

Corso di “Modelli”

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica, a.a. 2017/2018

1. Lancio di un oggetto in campo gravitazionale

Vogliamo studiare il moto di un oggetto lanciato da una certa altezza h dal terreno, con velocità v e angolo α rispetto all'orizzontale.

Cominciamo con un modello semplice, in cui supporremo che:

- l'oggetto lanciato sia puntiforme;
- non ci sia resistenza dell'aria, né forze dovute al vento;
- l'ambiente esterno sia immobile (niente rotazione terrestre, ad esempio);
- il terreno sia piatto;
- la forza di gravità lungo il moto sia costante;
- sia valida la teoria newtoniana ($F = ma$, per intenderci).

Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) , con il primo asse orizzontale, diretto verso la direzione del lancio, il secondo asse verticale passante per il punto di partenza della traiettoria di lancio, il terzo asse anch'esso orizzontale, ma ortogonale agli altri due. Le equazioni del moto sono

$$x_1''(t) = 0, \quad x_2''(t) = -g, \quad x_3''(t) = 0,$$

e le condizioni iniziali al tempo $t = 0$ sono

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_1'(0) = v \cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) = h, \\ x_2'(0) = v \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3(0) = 0, \\ x_3'(0) = 0, \end{cases}$$

dove supponiamo che $0 < \alpha < \pi/2$. In forma vettoriale, abbiamo

$$x''(t) = (0, -g, 0), \quad x(0) = (0, h, 0), \quad x'(0) = (v \cos \alpha, v \sin \alpha, 0).$$

⌈ Ricordando la formula della forza di attrazione gravitazionale, il valore di g si potrebbe calcolare come

$$g = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

dove $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ è la costante di gravitazione universale, $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ è la massa della Terra e $R_T = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ è il suo raggio. Ne risulterebbe che $g = 9,82 \text{ m/s}^2$. In realtà, ci sono due fattori che modificano tale valore: primo, la Terra non è sferica, ma appiattita ai poli, per cui la gravità percepita ai poli è

leggermente superiore rispetto a quella all'equatore, essendo i poli più vicini al centro della Terra; secondo, siccome la Terra ruota attorno al proprio asse, all'equatore la forza centrifuga rende la gravità percepita ancor minore. Ne risulta che $g = 9,78 \text{ m/s}^2$ all'equatore, mentre $g = 9,83 \text{ m/s}^2$ ai poli. In queste note, prenderemo sempre

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2.$$

Troviamo la soluzione:

$$x_1(t) = vt \cos \alpha, \quad x_2(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + vt \sin \alpha + h, \quad x_3(t) = 0.$$

L'orbita giace sul piano (x_1, x_2) , ed eliminando t abbiamo

$$x_2 = -\frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x_1^2 + (\tan \alpha)x_1 + h,$$

che è l'equazione di una parabola. Troviamo così il punto $(L(\alpha), 0)$ in cui la traiettoria interseca l'asse orizzontale, con

$$L(\alpha) = \frac{v^2}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 \sin^2 \alpha}} \right) \sin(2\alpha).$$

Iniziamo con il seguente.

Problema. Massimizzare $L(\alpha)$.

Notiamo che questo problema è interessante per una molteplicità di applicazioni, che vanno dallo sport

- lancio del peso,
- lancio del martello,
- lancio del disco,
- lancio del giavellotto,
- lancio di una pallina da golf, o da baseball
- salto in lungo, ...

alla balistica, ad esempio.

Per comodità di calcolo, poniamo $X = \sin^2 \alpha$ e corrispondentemente $F(X) = L(\alpha)$. Allora

$$F(X) = \frac{v^2}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 X}} \right) \sqrt{X - X^2},$$

e quindi

$$F'(X) = \frac{v^2}{g} \left(\frac{-\frac{gh}{v^2 X^2}}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 X}}} \sqrt{X - X^2} + \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2 X}} \right) \frac{1 - 2X}{2\sqrt{X - X^2}} \right).$$

Facendo i calcoli, vediamo che

$$F'(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = X_{\max} = \frac{\frac{1}{2} v^2}{v^2 + gh}.$$

Siamo così giunti alla conclusione:

$$L(\alpha) \text{ è massimo se e solo se } \alpha = \alpha_{\max},$$

con

$$\alpha_{\max} = \arcsin \sqrt{\frac{\frac{1}{2}v^2}{v^2 + gh}} = \arctan \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}}.$$

Sostituendo, troviamo la gittata massima:

$$L(\alpha_{\max}) = F(X_{\max}) = \frac{v\sqrt{v^2 + 2gh}}{g}.$$

Possiamo fare alcune considerazioni su questo risultato.

