

# Corso di “Modelli”

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica, a.a. 2017/2018

## 1. Ponti sospesi

Un ponte è una struttura complessa, le cui componenti sono soggette a varie forme di sollecitazioni. I più lunghi al mondo sono tutti di tipo *ponte sospeso*. Attualmente il ponte di Akashi, in Giappone, detiene il record di lunghezza della campata centrale, con i suoi 1991 metri.



Scorrendo la lista dei ponti sospesi più lunghi, vedi ad esempio

[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_longest\\_suspension\\_bridge\\_spans](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_longest_suspension_bridge_spans)

si trovano al tredicesimo e al quattordicesimo posto il Ponte di Verrazzano a New York (1298 metri) e il Golden Gate Bridge a San Francisco (1280 metri). È notevole il fatto che quest'ultimo sia stato costruito nel 1937, ottant'anni fa, ed è tuttora in uso. Tre anni dopo fu costruito un altro ponte, che però non ebbe altrettanta fortuna.

Inaugurato il 1° luglio 1940, il Ponte di Tacoma Narrows divenne subito famoso per la sua caratteristica di oscillare verticalmente, in presenza di vento trasversale, con oscillazioni di uno-due metri di ampiezza. Questo comportamento inusuale era dovuto al fatto che il ponte aveva una sezione molto stretta e di piccolo spessore, per cui risultava molto flessibile rispetto ai ponti costruiti fino ad allora.

Il mattino del 7 novembre 1940 il ponte stava oscillando, come al solito, quando improvvisamente le oscillazioni verticali si trasformarono in oscillazioni trasversali. Queste aumentarono in ampiezza fino a superare l'angolo di 45° e, alle ore 11:10, la struttura cedette precipitando nel mare sottostante. Il breve documentario su

[www.youtube.com/watch?v=KVC7oBKzq9U](http://www.youtube.com/watch?v=KVC7oBKzq9U)

mostra la sequenza delle oscillazioni del ponte prima del crollo, e ne attribuisce la causa al fenomeno della *risonanza*.

Questo fenomeno è ben noto per i sistemi *lineari*. Esso entra in gioco quando la frequenza di un termine forzante periodico risulta uguale alla frequenza delle oscillazioni libere della struttura. Si è allora ipotizzato che la forza periodica agente sulla struttura fosse provocata dai *vortici di von Karman*, che si alternano in modo periodico al passare del fluido lungo la struttura. Un rapido calcolo permette però di vedere che la frequenza delle oscillazioni del ponte di Tacoma non era strettamente correlata con la velocità del vento, e quindi con la frequenza dei vortici da esso generati.

D'altra parte, un modello lineare presuppone che la struttura presenti *piccole oscillazioni*, mentre le oscillazioni del ponte di Tacoma, quel 7 novembre del 1940, erano evidentemente di grande ampiezza. Inoltre, la struttura stessa di un ponte sospeso è asimmetrica: le funi che lo sostengono agiscono da una sola parte del ponte, per cui una trazione verso il basso incontra una forza di richiamo elastica nel verso contrario, mentre un sollevamento del ponte verso l'alto potrebbe far allentare le funi, per cui non ci sarebbe alcuna forza di richiamo.

Viene allora spontanea una domanda: esiste una *risonanza nonlineare*? Come la si può definire?

## 2. L'oscillatore armonico forzato

Per cercare di rispondere in qualche modo a questa domanda, sarà bene iniziare con un breve ripasso sull'equazione differenziale di un oscillatore armonico con termine forzante periodico. Consideriamo l'equazione differenziale scalare

$$u'' + \lambda u = e(t), \quad (1)$$

dove  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è continua e  $T$ -periodica, mentre  $\lambda > 0$  è un numero reale. Cerchiamo le soluzioni  $T$ -periodiche di (1).

Siccome  $\lambda > 0$ , le soluzioni dell'equazione

$$u'' + \lambda u = 0 \tag{2}$$

sono tutte periodiche di periodo  $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ :

$$u(t) = a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t).$$

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\lambda u, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono ellissi di equazione  $v^2 + \lambda u^2 = c$ , con  $c \geq 0$ , che circondano l'origine, il quale pertanto è un **centro isocrono**.

Consideriamo ora, sempre per  $\lambda > 0$ , l'equazione (1) e scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\lambda u + e(t). \end{cases}$$

Ponendo  $u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , la soluzione con punto iniziale  $w(0) = w_0$  è data da

$$w(t) = W(t) \left( w_0 + \int_0^t W^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ e(s) \end{pmatrix} ds \right),$$

dove  $W(t)$  è la matrice wronskiana con  $W(0) = I$ :

$$W(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \\ -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} t) & \cos(\sqrt{\lambda} t) \end{pmatrix}.$$

Scrivendo  $w_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$  e sviluppando, essendo

$$W^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} s) & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} s) \\ \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} s) & \cos(\sqrt{\lambda} s) \end{pmatrix},$$

troviamo

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(\sqrt{\lambda} t) \left( u_0 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} t) \left( v_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds \right), \\ v(t) &= -\sin(\sqrt{\lambda} t) \left( \sqrt{\lambda} u_0 - \int_0^t e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds \right) + \\ &\quad + \cos(\sqrt{\lambda} t) \left( v_0 + \int_0^t e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds \right). \end{aligned}$$

Distinguiamo due casi con caratteristiche completamente diverse.

I caso. Se  $\lambda = \left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$ , per un certo intero positivo  $N$ , considerando i coefficienti di Fourier <sup>1</sup>

$$a_N = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos\left(\frac{2\pi N}{T} s\right) ds, \quad b_N = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin\left(\frac{2\pi N}{T} s\right) ds,$$

si vede che

$$u(T) = u_0 - \frac{T^2 b_N}{4\pi N}, \quad v(T) = v_0 + \frac{T a_N}{2}.$$

Quindi, in questo caso, ci sono soluzioni  $T$ -periodiche di (1) se e solo se  $a_N = b_N = 0$ . In tal caso, **tutte le soluzioni** di (1) **sono  $T$ -periodiche**.

