1 (B - r'_{n-1}) + \ldots + a_{n-1} (B - r'_1) + a_n (B - r'_0) \\
&= s_n B - (a_0 r'_n + a_1 r'_{n-1} + \ldots + a_{n-1} r'_1 + a_n r'_0)\,.
\end{aligned}$$

Siccome $\lim_n s_n B = AB$, la tesi sarà dimostrata se

$$\lim_n (a_0 r'_n + a_1 r'_{n-1} + \ldots + a_{n-1} r'_1 + a_n r'_0) = 0\,.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Essendo $\lim_n r'_n = 0$, esiste un $\bar{n}_1$ tale che

$$n \geq \bar{n}_1 \quad \Rightarrow \quad |r'_n| < \varepsilon\,.$$

Poniamo inoltre $\bar{R} = \max\{|r'_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Per ipotesi, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge: sia $\bar{A}$ la sua somma. Per il criterio di Cauchy esiste un $\bar{n}_2$ tale che $\bar{n}_2 \geq \bar{n}_1$ e

$$n \geq \bar{n}_2 \quad \Rightarrow \quad |a_{n-\bar{n}_1+1}| + |a_{n-\bar{n}_1+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon\,.$$

Allora, se $n \geq \bar{n}_2$,

$$\begin{aligned}
|a_0 r'_n + & \, a_1 r'_{n-1} + \ldots + a_{n-1} r'_1 + a_n r'_0| \leq \\
&\leq |a_0|\,|r'_n| + \ldots + |a_{n-\bar{n}_1}|\,|r'_{\bar{n}_1}| + |a_{n-\bar{n}_1+1}|\,|r'_{\bar{n}_1-1}| + \ldots + |a_n|\,|r'_0| \\
&\leq \varepsilon(|a_0| + \ldots + |a_{n-\bar{n}_1}|) + \bar{R}(|a_{n-\bar{n}_1+1}| + \ldots + |a_n|) \\
&\leq \varepsilon \bar{A} + \bar{R}\varepsilon \\
&= (\bar{A} + \bar{R})\varepsilon\,,
\end{aligned}$$

il che completa la dimostrazione. ■

[2] Dimostrazione non svolta a lezione.

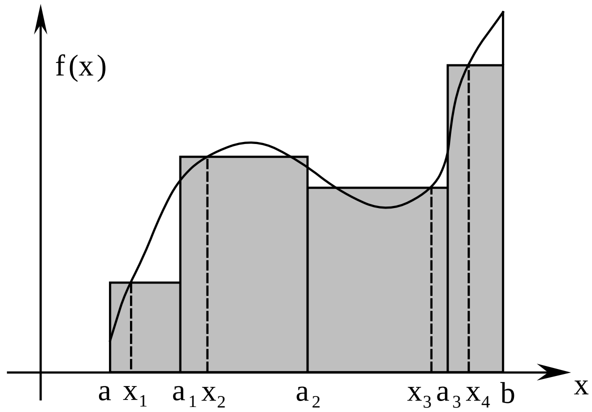


Figure 1: Interpretazione geometrica della somma di Riemann

3 La teoria dell'integrale

Una **P-partizione** dell'intervallo $[a, b]$ è una scelta di punti

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_{m-1} < a_m = b\,,$$

insieme ad una ulteriore scelta di punti $x_1, x_2, \dots, x_m$ tali che

$$x_1 \in [a_0, a_1]\,, \quad x_2 \in [a_1, a_2]\,, \quad \dots \quad , \; x_m \in [a_{m-1}, a_m]\,.$$

Indicheremo con Π una tale P-partizione.

Consideriamo ora una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ad ogni P-partizione Π dell'intervallo $[a, b]$ possiamo associare la **somma di Riemann**

$$S(\Pi) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1})\,.$$

Nel caso di una funzione positiva f, questa si può interpretare come somma di aree di rettangoli (vedi Figura 1).

