Corso di “Modelli”

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica, a.a. 2016/2017

Nota. Questi appunti sono in fase di miglioramento, per cui ci saranno degli aggiornamenti e correzioni. Si prega di segnalare eventuali errori.

Lezione 10 del 15/5/2017: Ponti sospesi

Un ponte è una struttura complessa, le cui componenti sono soggette a varie forme di sollecitazioni. I più lunghi al mondo sono tutti di tipo *ponte sospeso*. Attualmente il ponte di Akashi, in Giappone, detiene il record di lunghezza della campata centrale, con i suoi 1991 metri.

Scorrendo la lista dei ponti sospesi più lunghi, vedi ad esempio

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_longest_suspension_bridge_spans

si trovano al tredicesimo e al quattordicesimo posto il Ponte di Verrazzano a New York (1298 metri) e il Golden Gate Bridge a San Francisco (1280 metri). È notevole il fatto che quest’ultimo sia stato costruito nel 1937, ottant’anni fa, ed è tuttora in uso. Tre anni dopo fu costruito un altro ponte, che però non ebbe altrettanta fortuna.

Inaugurato il 1° luglio 1940, il Ponte di Tacoma Narrows divenne subito famoso per la sua caratteristica di oscillare verticalmente, in presenza di vento trasversale, con oscillazioni di uno-due metri di ampiezza. Questo comportamento inusuale era dovuto al fatto che il ponte aveva una sezione molto stretta e di piccolo spessore, per cui risultava molto flessibile rispetto ai ponti costruiti fino ad allora.

Il mattino del 7 novembre 1940 il ponte stava oscillando, come al solito, quando improvvisamente le oscillazioni verticali si trasformarono in oscillazioni trasversali. Queste aumentarono in ampiezza fino a superare l'angolo di 45° e, alle ore 11:10, la struttura cedette precipitando nel mare sottostante. Il breve documentario su

www.youtube.com/watch?v=KVc7oBKzq9U

mostra la sequenza delle oscillazioni del ponte prima del crollo, e ne attribuisce la causa al fenomeno della *risonanza*.

Questo fenomeno è ben noto per i sistemi *lineari*. Esso entra in gioco quando la frequenza di un termine forzante periodico risulta uguale alla frequenza delle oscillazioni libere della struttura. Si è allora ipotizzato che la forza periodica agente sulla struttura fosse provocata dai *vortici di von Karman*, che si alternano in modo periodico al passare del fluido lungo la struttura. Un rapido calcolo permette però di vedere che la frequenza delle oscillazioni del ponte di Tacoma non era strettamente correlata con la velocità del vento, e quindi con la frequenza dei vortici da esso generati.

D'altra parte, un modello lineare presuppone che la struttura presenti *piccole oscillazioni*, mentre le oscillazioni del ponte di Tacoma, quel 7 novembre del 1940, erano evidentemente di grande ampiezza. Inoltre, la struttura stessa di un ponte sospeso è asimmetrica: le funi che lo sostengono agiscono da una sola parte del ponte, per cui una trazione verso il basso incontra una forza di richiamo elastica nel verso contrario, mentre un sollevamento del ponte verso l'alto potrebbe far allentare le funi, per cui non ci sarebbe alcuna forza di richiamo.

Viene allora spontanea una domanda: esiste una *risonanza nonlineare*? Come la si può definire?

Per cercare di rispondere in qualche modo a questa domanda, sarà bene iniziare con un breve ripasso sull'equazione differenziale di un oscillatore armonico con termine forzante periodico. Consideriamo l'equazione differenziale scalare

$$u'' + \lambda u = e(t)\,, \tag{1}$$

dove $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e T-periodica, mentre $\lambda > 0$ è un numero reale. Cerchiamo le soluzioni T-periodiche di (1).

Siccome $\lambda > 0$, le soluzioni dell'equazione

$$u'' + \lambda u = 0 \tag{2}$$

sono tutte periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$:

$$u(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + b\sin(\sqrt{\lambda}\,t)\,.$$

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\lambda u\,, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono ellissi di equazione $v^2 + \lambda u^2 = c$, con $c \geq 0$, che circondano l'origine, il quale pertanto è un **centro isocrono**.