Al contrario, se  $a_N \neq 0$  o  $b_N \neq 0$ , **tutte le soluzioni** di (1) **sono illimitate**, sia in passato che in futuro. Si vede infatti che, per  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$u(kT) = u_0 - k \frac{T^2 b_N}{4\pi N}, \quad v(kT) = v_0 + k \frac{T a_N}{2}.$$

II caso. Se  $\lambda > 0$  è tale che  $\lambda \neq \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , poniamo

$$\alpha_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \cos(\sqrt{\lambda} s) ds, \quad \beta_\lambda = \frac{2}{T} \int_0^T e(s) \sin(\sqrt{\lambda} s) ds.$$

Cerchiamo una soluzione  $T$ -periodica di (1) imponendo che sia  $w(T) = w_0$ . Risolvendo il sistema  $\{u(T) = u_0, v(T) = v_0\}$ , ossia

$$\begin{cases} u_0 = \cos(\sqrt{\lambda} T) \left( u_0 - \frac{T}{2\sqrt{\lambda}} \beta_\lambda \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} T) \left( v_0 + \frac{T}{2} \alpha_\lambda \right), \\ v_0 = -\sin(\sqrt{\lambda} T) \left( \sqrt{\lambda} u_0 - \frac{T}{2} \beta_\lambda \right) + \cos(\sqrt{\lambda} T) \left( v_0 + \frac{T}{2} \alpha_\lambda \right), \end{cases}$$

troviamo

$$u_0 = \frac{T}{4\sqrt{\lambda}} \left( \beta_\lambda + \frac{\sin(\sqrt{\lambda} T)}{1 - \cos(\sqrt{\lambda} T)} \alpha_\lambda \right), \quad v_0 = \frac{T}{4} \left( \frac{1 + \cos(\sqrt{\lambda} T)}{\sin(\sqrt{\lambda} T)} \beta_\lambda - \alpha_\lambda \right).$$

Quindi, in questo caso, **esiste un'unica soluzione  $T$ -periodica** di (1). La denotiamo con  $u_{\lambda,e}(t)$ . **Tutte le altre soluzioni** di (1) **sono** del tipo

$$u(t) = u_{\lambda,e}(t) + a \cos(\sqrt{\lambda} t) + b \sin(\sqrt{\lambda} t),$$

e sono pertanto **tutte limitate** su  $\mathbb{R}$ .

Notiamo infine che, se  $\lambda$  tende a  $\left(\frac{2\pi N}{T}\right)^2$ , per un certo  $N \in \mathbb{N}$ , allora  $\alpha_\lambda \rightarrow a_N$ ,  $\beta_\lambda \rightarrow b_N$  e l'ampiezza di  $u_{\lambda,e}(t)$  tende all'infinito se  $a_N \neq 0$  o  $b_N \neq 0$ .

---

<sup>1</sup>Ricordiamo che si ha

$$e(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right).$$

### 3. Risonanza nonlineare

Passiamo ora allo studio degli oscillatori asimmetrici. Consideriamo l'equazione differenziale scalare

$$u'' + \mu u^+ - \nu u^- = e(t), \quad (3)$$

dove  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua e  $T$ -periodica e  $\mu > 0$ ,  $\nu > 0$  sono due numeri reali. Qui

$$u^+ = \max\{u, 0\} = \frac{u + |u|}{2}, \quad u^- = \max\{-u, 0\} = \frac{-u + |u|}{2}.$$

Si noti che  $u = u^+ - u^-$ , mentre  $|u| = u^+ + u^-$ . Se  $\mu = \nu$ , abbiamo l'equazione lineare, che è stata studiata sopra.

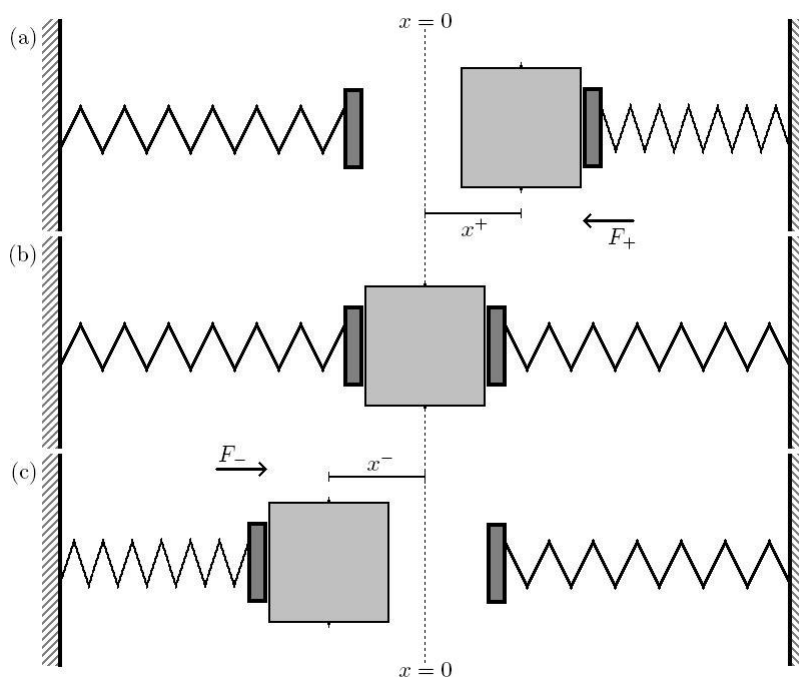


Figura 1: Un oscillatore asimmetrico costituito da una massa e due molle: il corpo risente della forza elastica della molla sulla destra quando si sposta verso destra (a), le due molle sono a riposo quando si trova nella posizione  $x = 0$  (b), mentre risente della forza elastica della molla sulla sinistra quando si sposta verso sinistra (c).