Ci chiediamo se, prendendo delle P-partizioni via via più fini, le somme di Riemann ad esse associate convergano ad un qualche valore. Nel caso che ciò avvenga per una funzione positiva f, tale valore può essere visualizzato come la misura dell'area della regione del piano cartesiano compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse.

Per brevità, chiameremo **calibro** su $[a, b]$ ogni funzione $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $\delta(x) > 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Una tale funzione ci servirà per avere un controllo sull'ampiezza dei vari sottointervalli determinati dai punti della P-partizione.

Dato che sia un calibro δ su $[a, b]$, diremo che la P-partizione Π sopra introdotta è $\delta-$**fine** se, per ogni $j = 1, 2, \dots, m$,

$$x_j - a_{j-1} \le \delta(x_j) \quad \text{e} \quad a_j - x_j \le \delta(x_j)\,.$$

Mostreremo ora che è sempre possibile trovare una P-partizione $\delta-$fine dell'intervallo $[a,b]$, qualunque sia il calibro δ. Nel teorema che segue, dovuto a P. Cousin, la compattezza dell'intervallo $[a,b]$ gioca un ruolo essenziale.

Teorema. *Dato un intervallo compatto* $[a,b]$, *per ogni calibro* δ *su* $[a,b]$ *esiste una P-partizione* $\delta-$*fine di* $[a,b]$.

Dimostrazione. Ragioneremo per assurdo. Supponiamo che esista un calibro δ su $[a,b]$ per il quale non sia possibile trovare alcuna P-partizione $\delta-$fine di $[a,b]$. Dividiamo l'intervallo $[a,b]$ in due sottointervalli uguali, aventi il punto di mezzo come estremo comune. Allora almeno uno dei due sottointervalli non ha alcuna P-partizione $\delta-$fine. Scegliamolo, e dividiamolo a sua volta in due sottointervalli uguali. Continuando in questo modo, ci costruiamo una successione $(I_n)_n$ di sottointervalli imbottigliati la cui lunghezza tende a zero, ognuno dei quali non possiede alcuna P-partizione $\delta-$fine. Per il teorema di Cantor, esiste uno ed un solo punto $c \in [a,b]$ che appartiene a tutti questi intervalli. È inoltre chiaro che da un certo n in poi, tutti gli I_n saranno contenuti in $[c-\delta(c), c+\delta(c)]$. Prendiamo uno di questi: sia esso $I_{\bar{n}}$. Allora l'insieme $\Pi = \{(c, I_{\bar{n}})\}$, il cui unico elemento è la coppia $(c, I_{\bar{n}})$, è una P-partizione $\delta-$fine di $I_{\bar{n}}$, in contraddizione con quanto sopra. ■

Torniamo a considerare una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Siamo ora in grado di definire cosa intendiamo per convergenza delle somme di Riemann qualora le P-partizioni diventino via via più fini. La seguente definizione è dovuta a R. Henstock e J. Kurzweil.

Definizione. *Una funzione* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *si dice* **integrabile** *se esiste un numero reale* A *avente la seguente proprietà: comunque scelto* $\varepsilon > 0$, *si può trovare un calibro* δ *su* $[a,b]$ *tale che, per ogni P-partizione* $\delta-$*fine* Π *di* $[a,b]$, *si abbia*

$$|S(\Pi) - A| \leq \varepsilon \,.$$

Si può dimostrare che esiste al più un $A \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione. Questo numero reale A si chiama l'**integrale** di f su $[a,b]$ e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\int_a^b f \,, \qquad \int_a^b f(x)\,dx \,.$$

La presenza della lettera x nella notazione qui introdotta non ha importanza in sè. Essa potrebbe essere rimpiazzata da una qualunque altra lettera u, α, o da un qualunque altro simbolo, purché non abbia già un altro significato.

