

# Corso di “Modelli”

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

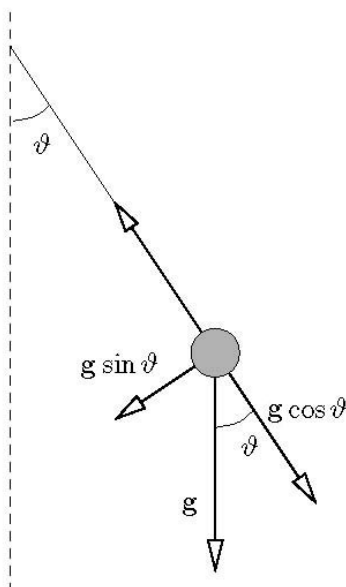
Università di Trieste, CdL Matematica, a.a. 2017/2018

## 1. L'equazione del pendolo

Analizziamo la ben nota equazione del pendolo matematico

$$\vartheta'' + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0,$$

dove  $g$  è la costante di gravità e  $\ell$  è la lunghezza del pendolo.



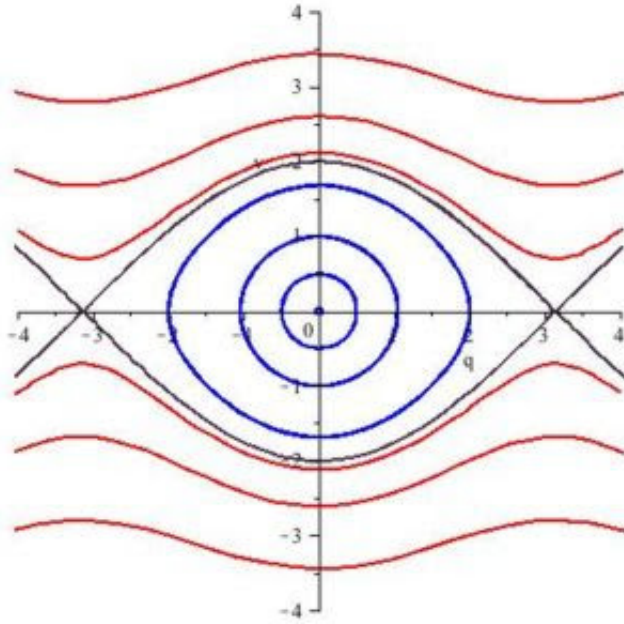
Ponendo  $\lambda = g/\ell$ , passiamo al sistema equivalente nel piano delle fasi

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\lambda \sin x. \end{cases}$$

Analizziamo le soluzioni  $(x(t), y(t))$ . Le loro orbite si trovano lungo le linee di livello nel piano delle fasi della funzione

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \lambda \cos x,$$

e sono visualizzate in figura. Siccome la funzione coseno è  $2\pi$ -periodica, anche le orbite presenteranno questo tipo di periodicità nella variabile  $x$ .



Si vede subito che i punti di equilibrio sono  $(x, y) = (\pi + 2\pi k, 0)$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Il punto di equilibrio  $(0, 0)$  è stabile, e tutte le soluzioni vicine sono periodiche (si tratta di un “centro”). Se indichiamo con  $\tau(\alpha)$  il periodo della soluzione con punto iniziale  $x(0) = \alpha$ ,  $y(0) = 0$ , si vede che, al variare di  $\alpha$  in  $]0, \pi[$ , il periodo  $\tau(\alpha)$  è strettamente crescente, e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \tau(\alpha) = +\infty.$$

Il punto di equilibrio  $(\pi, 0)$  è instabile (è una “sella”). Esso è il punto di arrivo asintotico di una soluzione  $(x^*(t), y^*(t))$ , detta “eteroclina”, per la quale si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x^*(t) = -\pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x^*(t) = \pi, \quad \text{e } y^*(t) > 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo anche la soluzione eteroclina simmetrica  $(x_*(t), y_*(t))$ , tale che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_*(t) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_*(t) = -\pi, \quad \text{e } y_*(t) < 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni la cui orbita attraversa l’asse verticale al di sopra del valore  $\sqrt{2\lambda}$  o al di sotto di  $-\sqrt{2\lambda}$  non sono periodiche. Esse corrispondono alla situazione fisica in cui il pendolo continua a ruotare in senso antiorario oppure orario, rispettivamente.

Nel caso in cui il pendolo venga sollecitato con una forza esterna periodica, esso può reagire in diversi modi. Il problema, di carattere prettamente nonlineare, è tuttora in fase di studio. Riportiamo il seguente interessante risultato, ottenuto da J. Mawhin e M. Willem nel 1984.

**Teorema.** Sia  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e  $T$ -periodica, tale che

$$\int_0^T e(t) dt = 0,$$

allora l'equazione differenziale

$$\vartheta'' + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = e(t)$$

ha almento due soluzioni  $T$ -periodiche geometricamente distinte.

Chiaramente, se l'equazione ha una soluzione  $T$ -periodica  $\vartheta(t)$ , tutte le funzioni che si ottengono da questa aggiungendo un multiplo intero di  $2\pi$  sono ancora soluzioni  $T$ -periodiche. Si dice che due soluzioni sono *geometricamente distinte* se non si possono ottenere l'una dall'altra in questo modo.