Essendo  $\mu$  e  $\nu$  positivi, le soluzioni dell'equazione

$$u'' + \mu u^+ - \nu u^- = 0 \quad (4)$$

sono tutte periodiche di periodo

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}.$$

Una soluzione è data da

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu}t) & \text{se } t \in \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right], \\ \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\left(\sqrt{\nu}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} - t\right)\right) & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}, \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right], \end{cases}$$

estesa a tutto  $\mathbb{R}$  in modo da risultare  $\tau$ -periodica. Tutte le altre soluzioni di (4) sono del tipo  $u(t) = \rho\phi(t + \theta)$ , con  $\rho \geq 0$  e  $\theta \in [0, \tau[$ .

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = -\mu u^+ + \nu u^-, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono curve chiuse che circondano l'origine, il quale pertanto è un centro isocrono. Ognuna di queste curve è ottenuta incollando assieme due semi-ellissi, ossia

$$\{(u, v) : u \geq 0 \text{ e } v^2 + \mu u^2 = c\} \cup \{(u, v) : u \leq 0 \text{ e } v^2 + \nu u^2 = c\},$$

con  $c \geq 0$ .

Come nel caso lineare abbiamo considerato gli autovalori dell'operatore differenziale, così qui possiamo considerare l'insieme  $\Sigma$  delle coppie  $(\mu, \nu)$  per cui l'equazione (4) ha soluzioni  $T$ -periodiche non nulle. Si vede allora che  $\Sigma$  contiene, oltre ai due assi cartesiani  $\{\mu = 0\}$  e  $\{\nu = 0\}$ , una successione  $(C_N)_{N \geq 1}$  di curve:

$$C_N = \left\{ (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \mu > 0, \nu > 0, N \left( \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} \right) = T \right\}.$$

L'insieme  $\Sigma$  è spesso chiamato **spettro di Fučík**.

A differenza dell'equazione lineare, non è pensabile di scrivere le soluzioni  $T$ -periodiche di (3) in modo esplicito. Possiamo comunque enunciare alcuni risultati sulla dinamica delle soluzioni dell'equazione (3).

**Teorema.** *Se  $(\mu, \nu) \notin \Sigma$ , allora l'equazione (3) ha almeno una soluzione  $T$ -periodica.*

Si noti che la soluzione non è necessariamente unica. Ad esempio, prendendo  $e(t) = 1$ , costante, abbiamo un punto di equilibrio  $u = \frac{1}{\mu}$ . In un intorno di questo punto, le soluzioni risolvono l'equazione lineare

$$u'' + \mu u = 0$$

e sono pertanto periodiche di periodo  $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ . D'altra parte, le soluzioni di grande ampiezza hanno un periodo che si avvicina a  $\tau$ . Supponiamo che sia  $\nu < \mu$ . Se  $n$  è un intero positivo tale che

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} < \frac{T}{n} < \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}},$$

troviamo in corrispondenza una soluzione  $T$ -periodica, di periodo minimo  $\frac{T}{n}$ . Di tali  $n$  ce ne possono essere molti.

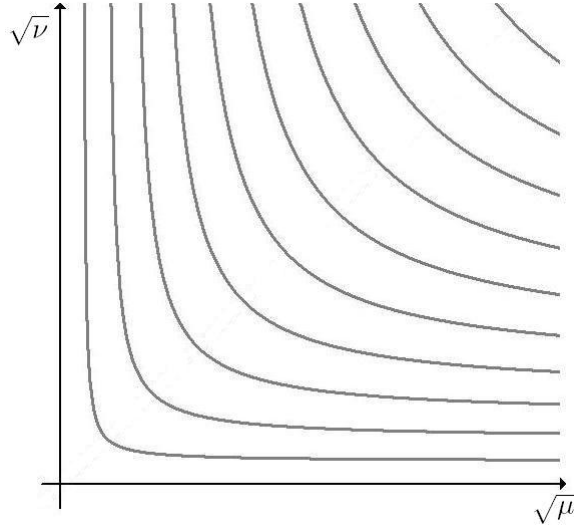


Figura 2: Lo spettro di Fučík.

Supponiamo ora che sia  $(\mu, \nu) \in \Sigma$ , per cui esiste un  $N \in \mathbb{N}$  tale che

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} = \frac{T}{N}.$$

Definiamo la funzione  $\tau$ -periodica

$$\Phi(\theta) = \int_0^T e(t)\phi(t + \theta) dt.$$

**Teorema.** *Se*

$$\Phi(\theta) \neq 0, \quad \text{per ogni } \theta \in \mathbb{R},$$

*allora l'equazione (3) ha almeno una soluzione  $T$ -periodica. Inoltre, tutte le soluzioni sono limitate.*

Diversa è la situazione se la funzione  $\Phi$  cambia segno. Faremo l'ipotesi che essa abbia solo zeri semplici, ossia che, se  $\Phi(\theta) = 0$ , allora  $\Phi'(\theta) \neq 0$ . Osserviamo che, in questo caso, essendo  $\tau$ -periodica, la funzione  $\Phi$  avrà nell'intervallo  $[0, \tau[$  un numero pari di zeri.

**Teorema.** *Se gli zeri della funzione  $\Phi$  nell'intervallo  $[0, \tau[$  sono tutti semplici ed il loro numero è di almeno quattro, allora l'equazione (3) ha almeno una soluzione  $T$ -periodica. D'altra parte, in questo caso, tutte le soluzioni di grande ampiezza sono illimitate.*

Ci sono effettivamente degli esempi in cui la funzione  $\Phi$  ha esattamente due zeri semplici nell'intervallo  $[0, \tau[$  e l'equazione (3) non ha soluzioni  $T$ -periodiche.