Si pone inoltre, per motivi che saranno chiariti più avanti,

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \quad \text{e} \quad \int_a^a f = 0 \,.$$

3.1 Alcune proprietà dell'integrale

In questa sezione enunciamo, senza dimostrarle, alcune importanti proprietà dell'integrale. [3]

Proposizione. *Se* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sono integrabili, allora* $f + g$ *è integrabile e si ha:*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \, .$$

Proposizione. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è integrabile e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *allora* αf *è integrabile e si ha:*

$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \left(\int_a^b f \right) .$$

Proposizione. *Se* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sono integrabili e* $f(x) \leq g(x)$ *per ogni* x, *allora*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g \, .$$

Proposizione. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è una funzione tale che l'insieme*

$$E = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$$

sia finito o numerabile, allora f *è integrabile e* $\int_a^b f = 0$.

Proposizione. *Siano dati tre punti* $a < c < b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione. Allora* f *è integrabile su* $[a, b]$ *se e solo se lo è sia su* $[a, c]$ *che su* $[c, b]$. *In tal caso, si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \, .$$

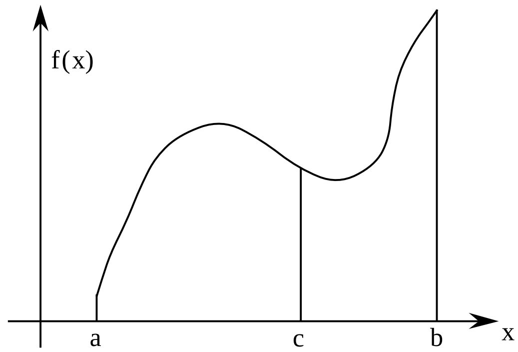
Esempio. Consideriamo la funzione $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0, 1] \, , \\ 3 & \text{se } x \in \,]1, 2] \, . \end{cases}$$

Essendo f costante su $[0, 1]$, essa è integrabile e $\int_0^1 f = 2$. Inoltre, sull'intervallo $[1, 2]$ la funzione f differisce da una costante solamente in un punto: si ha che $f(x) - 3$ è nulla tranne che per $x = 1$. Per quanto visto in precedenza, $f - 3$ è integrabile su $[1, 2]$ con integrale nullo e pertanto, essendo $f = (f - 3) + 3$, anche f è integrabile e $\int_1^2 f = 3$. In conclusione,

$$\int_0^2 f(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx + \int_1^2 f(x) \, dx = 2 + 3 = 5 \, .$$

[3] Per una trattazione più approfondita, si veda il libro
A. Fonda, Lezioni slla teoria dell'integrale, Goliardica Ed., Roma, 2001.



È facile vedere come dal teorema ora dimostrato segua che se una funzione è integrabile su un intervallo $[a, b]$, lo è anche su ogni suo sottointervallo. Inoltre, si ha il seguente

Corollario. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile, presi comunque tre punti u, v, w in $[a, b]$ si ha*

$$\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f \,.$$

Infatti, il caso $u < v < w$ segue immediatamente dal teorema precedente. Gli altri casi si ottengono facilmente tenendo conto delle convenzioni adottate per gli integrali con estremi uguali o scambiati.

3.2 Il teorema fondamentale

Il seguente teorema costituisce un importante legame tra il calcolo differenziale e il calcolo integrale. Esso prende il nome di **teorema fondamentale del calcolo differenziale e integrale**. Più brevemente, lo chiameremo teorema fondamentale.