## 2. La barra elastica in compressione

Studiamo ora il problema di una barra elastica soggetta a una forza di compressione agli estremi. Si suppone che la barra abbia una certa rigidità, per cui quando la forza di compressione è debole, essa rimarrà diritta. Ma quando tale forza aumenta, ci aspettiamo che la barra si arcui.

Supponendo che la lunghezza  $L$  della barra non vari sensibilmente e che la barra rimanga su uno stesso piano, possiamo parametrizzare per lunghezza d'arco la forma della barra con una curva  $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , che supponiamo sufficientemente regolare. Scriviamo allora il vettore derivata  $\gamma'(s)$ , di lunghezza unitaria, in coordinate polari,

$$\gamma'(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)).$$

La teoria dell'elasticità ci fornisce un'equazione differenziale che deve essere soddisfatta,

$$\varphi'' + \frac{p}{\kappa} \sin \varphi = 0,$$

dove  $p$  indica l'intensità della forza, e  $\kappa$  è un coefficiente di rigidità della barra.

Si nota subito che c'è un'analogia con l'equazione del pendolo. Qui però bisogna tener conto delle condizioni ai limiti della barra. Esse possono essere di vario tipo:

- appoggio semplice:  $\varphi'(0) = 0 = \varphi'(L)$ , detta "condizione di Neumann";
- incastro:  $\varphi(0) = 0 = \varphi(L)$ , detta "condizione di Dirichlet";
- condizioni miste:  $\varphi'(0) = 0 = \varphi(L)$ , oppure  $\varphi(0) = 0 = \varphi'(L)$ .

Analizziamo ad esempio la condizione di Neumann. Passando al sistema equivalente, nel piano delle fasi, ponendo  $\lambda = p/\kappa$  abbiamo il problema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\lambda \sin x, \\ y(0) = 0, y(L) = 0. \end{cases}$$

Tenendo conto delle informazioni ricavate dall'equazione del pendolo, possiamo fare rapidamente uno studio del numero di soluzioni del problema:

- se  $L < \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ , c'è un'unica soluzione, quella nulla. Siamo nella situazione in cui la barra rimane diritta;

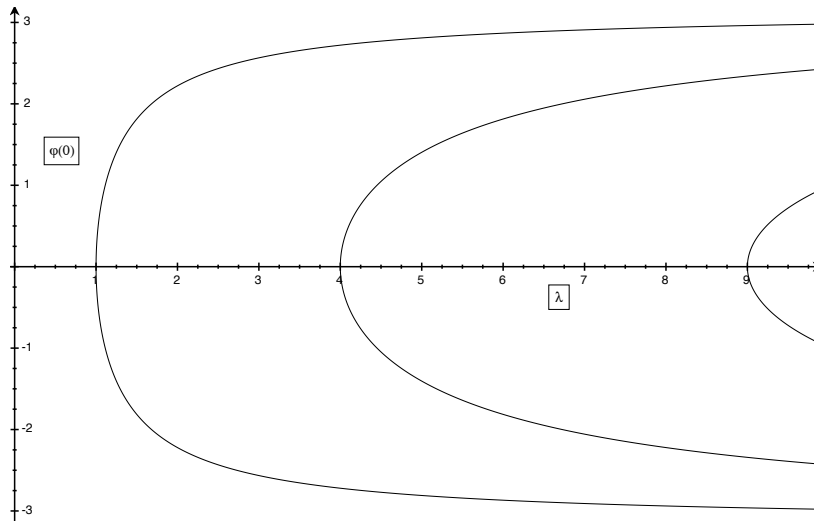
- se  $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \leq L < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ , oltre alla soluzione nulla abbiamo una nuova soluzione: la barra si è piegata, la sua forma è quella di una funzione convessa, oppure concava;

- se  $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} \leq L < \frac{3\pi}{\sqrt{\lambda}}$ , compare un'ulteriore soluzione, a forma di esse, con un punto di flesso centrale;

- e così via: all'aumentare di  $\lambda$  compaiono sempre nuove soluzioni. I valori di  $\lambda$  in cui si riscontra la nascita di una nuova soluzione si chiamano “valori di biforcazione”, e si possono elencare in una successione  $(\lambda_n)_n$ . Precisamente, si ha

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Notiamo inoltre che le soluzioni compaiono sempre a coppie, con valori iniziali  $\varphi(0)$  di segno opposto (ricordo che  $\varphi(0) = x(0)$ ). Nel seguente “diagramma di biforcazione”, con  $L = \pi$ , in ascissa è riportato il valore del parametro  $\lambda$ , in ordinata il valore  $\varphi(0)$  delle possibili soluzioni.



## Riferimenti bibliografici

- [1] E. Cesaro, *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, Fratelli Bocca, 1894.
- [2] J. Mawhin, Global results for the forced pendulum equation. *Handbook of differential equations*, 533–589, Elsevier, Amsterdam, 2004.
- [3] J. Mawhin and M. Willem, Multiple solutions of the periodic boundary value problem for some forced pendulum-type equations, *J. Differential Equations* 52 (1984), 264–287.