## 4. Altri tipi di oscillatori isocroni <sup>2</sup>

Ci chiediamo ora cosa succede se  $\nu \rightarrow +\infty$ , lasciando  $\mu$  invariata, andando quindi a coinvolgere gli asintoti delle curve che costituiscono lo spettro di Fučík (fissando  $\nu$  e facendo tendere  $\mu$  a infinito si ottengono analoghi risultati). Ricordando che la funzione  $\phi(t)$  risulta periodica di periodo

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}},$$

passando al limite per  $\nu \rightarrow +\infty$  otteniamo il valore

$$\tau_\mu = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Inoltre, l'intervallo in cui  $\phi(t)$  è negativa va assotigliandosi fino a scomparire, dando luogo alla funzione

$$\phi_\mu(t) = |\sin(\sqrt{\mu}t)|, \quad t \in \mathbb{R},$$

che risulta una funzione periodica di periodo  $\tau_\mu$  ma non è più derivabile nei punti in cui  $\phi_\mu(t) = 0$ .

Quale significato assume dunque questa funzione? Fisicamente abbiamo un oscillatore asimmetrico dove i coefficienti  $\mu, \nu$  rappresentano le costanti elastiche delle due molle. Passando al limite per  $\nu \rightarrow +\infty$  siamo in presenza di una molla con costante elastica infinita: è di fatto un muro che restituisce istantaneamente e senza compressione l'impulso al momento dell'impatto. Questo modello è noto come *oscillatore armonico con impatto*, che descrive il moto di una particella che, soggetta alla forza elastica di una molla, urta contro una barriera posta nel punto in cui la molla è a riposo. Una soluzione dell'oscillatore armonico con impatto ha le seguenti caratteristiche:

- obbedisce all'equazione differenziale  $\ddot{x} + \mu x = 0$  in ogni istante in cui  $x > 0$ , ovvero la particella risente della forza elastica quando non si trova a contatto col muro.
- negli istanti  $t_0$  in cui vale  $x(t_0) = 0$  si ha che

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} x'(t) = - \lim_{t \rightarrow t_0^+} x'(t),$$

ovvero la velocità cambia segno istantaneamente nel momento in cui la particella urta la barriera (urto totalmente elastico).

Le soluzioni sono del tipo  $x(t) = C\phi_\mu(t - t_0)$  con  $C \geq 0$  e  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>2</sup>Questa parte del corso è stata svolta dal prof. Andrea Sfecci.



Possiamo ora considerare un oscillatore con impatto in presenza di un forzante  $T$ -periodico  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , che soddisfi l'equazione differenziale

$$\ddot{x} + \mu x = e(t), \quad x > 0 \quad (5)$$

arricchita della condizione di urto totalmente elastico vista sopra.

**Teorema.** *Se  $T \notin \{N\pi/\sqrt{\mu} \mid N \in \mathbb{N}^+\}$  allora l'oscillatore con impatto (5) ha una soluzione  $T$ -periodica.*

Consideriamo ora l'equazione dell'oscillatore armonico nello spazio tridimensionale

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mu \mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \mu > 0. \quad (6)$$

Essendo in presenza di una forza centrale, abbiamo la conservazione del momento angolare e di conseguenza il moto risulta piano (come nel caso del problema della gravitazione). Con gli stessi calcoli si possono quindi introdurre le coordinate polari e ottenere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \frac{L^2}{\rho^3} + \mu\rho = 0, \\ L = \rho^2\dot{\theta}. \end{cases} \quad (7)$$

(Escludiamo quindi il caso di un moto che avviene lungo una retta in quanto otterremmo un oscillatore armonico unidimensionale e consideriamo solo soluzioni che non passano per l'origine.) Da qui in avanti studieremo la prima equazione differenziale in (7), ovvero

$$\ddot{x} - \frac{L^2}{x^3} + \mu x = 0.$$

Possiamo scriverla anche come

$$\ddot{x} + V'(x) = 0, \quad (8)$$

dove

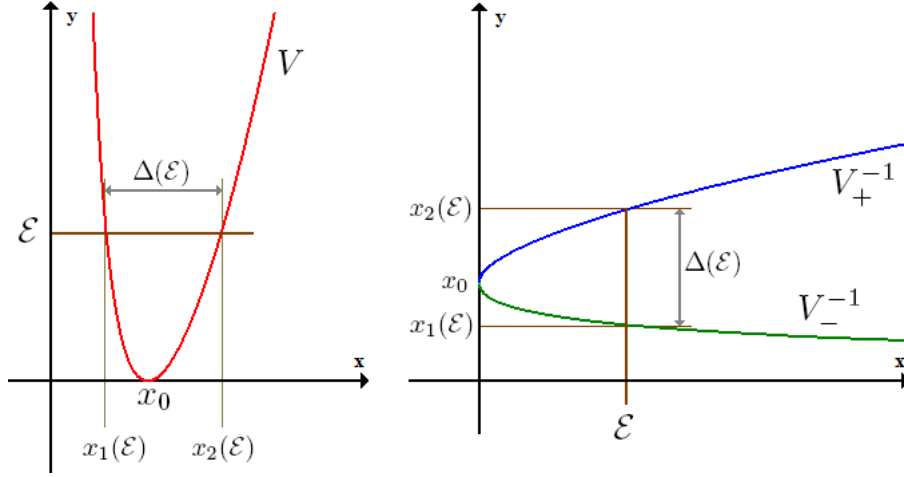
$$V(x) = \frac{L^2}{2x^2} + \mu \frac{x^2}{2} - L\sqrt{\mu}$$

è il *potenziale* associato. Sappiamo che l'energia  $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$  è conservata lungo le soluzioni.