Teorema. *Sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, una funzione derivabile, e sia f la sua derivata: $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Allora f è integrabile su $[a, b]$, e si ha:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Sappiamo che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in [a, b]$, ossia, per la definizione di derivata,

$$\lim_{u \to x} \frac{F(u) - F(x)}{u - x} = f(x)\,.$$

Per la definizione di limite, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$0 < |u - x| \le \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{F(u) - F(x)}{u - x} - f(x) \right| \le \varepsilon\,.$$

Notiamo che tale $\delta > 0$ dipende dalla scelta di x, per cui faremmo meglio a indicarlo con $\delta(x)$. Abbiamo così un calibro δ su $[a, b]$. Equivalentemente, possiamo scrivere

$$|u - x| \leq \delta(x) \quad \Rightarrow \quad |F(u) - F(x) - f(x)(u - x)| \leq \varepsilon |u - x| \,.$$

Consideriamo ora una P-partizione $\delta-$fine Π di $[a, b]$. Indicheremo come al solito con $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ e $x_1, x_2, \ldots, x_m$ i suoi punti. Essendo, per ogni $j = 1, 2, \ldots, m$,

$$|a_j - x_j| \leq \delta(x_j) \,, \qquad |a_{j-1} - x_j| \leq \delta(x_j) \,,$$

si ha

$$\begin{aligned}
|F(a_j) - F(a_{j-1}) - f(x_j)(a_j - a_{j-1})| &= \\
&= |F(a_j) - F(x_j) - f(x_j)(a_j - x_j) + \\
&\qquad +[F(x_j) - F(a_{j-1}) + f(x_j)(a_{j-1} - x_j)]| \\
&\leq |F(a_j) - F(x_j) - f(x_j)(a_j - x_j)| + \\
&\qquad +|F(a_{j-1}) - F(x_j) - f(x_j)(a_{j-1} - x_j)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{b-a}(|a_j - x_j| + |a_{j-1} - x_j|) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(a_j - x_j + x_j - a_{j-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(a_j - a_{j-1}) \,.
\end{aligned}$$

Se ne deduce che

$$\begin{aligned}
&\left| F(b) - F(a) - \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) \right| = \\
&= \left| \sum_{j=1}^{m} [F(a_j) - F(a_{j-1})] - \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) \right| \\
&= \left| \sum_{j=1}^{m} [F(a_j) - F(a_{j-1}) - f(x_j)(a_j - a_{j-1})] \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} |F(a_j) - F(a_{j-1}) - f(x_j)(a_j - a_{j-1})| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon}{b-a}(a_j - a_{j-1}) = \varepsilon \,,
\end{aligned}$$

e il teorema è dimostrato. ■

3.3 Funzioni primitivabili

Introduciamo il concetto di funzione primitiva di una data funzione. Indichiamo con I un intervallo di $\mathbb{R}$.

Definizione. *Una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *si dice* **primitivabile** *su* I *se esiste una funzione derivabile* $F : I \to \mathbb{R}$ *tale che* $F'(x) = f(x)$ *per ogni* $x \in I$*. Una tale funzione* F *si chiama* **primitiva** *di* f *su* I*.*

Il teorema fondamentale stabilisce che tutte le funzioni primitivabili su un intervallo $[a, b]$ sono integrabili, e che il loro integrale si può calcolare facilmente, nota che sia una loro primitiva. Esso si può riformulare nel modo seguente.

Teorema. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione primitivabile e sia* F *una qualunque sua primitiva. Allora* f *è integrabile e*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Talvolta è comodo indicare la differenza $F(b) - F(a)$ con i simboli

$$[F]_a^b\,, \quad [F(x)]_{x=a}^{x=b}\,,$$

o con varianti di questi, come ad esempio $[F(x)]_a^b$, qualora non ci siano ambiguità.

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = x^n$. È facile vedere che $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ ne è una primitiva. Il teorema fondamentale ci assicura quindi che

$$\int_a^b x^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1})\,,$$

risultato che avevamo già ottenuto per via diretta nel caso $0 \le a < b$.

Il fatto che la differenza $F(b) - F(a)$ non dipende dalla primitiva in questione è spiegato dalla seguente proposizione.