Consideriamo ora, sempre per $\lambda > 0$, l'equazione (1) e scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\lambda u + e(t)\,. \end{cases}$$

Ponendo $u = \binom{u}{v}$, la soluzione con punto iniziale $w(0) = w_0$ è data da

$$w(t) = W(t)\left(w_0 + \int_0^t W^{-1}(s)\begin{pmatrix} 0 \\ e(s) \end{pmatrix} ds\right),$$

dove $W(t)$ è la matrice wronskiana con $W(0) = I$:

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}\,t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}\,t) \\ -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,t) & \cos(\sqrt{\lambda}\,t) \end{pmatrix}.$$

Scrivendo $w_0 = \binom{u_0}{v_0}$ e sviluppando, essendo

$$W^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}\,s) & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}\,s) \\ \sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,s) & \cos(\sqrt{\lambda}\,s) \end{pmatrix},$$

troviamo

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\left(u_0 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^t e(s)\sin(\sqrt{\lambda}\,s)\,ds\right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}\,t)\left(v_0 + \int_0^t e(s)\cos(\sqrt{\lambda}\,s)\,ds\right), \\ v(t) &= -\sin(\sqrt{\lambda}\,t)\left(\sqrt{\lambda}\,u_0 - \int_0^t e(s)\sin(\sqrt{\lambda}\,s)\,ds\right) + \\ &\quad + \cos(\sqrt{\lambda}\,t)\left(v_0 + \int_0^t e(s)\cos(\sqrt{\lambda}\,s)\,ds\right). \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi con caratteristiche completamente diverse.

I caso. Se $\lambda = (\frac{2\pi N}{T})^2$, per un certo intero positivo N, considerando i coefficienti di Fourier [1]

$$a_N = \frac{2}{T}\int_0^T e(s)\cos\Big(\frac{2\pi N}{T}\,s\Big)\,ds\,, \quad b_N = \frac{2}{T}\int_0^T e(s)\sin\Big(\frac{2\pi N}{T}\,s\Big)\,ds\,,$$

si vede che

$$u(T) = u_0 - \frac{T^2 b_N}{4\pi N}\,, \quad v(T) = v_0 + \frac{T a_N}{2}\,.$$

Quindi, in questo caso, ci sono soluzioni T-periodiche di (1) se e solo se $a_N = b_N = 0$. In tal caso, **tutte le soluzioni** di (1) **sono T-periodiche**.

Al contrario, se $a_N \neq 0$ o $b_N \neq 0$, **tutte le soluzioni** di (1) **sono illimitate**, sia in passato che in futuro. Si vede infatti che, per $k \in \mathbb{Z}$,

$$u(kT) = u_0 - k\frac{T^2 b_N}{4\pi N}\,, \quad v(kT) = v_0 + k\frac{T a_N}{2}\,.$$

II caso. Se $\lambda > 0$ è tale che $\lambda \neq (\frac{2\pi n}{T})^2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$\alpha_\lambda = \frac{2}{T}\int_0^T e(s)\cos(\sqrt{\lambda}\,s)\,ds\,, \quad \beta_\lambda = \frac{2}{T}\int_0^T e(s)\sin(\sqrt{\lambda}\,s)\,ds\,.$$

Cerchiamo una soluzione T-periodica di (1) imponendo che sia $w(T) = w_0$. Risolvendo il sistema $\{u(T) = u_0,\, v(T) = v_0\}$, ossia

$$\begin{cases} u_0 = \cos(\sqrt{\lambda}\,T)\Big(u_0 - \dfrac{T}{2\sqrt{\lambda}}\beta_\lambda\Big) + \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}\,T)\Big(v_0 + \dfrac{T}{2}\alpha_\lambda\Big), \\ v_0 = -\sin(\sqrt{\lambda}\,T)\Big(\sqrt{\lambda}\,u_0 - \dfrac{T}{2}\beta_\lambda\Big) + \cos(\sqrt{\lambda}\,T)\Big(v_0 + \dfrac{T}{2}\alpha_\lambda\Big), \end{cases}$$

troviamo

$$u_0 = \frac{T}{4\sqrt{\lambda}}\bigg(\beta_\lambda + \frac{\sin(\sqrt{\lambda}\,T)}{1-\cos(\sqrt{\lambda}\,T)}\alpha_\lambda\bigg)\,, \quad v_0 = \frac{T}{4}\bigg(\frac{1+\cos(\sqrt{\lambda}\,T)}{\sin(\sqrt{\lambda}\,T)}\beta_\lambda - \alpha_\lambda\bigg)\,.$$

Quindi, in questo caso, **esiste un'unica soluzione T-periodica** di (1). La denotiamo con $u_{\lambda,e}(t)$. Tutte **le altre soluzioni** di (1) **sono** del tipo

$$u(t) = u_{\lambda,e}(t) + a\cos(\sqrt{\lambda}\,t) + b\sin(\sqrt{\lambda}\,t)\,,$$

e sono pertanto **tutte limitate** su $\mathbb{R}$.