Vediamo alcune proprietà del potenziale  $V : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definito sopra. Risulta essere una funzione continua, convessa e presenta un minimo in  $x_0 = (L^2/\mu)^{1/4}$  con valore  $V(x_0) = 0$  (il termine  $-L\sqrt{\mu}$  è stato aggiunto proprio per ottenere questo valore). In particolare, per ogni  $\mathcal{E} > 0$ , l'equazione  $V(x) = \mathcal{E}$  ammette due soluzioni  $x_1(\mathcal{E})$  e  $x_2(\mathcal{E})$  con  $x_1(\mathcal{E}) < x_2(\mathcal{E})$ . Inoltre, le restrizioni di  $V$  sugli intervalli  $(0, x_0]$  e  $[x_0, +\infty)$  sono invertibili, e possiamo definire le *due inverse locali* di  $V$ :

$$V_-^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow (0, x_0] \quad \text{e} \quad V_+^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [x_0, +\infty).$$

Si può a questo punto verificare che, per definizione,  $V_-^{-1}(\mathcal{E}) = x_1(\mathcal{E})$  e  $V_+^{-1}(\mathcal{E}) = x_2(\mathcal{E})$ . Inoltre  $V_-^{-1}(0) = V_+^{-1}(0) = x_0$ .



**Proposizione.** La distanza  $\Delta(\mathcal{E}) = x_2(\mathcal{E}) - x_1(\mathcal{E})$  tra le due soluzioni dell'equazione  $V(x) = \mathcal{E}$  risulta essere

$$\Delta(\mathcal{E}) = V_+^{-1}(\mathcal{E}) - V_-^{-1}(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{\mu}}$$

per ogni  $\mathcal{E} \geq 0$ .

Dimostrazione. Dall'equazione  $V(x) = E$  otteniamo la biquadratica

$$\mu x^4 - 2(E + L\sqrt{\mu})x^2 + L^2 = 0,$$

di cui cerchiamo le soluzioni positive. Le due soluzioni si ottengono nel modo usuale: sostituendo  $\xi = x^2$  dobbiamo risolvere l'equazione

$$\mu \xi^2 - 2(E + L\sqrt{\mu})\xi + L^2 = 0,$$

con soluzioni

$$\xi_{1,2} = \frac{(E + L\sqrt{\mu}) \pm \sqrt{E^2 + 2EL\sqrt{\mu}}}{\mu}.$$

Quindi, estraendo la radice quadrata,

$$x_1(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{(E + L\sqrt{\mu}) - \sqrt{E^2 + 2EL\sqrt{\mu}}}{\mu}},$$

$$x_2(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{(E + L\sqrt{\mu}) + \sqrt{E^2 + 2EL\sqrt{\mu}}}{\mu}}.$$

Usando la formula dei radicali doppi

$$\sqrt{c \pm \sqrt{d}} = \sqrt{\frac{c + \sqrt{c^2 - d}}{2}} \pm \sqrt{\frac{c - \sqrt{c^2 - d}}{2}},$$

con  $c = E + L\sqrt{\mu}$  e  $d = E^2 + 2EL\sqrt{\mu}$ , otteniamo

$$x_1(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{E + 2L\sqrt{\mu}}{2\mu}} - \sqrt{\frac{E}{2\mu}},$$

$$x_2(\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{E + 2L\sqrt{\mu}}{2\mu}} + \sqrt{\frac{E}{2\mu}},$$

da cui si calcola facilmente  $\Delta(E) = x_2(E) - x_1(E) = \sqrt{\frac{2E}{\mu}}$  concludendo la dimostrazione. ■

Considero ora una soluzione di

$$\ddot{x} + V'(x) = 0, \quad V(x) = \frac{L^2}{2x^2} + \mu\frac{x^2}{2} - L\sqrt{\mu}, \quad x > 0, \quad (9)$$

avente energia  $\mathcal{E} > 0$ . Ovvero, la soluzione tale che  $\mathcal{E} = E(x(t), \dot{x}(t))$  per ogni istante  $t$  del suo dominio di definizione.<sup>3</sup> Possiamo scrivere il sistema associato del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) \end{cases} \quad (10)$$

introducendo la variabile  $y$  che, sostanzialmente, è la velocità radiale di una particella che obbedisce alla (6). Possiamo così visualizzare il moto unidimensionale di una particella che obbedisce all'equazione (9) in un piano avente sulle ascisse la coordinata spaziale e in ordinata la velocità, detto *spazio delle fasi* o *spazio delle configurazioni*. Poiché l'equazione è definita solo per  $x$  positive, considereremo solo il semipiano a destra dell'asse delle ordinate.

Disegniamo l'insieme

$$\Gamma_{\mathcal{E}} = \{(x, y) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \mid E(x, y) = \mathcal{E}\}.$$

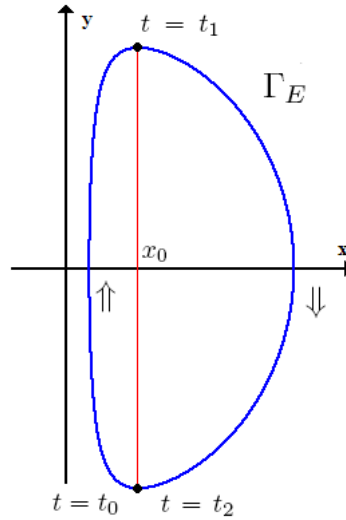
Esso è l'*orbita* della soluzione di (9) avente energia  $\mathcal{E}$ . In questo modo possiamo interpretare una soluzione di (9) come una particella che si muove lungo il percorso  $\Gamma_{\mathcal{E}}$ . In ogni istante questa si muove secondo le equazioni del sistema (10) che ne esprimono la velocità ad ogni istante. Si può verificare che si muove in senso orario: infatti da  $\dot{x} = y$  si deduce che la  $x$  cresce lungo  $\Gamma_{\mathcal{E}}$  quando  $y > 0$ . Poiché la funzione  $E$  è coerciva, ovvero  $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} E(x, y) = +\infty$ , l'insieme  $\Gamma_{\mathcal{E}}$  è limitato. Inoltre risulta una curva chiusa e semplice. L'insieme  $\Gamma_{\mathcal{E}}$  ha quattro *punti di estremo*: due orizzontali  $(x_1(\mathcal{E}), 0)$ , il punto più a sinistra, e  $(x_2(\mathcal{E}), 0)$ , il punto più a destra, e due verticali  $(x_0, -\sqrt{2\mathcal{E}})$ , il punto più in basso, e  $(x_0, \sqrt{2\mathcal{E}})$ , il punto più in alto.