Proposizione. *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione primitivabile, e sia* F *una sua primitiva. Allora una funzione* $G : I \to \mathbb{R}$ *è primitiva di* f *se e solo se* $F - G$ *è una funzione costante su* I*.*

Dimostrazione. Se $F - G$ è costante, si ha

$$G'(x) = F'(x) + (G - F)'(x) = F'(x) = f(x)\,,$$

per ogni $x \in I$, e perciò G è una primitiva di f. Viceversa, se G è una primitiva di f su I, si ha

$$(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0\,,$$

per ogni $x \in I$. Ne segue che $F - G$ è costante su I. ∎

Notiamo che se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione primitivabile, essa è primitivabile su ogni sottointervallo di I. In particolare, essa è integrabile su ogni intervallo $[a, x] \subset I$. Fissato che sia $a \in I$, si può pertanto definire la funzione

$$x \mapsto \int_a^x f\,,$$

che chiameremo **integrale indefinito** di f, e indicheremo con uno dei simboli seguenti:

$$\int_a^{\cdot} f \quad , \quad \int_a^{\cdot} f(t)\,dt$$

(si noti che qui è conveniente usare una lettera diversa da x per indicare la variabile di f; ad esempio, qui abbiamo scelto la lettera t). Il teorema fondamentale ci assicura che, se F è una primitiva di f, allora, per ogni $x \in I$,

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)\,,$$

il che equivale a dire, tenendo conto della proposizione sopra dimostrata, che la funzione $\int_a^{\cdot} f$ è anch'essa una primitiva di f. Si ha quindi il seguente

Corollario. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione primitivabile. Allora, fissato $a \in I$, l'integrale indefinito $\int_a^{\cdot} f$ ne è una primitiva: è una funzione definita su I, ivi derivabile e, per ogni $x \in I$, si ha*

$$\left(\int_a^{\cdot} f\right)'(x) = f(x)\,.$$

Le convenzioni fatte sull'integrale con estremi scambiati ci assicurano che il corollario sopra enunciato continua a valere. Infatti, se F è una primitiva di f, anche se $x < a$ si ha

$$\int_a^x f = -\int_x^a f = -(F(a) - F(x)) = F(x) - F(a)\,,$$

e ne segue che $\int_a^{\cdot} f$ è una primitiva di f.

Indicheremo l'insieme di tutte le primitive di f con uno dei seguenti simboli:

$$\int f\,, \qquad \int f(x)\,dx\,.$$

Per quanto riguarda l'uso della x, vale un'osservazione analoga a quella fatta per l'integrale: essa può essere rimpiazzata da una qualunque altra lettera o simbolo, con le dovute precauzioni. Nella pratica, però, se F è una primitiva di f, invece della scrittura corretta

$$\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}\,,$$

si usa spesso scrivere impropriamente espressioni del tipo

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c\,,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ indica una costante arbitraria; ci adegueremo anche noi a questa prassi. Elenchiamo ad esempio le primitive di alcune funzioni elementari:

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$
$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad (\alpha \neq -1)$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

Le formule scritte sopra vanno considerate sugli opportuni intervalli di definizione.

Esempio. Usando il teorema fondamentale, troviamo:

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2\,.$$

Notiamo che la presenza della costante arbitraria c può talvolta portare a risultati in apparenza diversi. Ad esempio, si verifica facilmente che si ha anche

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c\,.$$

Ciò si spiega con il fatto che $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ per ogni $x \in [-1,1]$, e non bisogna pensare che qui c indichi la stessa costante che appare nell'ultima formula dell'elenco scritto sopra.

La notazione introdotta per le primitive assomiglia a quella dell'integrale, anche se i due concetti sono completamente diversi. Essi sono però legati tra loro dal teorema fondamentale: si ha

$$\int_\omega^\cdot f \in \int f\,,$$

con $\omega \in I$ qualsiasi, e

$$\int_a^b f = \left[\int_\omega^\cdot f\right]_a^b\,.$$

Si potrebbe essere tentati di scrivere

$$\int_a^b f = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b\,;$$

in realtà il termine di sinistra è un numero reale, mentre quello di destra è qualcosa di non ben definito (potrebbe essere un insieme il cui unico elemento è $\int_a^b f$). Nella pratica si abusa però spesso di queste notazioni.