Notiamo infine che, se λ tende a $(\frac{2\pi N}{T})^2$, per un certo $N \in \mathbb{N}$, allora $\alpha_\lambda \to a_N$, $\beta_\lambda \to b_N$ e l'ampiezza di $u_{\lambda,e}(t)$ tende all'infinito se $a_N \neq 0$ o $b_N \neq 0$.

[1] Ricordiamo che si ha

$$e(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\Big(\frac{2\pi k}{T}t\Big) + b_k\sin\Big(\frac{2\pi k}{T}t\Big)\Big)\,.$$

Lezione 11 del 22/5/2017: Risonanza nonlineare

Passiamo ora allo studio degli oscillatori asimmetrici. Consideriamo l'equazione differenziale scalare

$$u'' + \mu u^+ - \nu u^- = e(t)\,, \tag{3}$$

dove $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e T-periodica e $\mu > 0$, $\nu > 0$ sono due numeri reali. Qui

$$u^+ = \max\{u, 0\} = \frac{u + |u|}{2}\,, \qquad u^- = \max\{-u, 0\} = \frac{-u + |u|}{2}\,.$$

Si noti che $u = u^+ - u^-$, mentre $|u| = u^+ + u^-$. Se $\mu = \nu$, abbiamo l'equazione lineare, che è stata studiata sopra. Essendo μ e ν positivi, le soluzioni dell'equazione

$$u'' + \mu u^+ - \nu u^- = 0 \tag{4}$$

sono tutte periodiche di periodo

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\,.$$

Una soluzione è data da

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu}\, t) & \text{se } t \in \left[0\,, \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right]\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\Big(\sqrt{\nu}\Big(\dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}} - t\Big)\Big) & \text{se } t \in \left[\dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}}\,, \dfrac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right]\,, \end{cases}$$

estesa a tutto $\mathbb{R}$ in modo da risultare τ-periodica. Tutte le altre soluzioni di (4) sono del tipo $u(t) = \rho\phi(t + \theta)$, con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, \tau[$.

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} u' = v\,, \\ v' = -\mu u^+ + \nu u^-\,, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono curve chiuse che circondano l'origine, il quale pertanto è un centro isocrono. Ognuna di queste curve è ottenuta incollando assieme due semi-ellissi, ossia

$$\{(u, v) : u \geq 0 \text{ e } v^2 + \mu u^2 = c\} \cup \{(u, v) : u \leq 0 \text{ e } v^2 + \nu u^2 = c\}\,,$$

con $c \geq 0$.

Come nel caso lineare abbiamo considerato gli autovalori dell'operatore differenziale, così qui possiamo considerare l'insieme Σ delle coppie (μ, ν) per cui l'equazione (4) ha soluzioni T-periodiche non nulle. Si vede allora che Σ contiene, oltre ai due assi cartesiani $\{\mu = 0\}$ e $\{\nu = 0\}$, una successione $(C_N)_{N \geq 1}$ di curve:

$$C_N = \left\{(\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \mu > 0,\, \nu > 0,\, N\left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right) = T\right\}\,.$$

L'insieme Σ è spesso chiamato **spettro di Fucík**.

A differenza dell'equazione lineare, non è pensabile di scrivere le soluzioni T-periodiche di (3) in modo esplicito. Possiamo comunque enunciare alcuni risultati sulla dinamica delle soluzioni dell'equazione (3).

Teorema. *Se $(\mu, \nu) \notin \Sigma$, allora l'equazione (3) ha almeno una soluzione T-periodica.*

Si noti che la soluzione non è necessariamente unica. Ad esempio, prendendo $e(t) = 1$, costante, abbiamo un punto di equilibrio $u = \frac{1}{\mu}$. In un intorno di questo punto, le soluzioni risolvono l'equazione lineare

$$u'' + \mu u = 0$$

e sono pertanto periodiche di periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. D'altra parte, le soluzioni di grande ampiezza hanno un periodo che si avvicina a τ. Supponiamo che sia $\nu < \mu$. Se n è un intero positivo tale che

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} < \frac{T}{n} < \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} \,,$$

troviamo in corrispondenza una soluzione T-periodica, di periodo minimo $\frac{T}{n}$. Di tali n ce ne possono essere molti.