<sup>3</sup>Esercizio: mostrare che la soluzione con energia  $\mathcal{E} = 0$  è la soluzione costante  $x(t) \equiv x_0$

Inoltre fissato  $y \in (-\sqrt{2\mathcal{E}}, \sqrt{2\mathcal{E}})$  possiamo individuare due punti appartenenti a  $\Gamma_{\mathcal{E}}$  con questa ordinata: i valori delle loro ascisse risolvono l'equazione  $V(x) = \mathcal{E} - \frac{1}{2}y^2$ , quindi posso scriverli come

$$(V_-^{-1}(\mathcal{E} - \frac{1}{2}y^2), y) \quad \text{e} \quad (V_+^{-1}(\mathcal{E} - \frac{1}{2}y^2), y) \quad (11)$$

Si potrebbe dimostrare a questo punto in maniera rigorosa che ogni soluzione con energia  $\mathcal{E} > 0$  risulta periodica. Qui ci limitiamo a calcolarne il periodo.



**Proposizione.** *Tutte le soluzioni dell'equazione (9) sono periodiche di periodo  $\tau = \pi/\sqrt{\mu}$ .*

Dimostrazione. Fissiamo  $E > 0$  e consideriamo la soluzione periodica  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dell'equazione (9) con tale energia e chiamiamo  $\tau(E)$  il suo periodo minimale. La coppia  $(x, y) = (x, \dot{x}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  è soluzione del sistema (10) e *percorre* in senso orario l'insieme  $\Gamma_E$ . Tale soluzione completa il percorso  $\Gamma_E$  in un tempo pari al periodo  $\tau(E)$ . All'interno del dominio di  $x$  possiamo trovare degli istanti  $t_0 < t_1 < t_2$  con le seguenti proprietà: la soluzione al tempo  $t = t_0$  si trova in  $(x_0, -\sqrt{2E})$ , l'estremo in basso, quindi al tempo  $t = t_1$  si trova in  $(x_0, \sqrt{2E})$ , l'estremo in alto, infine al tempo  $t = t_2$  ritorna in  $(x_0, -\sqrt{2E})$  completando il giro. In particolare abbiamo  $t_2 - t_0 = \tau(E)$ .

Usando la (11), posso esprimere la coordinata  $x(t)$  della soluzione rispetto all'ordinata  $y(t)$  a seconda che valga  $x(t) < x_0$  o  $x(t) > x_0$ , cosicché dalla seconda equazione in (10) abbiamo

$$-\dot{y}(t) = V'(x(t)) = \begin{cases} V'(V_-^{-1}(E - \frac{1}{2}y(t)^2)) & \text{se } x(t) < x_0, \\ V'(V_+^{-1}(E - \frac{1}{2}y(t)^2)) & \text{se } x(t) > x_0. \end{cases}$$

Ricordando il teorema della derivata dell'inversa:

$$Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \Rightarrow f'(f^{-1}(y_0)) = [Df^{-1}(y_0)]^{-1},$$

possiamo trovare che vale

$$-\dot{y}(t) = \begin{cases} [(V_-^{-1})'(E - \frac{1}{2}y(t)^2)]^{-1} & \text{se } x(t) < x_0, \\ [(V_+^{-1})'(E - \frac{1}{2}y(t)^2)]^{-1} & \text{se } x(t) > x_0. \end{cases}$$

Siamo pronti per calcolare il periodo

$$\begin{aligned} \tau(E) &= t_2 - t_0 = (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) = \int_{t_0}^{t_1} 1 \, dt + \int_{t_1}^{t_2} 1 \, dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [-\dot{y}(t)][-\dot{y}(t)]^{-1} \, dt + \int_{t_1}^{t_2} [-\dot{y}(t)][-\dot{y}(t)]^{-1} \, dt. \end{aligned}$$

A questo punto possiamo sostituire le precedenti stime nell'integrale, ricordando che nell'intervallo  $(t_0, t_1)$  si ha  $x(t) < x_0$ , mentre in  $(t_1, t_2)$  si ha  $x(t) > x_0$ , ottenendo

$$\tau(E) = \int_{t_0}^{t_1} [-\dot{y}(t)][(V_-^{-1})'(E - \frac{1}{2}y(t)^2)] \, dt + \int_{t_1}^{t_2} [-\dot{y}(t)][(V_+^{-1})'(E - \frac{1}{2}y(t)^2)] \, dt.$$

A questo punto, usando il cambio di variabile  $y = y(t)$ , abbiamo

$$\tau(E) = \int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} -[(V_-^{-1})'(E - \frac{1}{2}y^2)] \, dy + \int_{\sqrt{2E}}^{-\sqrt{2E}} -[(V_+^{-1})'(E - \frac{1}{2}y^2)] \, dy,$$

da cui, invertendo gli estremi del secondo integrale,

$$\tau(E) = \int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} -[(V_-^{-1})'(E - \frac{1}{2}y^2)] \, dy + \int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} [(V_+^{-1})'(E - \frac{1}{2}y^2)] \, dy.$$

Posso accorpate gli integrali e ottenere:

$$\tau(E) = \int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} [(V_+^{-1})'(E - \frac{1}{2}y^2)] - [(V_-^{-1})'(E - \frac{1}{2}y^2)] \, dy.$$

L'integrando è del tipo  $f_1(k) - f_2(k) = (f_1 - f_2)(k)$  con  $k = E - \frac{1}{2}y^2$ , quindi posso scriverlo anche come

$$\tau(E) = \int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} [(V_+^{-1})' - (V_-^{-1})'](E - \frac{1}{2}y^2) \, dy.$$

Posso ora usare la linearità della derivazione  $g'_1 - g'_2 = (g_1 - g_2)'$  ottenendo

$$\tau(E) = \int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} [(V_+^{-1}) - (V_-^{-1})]'(E - \frac{1}{2}y^2) \, dy.$$