Dalle note proprietà delle derivate si può facilmente dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione. *Siano f e g due funzioni primitivabili e siano F e G primitive di f e g, rispettivamente. Allora $f + g$ è primitivabile e $F + G$ ne è una primitiva; scriveremo brevemente:*

$$\int (f+g) = \int f + \int g\,;$$

Proposizione. *Sia f una funzione primitivabile e sia F una sua primitiva. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrario. Allora αf è primitivabile e αF ne è una primitiva; scriveremo brevemente:*

$$\int (\alpha f) = \alpha \int f\,.$$

Per concludere, enunciamo senza dimostrarlo il seguente importante

Teorema. *Ogni funzione continua è primitivabile.*

3.4 Primitivazione per parti e per sostituzione

Introduciamo due metodi spesso usati per determinare le primitive di alcune funzioni. Il primo è noto come metodo di primitivazione **per parti**.

Proposizione. *Siano $F, G : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili, e siano f, g le rispettive derivate. Si ha che fG è primitivabile su I se e solo se Fg lo è, nel qual caso una primitiva di fG è ottenuta sottraendo da FG una primitiva di Fg; scriveremo brevemente:*

$$\int fG = FG - \int Fg\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Essendo F e G derivabili, anche FG lo è, e si ha

$$(FG)' = fG + Fg\,.$$

Essendo $(FG)'$ primitivabile su I con primitiva FG, la tesi segue dalla proposizione precedente. ■

Esempio. Si voglia trovare una primitiva della funzione $h(x) = xe^x$. Definiamo le seguenti funzioni: $f(x) = e^x$, $G(x) = x$, e conseguentemente $F(x) = e^x$, $g(x) = 1$. Applicando la formula della proposizione, si ha:

$$\int e^x x\,dx = e^x x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c\,,$$

dove c indica, come sempre, una costante arbitraria.

Come immediata conseguenza della proposizione precedente, abbiamo la regola di **integrazione per parti**:

$$\int_a^b fG = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b Fg\,.$$

Esempi. Applicando la formula direttamente alla funzione $h(x) = xe^x$ dell'esempio precedente, otteniamo

$$\int_0^1 e^x x\,dx = e^1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = 1\,.$$

Notiamo che si può giungere allo stesso risultato usando il teorema fondamentale, avendo già trovato che una primitiva di h è data da $H(x) = xe^x - e^x$:

$$\int_0^1 e^x x\,dx = H(1) - H(0) = (e - e) - (0 - 1) = 1\,.$$

Vediamo ancora un paio di esempi. Sia $h(x) = \sin^2 x$. Con l'ovvia scelta delle funzioni f e G, troviamo

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\,dx &= -\cos x \sin x + \int \cos^2 x\,dx \\ &= -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x)\,dx \\ &= x - \cos x \sin x - \int \sin^2 x\,dx\,,\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + c\,.$$

Consideriamo ora il caso della funzione $h(x) = \ln x$, con $x > 0$. Per applicare la formula di primitivazione per parti, scegliamo le funzioni $f(x) = 1$, $G(x) = \ln x$. In questo modo, si trova

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - \int x\frac{1}{x}\,dx = x \ln x - \int 1\,dx = x \ln x - x + c\,.$$

Il secondo metodo che vogliamo studiare è noto come metodo di primitivazione **per sostituzione**.