Supponiamo ora che sia $(\mu, \nu) \in \Sigma$, per cui esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} = \frac{T}{N} \,.$$

Definiamo la funzione τ-periodica

$$\Phi(\theta) = \int_0^T e(t)\phi(t + \theta)\, dt \,.$$

Teorema. *Se*

$$\Phi(\theta) \neq 0 \,, \qquad \textit{per ogni } \theta \in \mathbb{R} \,,$$

allora l'equazione (3) ha almeno una soluzione T-periodica. Inoltre, tutte le soluzioni sono limitate.

Diversa è la situazione se la funzione Φ cambia segno. Faremo l'ipotesi che essa abbia solo zeri semplici, ossia che, se $\Phi(\theta) = 0$, allora $\Phi'(\theta) \neq 0$. Osserviamo che, in questo caso, essendo τ-periodica, la funzione Φ avrà nell'intervallo $[0, \tau[$ un numero pari di zeri.

Teorema. *Se gli zeri della funzione Φ nell'intervallo $[0, \tau[$ sono tutti semplici ed il loro numero è di almeno quattro, allora l'equazione (3) ha almeno una soluzione T-periodica. D'altra parte, in questo caso, tutte le soluzioni di grande ampiezza sono illimitate.*

Ci sono effettivamente degli esempi in cui la funzione Φ ha esattamente due zeri semplici nell'intervallo $[0, \tau[$ e l'equazione (3) non ha soluzioni T-periodiche.

Passiamo ora a un possibile modello di ponte sospeso, per quanto molto semplificato. Si tratta di un oscillatore in verticale, soggetto alla forza di gravità, sostenuto da una molla, con questa caratteristica: se lo si solleva al di sopra di un'altezza h, la molla si allenta e non esercita più alcuna forza. Misurando la posizione $u(t)$ verso il basso, avremo l'equazione differenziale

$$u'' + F(u) = e(t)\,,$$

dove

$$F(u) = \begin{cases} \mu(u+h) - g & \text{se } u \geq -h\,, \\ -g & \text{se } u \leq -h\,. \end{cases}$$

Osserviamo che, per ragioni di continuità, deve essere $\mu h = g$, per cui l'equazione si può scrivere brevemente come

$$u'' + \mu\left[(u+h)^+ - h\right] = e(t)\,. \tag{5}$$

Iniziamo a studiare le oscillazioni libere, quando cioè il termine forzante è nullo. Prendendo una soluzione con condizioni iniziale $u(0) = \alpha > 0$ e $u'(0) = 0$, si può vedere che essa è sempre periodica. Abbiamo due casi, a seconda che sia α minore o maggiore di h. Infatti, se $\alpha \leq h$, la soluzione rimane nella zona lineare, e il suo periodo è

$$\tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\,.$$

Se invece $\alpha \geq h$, la soluzione esce dalla zona lineare, e si può calcolare che

$$\tau(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\left[\arccos\left(-\frac{h}{\alpha}\right) + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{h}\right)^2 - 1}\,\right].$$

Si nota che il periodo $\tau(\alpha)$ è una funzione crescente di α, strettamente crescente se $\alpha \geq h$, e

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \tau(\alpha) = +\infty\,.$$

Come si può allora ancora parlare di *risonanza* in questo caso?

Lezione 12 del 29/5/2017: Ulteriori fenomeni oscillatori

Per quanto riguarda le soluzioni periodiche per l'equazione differenziale (6), avendo osservato che i periodi delle oscillazioni libere tendono a $+\infty$ al crescere delle ampiezze, si può ipotizzare l'esistenza di *soluzioni subarmoniche*, ossia soluzioni kT-periodiche, dove k è un intero positivo sufficientemente grande. In effetti, vale il seguente risultato.