Adesso, ricordando la Proposizione precedente, vediamo che

$$\Delta(\mathcal{E}) = V_+^{-1}(\mathcal{E}) - V_-^{-1}(\mathcal{E}) = [V_+^{-1} - V_-^{-1}](\mathcal{E}) = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{\mu}},$$

e troviamo  $\Delta'(\mathcal{E}) = [V_+^{-1} - V_-^{-1}]'(\mathcal{E}) = \left[ \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{\mu}} \right]' = \sqrt{\frac{1}{2\mathcal{E}\mu}}$ . Quindi, essendo  $\mathcal{E} = E - \frac{1}{2}y^2$  nell'integrale, risulta

$$\tau(E) = \int_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} \frac{1}{\sqrt{2\mu}} \frac{dy}{\sqrt{E - \frac{1}{2}y^2}} = \left[ \frac{1}{\sqrt{\mu}} \arcsin \left( \frac{y}{\sqrt{2E}} \right) \right]_{-\sqrt{2E}}^{\sqrt{2E}} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}},$$

indipendentemente dal valore di  $E$  considerato. ■

Con dimostrazione analoga, si può dimostrare il seguente

**Teorema.** *Sia  $V : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $C^2$ , convessa con minimo in  $x_0 \in (a, b)$  tale che  $V(x_0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} V(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} V(x) = \ell$ . Essa ammette quindi inverse locali  $V_-^{-1} : (a, x_0] \rightarrow [0, \ell)$  e  $V_+^{-1} : [x_0, b) \rightarrow [0, \ell)$ . Supponiamo che valga*

$$\Delta(y) = V_+^{-1}(y) - V_-^{-1}(y) = c\sqrt{y}.$$

*allora le soluzioni periodiche dell'equazione differenziale  $\ddot{x} + V'(x) = 0$ ,  $x \in (a, b)$  hanno periodo  $T = \pi c / \sqrt{2}$ .*

Questo risultato vale per il potenziale  $V$  appena visto con  $(a, b) = (0, +\infty)$ , per il potenziale armonico  $V(x) = kx^2$  con  $(a, b) = \mathbb{R}$ , ma anche per altri potenziali come ad esempio  $V(x) = 1 + u - \sqrt{1 + 2u}$ , con  $(a, b) = (-1/2, 3/2)$ .

Concludiamo con qualche osservazione riguardante l'equazione

$$\ddot{x} - \frac{L^2}{x^3} + \mu x = 0$$

fin qui studiata e lo spettro di Fućik. Il grafico del potenziale  $V(x) = \frac{L^2}{2x^2} + \mu \frac{x^2}{2} - L\sqrt{\mu}$  ad essa associata *visto da lontano* può confondersi con il grafico del potenziale  $V(x) = \frac{1}{2}(\mu(x^+)^2 + \nu(x^-)^2)$  quando  $\nu$  diventa molto grande avvicinandosi all'asse delle ordinate. Riscrivendo il sistema (10) in coordinate polari centrate nel punto  $(x_0, 0)$  potremmo verificare che ogni orbita  $\Gamma_E$  (per valori molto grandi di  $E$ ) viene percorsa molto velocemente nella parte in cui  $x(t) < x_0$  mentre la maggior parte del periodo viene impiegata per percorrere la parte in  $x(t) > x_0$ . *Sembra quasi che ci sia un qualche muro* in  $x = x_0$  come nel caso dell'oscillatore con impatto che spinge la soluzione ad allontanarsi velocemente dall'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$ . Che in letteratura si trovino quindi risultati come il prossimo teorema sembra piuttosto ragionevole.

**Teorema.** *Data una funzione  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua e  $T$ -periodica, allora l'equazione differenziale*

$$\ddot{x} - \frac{L^2}{x^3} + \mu x = e(t)$$

*ha una soluzione  $T$ -periodica se  $T \notin \{N\pi/\sqrt{\mu} \mid N \in \mathbb{N}^+\}$ .*

Il termine  $-\frac{L^2}{x^3}$  può inoltre essere sostituito con altre funzioni continue  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0, \quad \int_0^1 g(x) dx = +\infty, \quad (12)$$

dove  $G$  è una primitiva di  $g$ . Tale proprietà permette infatti di considerare il potenziale  $\tilde{V}(x) = G(x) + \frac{1}{2}\mu x^2$  avente orbite simili a quelle già viste per  $V$ , ma non soddisfa ad esempio le proprietà descritte dalle Proposizioni precedenti. Tuttavia si può pervenire al seguente risultato analogo al precedente.

**Teorema.** *Sia  $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua  $T$ -periodica, e  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua soddisfacente (12) allora l'equazione differenziale*

$$\ddot{x} + g(x) + \mu x = e(t)$$

ha una soluzione  $T$ -periodica se  $T \notin \{N\pi/\sqrt{\mu} \mid N \in \mathbb{N}^+\}$ .

## 5. Ulteriori fenomeni oscillatori

Torniamo ora a un possibile modello di ponte sospeso, per quanto molto semplificato. Si tratta di un oscillatore in verticale, soggetto alla forza di gravità, sostenuto da una molla, con questa caratteristica: se lo si solleva al di sopra di un'altezza  $h$ , la molla si allenta e non esercita più alcuna forza. Misurando la posizione  $u(t)$  verso il basso, avremo l'equazione differenziale

$$u'' + F(u) = e(t),$$

dove

$$F(u) = \begin{cases} \mu(u+h) - g & \text{se } u \geq -h, \\ -g & \text{se } u \leq -h. \end{cases}$$

Osserviamo che, per ragioni di continuità, deve essere  $\mu h = g$ , per cui l'equazione si può scrivere brevemente come

$$u'' + \mu [(u+h)^+ - h] = e(t). \quad (13)$$

Iniziamo a studiare le oscillazioni libere, quando cioè il termine forzante è nullo. Prendendo una soluzione con condizioni iniziali  $u(0) = \alpha > 0$  e  $u'(0) = 0$ , si può vedere che essa è sempre periodica. Abbiamo due casi, a seconda che sia  $\alpha$  minore o maggiore di  $h$ . Infatti, se  $\alpha \leq h$ , la soluzione rimane nella zona lineare, e il suo periodo è

$$\tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Se invece  $\alpha \geq h$ , la soluzione esce dalla zona lineare, e si può calcolare che

$$\tau(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \left[ \arccos \left( -\frac{h}{\alpha} \right) + \sqrt{\left( \frac{\alpha}{h} \right)^2 - 1} \right].$$

Si nota che il periodo  $\tau(\alpha)$  è una funzione crescente di  $\alpha$ , strettamente crescente se  $\alpha \geq h$ , e

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \tau(\alpha) = +\infty.$$

Come si può allora ancora parlare di *risonanza* in questo caso?