Proposizione. *Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ una funzione primitivabile sull'intervallo $\varphi(I)$, con primitiva F. Allora la funzione $(f \circ \varphi)\varphi'$ è primitivabile su I, e una sua primitiva è data da $F \circ \varphi$. Scriveremo brevemente:*

$$\int (f \circ \varphi)\varphi' = \left(\int f\right) \circ \varphi\,.$$

Dimostrazione. Il teorema di derivazione delle funzioni composte assicura che la funzione $F \circ \varphi$ è derivabile su I e

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi' .$$

Ne segue che $(f \circ \varphi)\varphi'$ è primitivabile con primitiva $F \circ \varphi$. ∎

Ad esempio, cerchiamo una primitiva della funzione $h(x) = xe^{x^2}$. Definendo $\varphi(x) = x^2$, $f(t) = \frac{1}{2}e^t$ (è consigliabile usare lettere diverse per indicare le variabili di φ e di f), si ha che $h = (f \circ \varphi)\varphi'$. Essendo una primitiva di f data da $F(t) = \frac{1}{2}e^t$, si ha che una primitiva di h è $F \circ \varphi$, ossia

$$\int xe^{x^2}\,dx = F(\varphi(x)) + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c\,.$$

Come conseguenza, abbiamo la regola di **integrazione per sostituzione**: so

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt\,.$$

Infatti, se F è una primitiva di f su $\varphi(I)$, per il teorema fondamentale, si ha

$$\int_a^b (f \circ \varphi)\varphi' = (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f.$$

Esempio. Prendendo la funzione $h(x) = xe^{x^2}$ definita sopra, si ha

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = \int_0^4 \frac{1}{2}e^t\,dt = \frac{1}{2}[e^t]_0^4 = \frac{e^4 - 1}{2}\,.$$

Chiaramente, lo stesso risultato si ottiene con il teorema fondamentale, una volta noto che una primitiva di h è data da $H(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Infatti, si ha

$$\int_0^2 xe^{x^2}\,dx = H(2) - H(0) = \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{e^4 - 1}{2}\,.$$

Nota. La formula di primitivazione per sostituzione si trova spesso scritta nella forma

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\,\Big|_{t=\varphi(x)}\,,$$

dove, se F è una primitiva di f, il termine di destra si legge

$$\int f(t)\,dt\,\Big|_{t=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + c\,,$$

con $c \in \mathbb{R}$ arbitraria. Formalmente, si opera il cambiamento di variabile $t = \varphi(x)$, e il simbolo dt viene a rimpiazzare $\varphi'(x)\,dx$ (la notazione di Leibniz $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ può essere usata come regola mnemonica).

Esempio. Per trovare una primitiva della funzione $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, possiamo scegliere $\varphi(x) = \ln x$, applicare la formula

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int t\, dt\Big|_{t=\ln x}\,,$$

e trovare così $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$ (in questo caso, scrivendo $t = \ln x$, si ha che il simbolo dt rimpiazza $\frac{1}{x}dx$).

Nel caso in cui la funzione $\varphi : I \to \varphi(I)$ sia invertibile, si può anche scrivere

$$\int f(t)\, dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx\Big|_{x=\varphi^{-1}(t)}\,,$$

con la corrispondente formula per l'integrale:

$$\int_\alpha^\beta f(t)\, dt = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} (f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx\,.$$

Esempio. Volendo trovare una primitiva della funzione continua $f(t) = \sqrt{1-t^2}$, con $t \in\,]-1,1[\,$, si può considerare la funzione $\varphi(x) = \cos x$, e si ha:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-t^2}\, dt &= \int \sqrt{1-\cos^2 x}\,(-\sin x)\, dx\Big|_{x=\arccos t} \\
&= -\int \sin^2 x\, dx\big|_{x=\arccos t} \\
&= -\frac{1}{2}(x - \sin x\cos x)\Big|_{x=\arccos t} + c \\
&= -\frac{1}{2}(\arccos t - t\sqrt{1-t^2}) + c
\end{aligned}$$

(ponendo $t = \cos x$, il simbolo dt è rimpiazzato da $-\sin x\, dx$).

4 La funzione esponenziale complessa

Nota. Questo argomento viene svolto alla fine del corso, avendo il Prof. Del Santo dimostrato lo sviluppo in serie di Taylor della funzione esponenziale e delle funzioni coseno e seno.