Teorema. *Esiste un numero naturale $\bar{k}$ tale che, per ogni $k \geq \bar{k}$, l'equazione differenziale (6) ha almeno due soluzioni subarmoniche di periodo minimo kT.*

Passiamo ora a studiare un modello di ponte sospeso considerato come una trave elastica, che si estende lungo una direzione x. L'equazione differenziale diventa del tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \kappa \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mu \left[(u+h)^+ - h \right] = e(t,x)\,, \tag{6}$$

dove $\kappa > 0$ è un parametro di rigidità del ponte. Le condizioni di appoggio ai due estremi, posizionati in $x = 0$ e $x = L$, si possono scrivere come

$$u(t,0) = 0 = u(t,L)\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,L)\,.$$

Naturalmente, uno studio analitico di questo problema ai limiti associato a un equazione alle derivate parziali diventa molto complicato, e poco si sa sull'esistenza o meno di soluzioni T-periodiche o subarmoniche, e ancor meno sulla limitatezza o meno di tutte le soluzioni. Si è riscontrato che, per alcune di queste equazioni, possono apparire delle onde viaggianti (le cosiddette *traveling waves*), ossia soluzioni del tipo $u(t,x) = v(t - cx)$, dove c denota la velocità dell'onda. Questo tipo di oscillazioni sono state effettivamente osservate in alcune strutture molto snelle: ad esempio, è significativa questa testimonianza di R.G. Cone, uno degli ingegneri costruttori del Golden Gate Bridge, che si trovava in prossimità del ponte il 9 febbraio 1938.

"The force of the wind was so strong that it was impossible to stand erect on the sidewalk, or the roadway of the bridge... I observed that the suspended structure of the bridge was undulating vertically in a wavelike motion of considerable amplitude... the wave motion appeared to be similar to that made by cracking a whip. The truss would be quiet for a second, and then in the distance, one could see a running wave of several nodes approaching... the oscillations and deflections of the bridge were so pronounced that they would seem unbelievable."

Sono stati studiati anche altri tipi di modelli, più o meno realistici. Ad esempio, si è provato a vedere come interagisce la trave principale con il cavo elastico che la sostiene. Un modello di questo tipo è descrivibile con un sistema di due equazioni differenziali alle derivate parziali, e risulta molto difficile da analizzare. Ancor più complicato diventa un modello in cui si tengano conto delle oscillazioni delle due torri che sostengono i cavi, o delle campate laterali. Inoltre, bisognerebbe anche tener conto degli attriti, per quanto piccoli, che sono sempre presenti in una struttura meccanica.

Affrontiamo ora il problema delle oscillazioni torsionali del ponte, quelle considerate più pericolose per la sopravvivenza delle struttura. Se si considera una sezione trasversale del ponte, indicando con $u(t)$ la posizione del baricentro e con $\theta(t)$ l'angolo di inclinazione della sezione, si ottiene un sistema di due equazioni differenziali del tipo

$$\begin{aligned} &u'' + \mu_1[(u - a\sin\theta)^+ + (u + a\sin\theta)^+] = e_1(t)\,,\\ &\theta'' + \mu_2 \cos\theta[(u - a\sin\theta)^+ + (u + a\sin\theta)^+] = e_2(t)\,. \end{aligned}$$

Anche qui lo studio delle soluzioni si presenta piuttosto arduo, in quanto possono entrare in gioco fenomeni non lineari di vario tipo, possibilmente anche caotici.

Per concludere, accenniamo al fatto che, recentemente, si sta cercando di studiare un modello di ponte sospeso il più possibile realistico, quale potrebbe essere una trave elastica avente una certa larghezza, per poter spiegare come oscillazioni verticali possano perdere stabilità e istantaneamente trasformarsi in oscillazioni torsionali.

Riferimenti bibliografici

[1] O.H. Amman, T. Von Karman, G.B. Woodruff, The Failure of the Tacoma Narrows Bridge, Federal Works Agency, Washington D.C., 1941,

http://authors.library.caltech.edu/45680/1/

The%20Failure%20of%20the%20Tacoma%20Narrows%20Bridge.pdf

[2] G. Arioli, F. Gazzola, Torsional instability in suspension bridges: the Tacoma Narrows Bridge case, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 42 (2017), 342–357.

[3] A. Fonda, Playing Around Resonance. An Invitation to the Search of Periodic Solutions for Second Order Ordinary Differential Equations, Birkhäuser, Basel, 2016.

[4] A.C. Lazer and P.J. McKenna, Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis, SIAM Review 32 (1990), 537–578.