Per quanto riguarda le soluzioni periodiche per l'equazione differenziale (13), avendo osservato che i periodi delle oscillazioni libere tendono a  $+\infty$  al crescere delle ampiezze, si può ipotizzare l'esistenza di *soluzioni subarmoniche*, ossia soluzioni  $kT$ -periodiche, dove  $k$  è un intero positivo sufficientemente grande. In effetti, vale il seguente risultato.

**Teorema.** *Esiste un numero naturale  $\bar{k}$  tale che, per ogni  $k \geq \bar{k}$ , l'equazione differenziale (13) ha almeno due soluzioni subarmoniche di periodo minimo  $kT$ .*

Passiamo ora a studiare un modello di ponte sospeso considerato come una trave elastica, che si estende lungo una direzione  $x$ . L'equazione differenziale diventa del tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \kappa \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mu [(u + h)^+ - h] = e(t, x),$$

dove  $\kappa > 0$  è un parametro di rigidità del ponte. Le condizioni di appoggio ai due estremi, posizionati in  $x = 0$  e  $x = L$ , si possono scrivere come

$$u(t, 0) = 0 = u(t, L), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, L).$$

Naturalmente, uno studio analitico di questo problema ai limiti associato a un'equazione alle derivate parziali diventa molto complicato, e poco si sa sull'esistenza o meno di soluzioni  $T$ -periodiche o subarmoniche, e ancor meno sulla limitatezza o meno di tutte le soluzioni. Si è riscontrato che, per alcune di queste equazioni, possono apparire delle onde viaggianti (le cosiddette *traveling waves*), ossia soluzioni del tipo  $u(t, x) = v(t - cx)$ , dove  $c$  denota la velocità dell'onda. Questo tipo di oscillazioni sono state effettivamente osservate in alcune strutture molto snelle: ad esempio, è significativa questa testimonianza di R.G. Cone, uno degli ingegneri costruttori del Golden Gate Bridge, che si trovava in prossimità del ponte il 9 febbraio 1938.

“The force of the wind was so strong that it was impossible to stand erect on the sidewalk, or the roadway of the bridge... I observed that the suspended structure of the bridge was undulating vertically in a wavelike motion of considerable amplitude... the wave motion appeared to be similar to that made by cracking a whip. The truss would be quiet for a second, and then in the distance, one could see a running wave of several nodes approaching... the oscillations and deflections of the bridge were so pronounced that they would seem unbelievable.”



Sono stati studiati anche altri tipi di modelli, più o meno realistici. Ad esempio, si è provato a vedere come interagisce la trave principale con il cavo elastico che la sostiene. Un modello di questo tipo è descrivibile con un sistema di due equazioni differenziali alle derivate parziali, e risulta molto difficile da analizzare. Ancor più complicato diventa un modello in cui si tengano conto delle oscillazioni delle due torri che sostengono i cavi, o delle campate laterali. Inoltre, bisognerebbe anche tener conto degli attriti, per quanto piccoli, che sono sempre presenti in una struttura meccanica.

Affrontiamo ora il problema delle oscillazioni torsionali del ponte, quelle considerate più pericolose per la sopravvivenza della struttura. Se si considera una sezione trasversale del ponte, indicando con  $u(t)$  la posizione del baricentro e con  $\theta(t)$  l'angolo di inclinazione della sezione, si ottiene un sistema di due equazioni differenziali del tipo

$$\begin{aligned} u'' + \mu_1[(u - a \sin \theta)^+ + (u + a \sin \theta)^+] &= e_1(t), \\ \theta'' + \mu_2 \cos \theta[(u - a \sin \theta)^+ + (u + a \sin \theta)^+] &= e_2(t). \end{aligned}$$

Anche qui lo studio delle soluzioni si presenta piuttosto arduo, in quanto possono entrare in gioco fenomeni non lineari di vario tipo, possibilmente anche caotici.

Per concludere, accenniamo al fatto che, recentemente, si sta cercando di studiare un modello di ponte sospeso il più possibile realistico, quale potrebbe essere una trave elastica avente una certa larghezza, per poter spiegare come oscillazioni verticali possano perdere stabilità e istantaneamente trasformarsi in oscillazioni torsionali.

## Riferimenti bibliografici

- [1] O.H. Amman, T. Von Karman, G.B. Woodruff, *The Failure of the Tacoma Narrows Bridge*, Federal Works Agency, Washington D.C., 1941,  
[http://authors.library.caltech.edu/45680/1/  
The%20Failure%20of%20the%20Tacoma%20Narrows%20Bridge.pdf](http://authors.library.caltech.edu/45680/1/The%20Failure%20of%20the%20Tacoma%20Narrows%20Bridge.pdf)
- [2] G. Arioli, F. Gazzola, Torsional instability in suspension bridges: the Tacoma Narrows Bridge case, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 42 (2017), 342–357.
- [3] A. Fonda, *Playing Around Resonance. An Invitation to the Search of Periodic Solutions for Second Order Ordinary Differential Equations*, Birkhäuser, Basel, 2016.
- [4] A.C. Lazer and P.J. McKenna, Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis, *SIAM Review* 32 (1990), 537–578.