Per $z \in \mathbb{C}$, consideriamo la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,.$$

Si tratta di una serie di potenze. Vediamo che converge assolutamente: si ha che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}\,.$$

È pertanto possibile definire una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in questo modo:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,.$$

Teorema. *Per ogni* z_1, z_2 *si ha*

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) f(z_2)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Le serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}$ convergono assolutamente e hanno per somma $f(z_1)$ e $f(z_2)$, rispettivamente. Per il teorema di Mertens, la serie prodotto alla Cauchy converge e ha per somma $f(z_1)f(z_2)$. Ma il prodotto alla Cauchy è la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{z_2^j}{j!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_1^{k-j} z_2^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!}\,,$$

che ha per somma $f(z_1 + z_2)$. Da qui la tesi. ∎

Questa proprietà ci porta a chiamare la funzione f "esponenziale complessa": invece di $f(z)$ scriveremo $\exp(z)$ o anche e^z :

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,.$$

La proprietà dimostrata sopra si può allora scrivere in questo modo: se z_1 e z_2 sono due numeri complessi,

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}\,.$$

Sia ora $z = a + ib$. Allora

$$e^{a+ib} = e^a e^{ib}\,;$$

vediamo quest'ultimo:

$$\begin{aligned}
e^{ib} &= 1 + ib + \frac{(ib)^2}{2!} + \frac{(ib)^3}{3!} + \frac{(ib)^4}{4!} + \frac{(ib)^5}{5!} + \frac{(ib)^6}{6!} + \frac{(ib)^7}{7!} + \dots \\
&= 1 + ib - \frac{b^2}{2!} - i\frac{b^3}{3!} + \frac{b^4}{4!} + i\frac{b^5}{5!} - \frac{b^6}{6!} - i\frac{b^7}{7!} + \dots \\
&= \left(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \frac{b^6}{6!} + \dots \right) + i \left(b - \frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!} - \frac{b^7}{7!} + \dots \right) \\
&= \cos b + i \sin b\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo così la **formula di Eulero**

$$e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b)\,.$$

Si possono allora verificare le seguenti uguaglianze: per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\,, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\,.$$

Queste formule possono essere utilizzate, ad esempio, per estendere anche le funzioni trigonometriche al campo complesso. Anche le funzioni iperboliche, definite da

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,,$$

si possono estendere con le stesse formule al campo complesso. Si noti che

$$\cos t = \cosh(it)\,, \qquad \sin t = -i \sinh(it)\,.$$

A questo punto risulteranno finalmente spiegate le similitudini incontrate tra le funzioni trigonometriche e quelle iperboliche.

Il fatto che, per ogni $z \in \mathbb{C}$,

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z\,,$$

si può interpretare dicendo che la funzione esponenziale complessa è periodica di periodo $2\pi i$. Questo fatto compromette la possibile definizione di una funzione "logaritmo" nel campo complesso: dato $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq 0$, l'equazione

$$e^u = z\,,$$

vista la periodicità della funzione esponenziale, presenta molteplici soluzioni. Precisamente, se scriviamo $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, il numero complesso $u = x+iy$ ne è soluzione se e solo se

$$e^x(\cos y + i \sin y) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)\,,$$

ossia

$$x = \ln\rho\,, \quad y = \theta + 2\pi k\,,$$

con $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto,

$$e^u = z \quad \Leftrightarrow \quad u \in \{\ln|z| + i(Arg(z) + 2\pi k) : k \in \mathbb{Z}\}\,.$$

Talvolta si interpreta il "logaritmo complesso" come una "funzione multivoca" che assume in questo caso infiniti valori, riservando il nome di "logaritmo principale" al particolare valore ottenuto scegliendo $k = 0$.

Ad esempio, il logaritmo complesso del numero i assume tutti i valori dell'insieme

$$\left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}\,.$$

Il logaritmo principale di i vale pertanto $\frac{\pi}{2}i$.