1. L'equazione della parabola per $\alpha = \alpha_{\max}$ è

$$x_2 = -\frac{g(v^2 + gh)}{v^2(v^2 + 2gh)}x_1^2 + \frac{v}{\sqrt{v^2 + 2gh}}x_1 + h.$$

L'altezza massima raggiunta è

$$(x_2)_{\max} = h + \frac{v^4}{4g(v^2 + gh)},$$

mentre il tempo di volo è

$$t_{\max} = \frac{\sqrt{2(v^2 + gh)}}{g}.$$

2. Se $h = 0$, si ha $\alpha_{\max} = \pi/4$, cioè $\alpha_{\max} = 45^\circ$ (si noti che, in questo caso, α_{\max} non dipende da v) e $L(\alpha_{\max}) = v^2/g$.

3. Se $h > 0$ è fissato, l'angolo α_{\max} dipende da v : se v è piccolo, anche α_{\max} è piccolo, mentre se v è molto grande, α_{\max} è prossimo a $\pi/4$.

4. Se v è fissato e h è molto grande, l'angolo α_{\max} sarà prossimo a zero.

Andiamo ora a confrontare il nostro risultato con alcune situazioni reali. Riportiamo una tabella con le misure effettuate sui lanci e sui salti reali dei campioni dello sport. Si nota subito una discrepanza, anche significativa, rispetto al valore dell'angolo calcolato teoricamente. Ad esempio, per il salto in lungo, si hanno valori tra 15° e 27° , mentre con il calcolo teorico, supponendo $v = 10 \text{ m/s}$ (la velocità di un corridore che fa 100 metri in 10 secondi), $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (l'accelerazione di gravità al suolo) e $h = 0,5 \text{ m}$ (la differenza di altezza del baricentro tra il momento dello stacco e quello di atterraggio), si trova che

$$\alpha_{\max} = \arctan \frac{10}{\sqrt{10^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 0,5}} = \arctan(0,914) = 42,4^\circ,$$

Come si spiega questo fatto?

Event	Angle (°)
shot put	26 – 41
javelin throw	26 – 40
discus throw	27 – 43
hammer throw	37 – 44
long jump	15 – 27
standing long jump	25 – 31

Figura 1: Angoli ottimali misurati nella realtà, da [5].

Si noti che

$$L(\alpha_{\max}) = \frac{10\sqrt{10^2 + 2 \cdot 9,8 \cdot 0,5}}{9,8} = 10,69 \text{ m},$$

mentre, se $\alpha = 27^\circ$, ad esempio, si ha

$$L(27^\circ) = \frac{10^2}{2 \cdot 9,8} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 9,8 \cdot 0,5}{10^2 \sin^2(27^\circ)}} \right) \sin(2 \cdot 27^\circ) = 9,14 \text{ m}.$$

In [5] si fornisce la seguente spiegazione: il nostro fisico è strutturato in modo da riuscire a sviluppare maggior forza in orizzontale piuttosto che in verticale. In altre parole, la velocità di partenza v dipende dall'angolo α . Nella tabella in Figura 2 si vede bene questo fatto, misurato su diversi atleti di lancio del peso. Se calcoliamo l'angolo ottimale, supponendo $h = 2 \text{ m}$ e

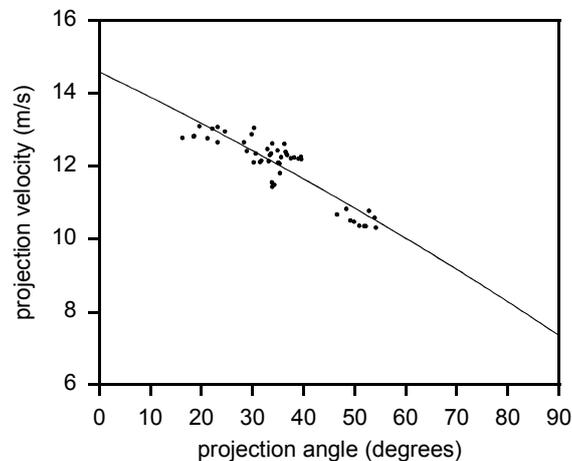


Figura 2: Dipendenza di v dall'angolo α , da [5].

$v = 12 \text{ m/s}$, troviamo $\alpha_{\max} = 41,5^\circ$. Ma se supponiamo che sia

$$v(\alpha) = 14,8 - 0,08 \alpha,$$

come in Figura 2, da uno studio grafico troviamo che $L(\alpha)$ è massimo per $\alpha = 30^\circ$ (valore approssimato).

Ci ricordiamo ora che, nell'affrontare il problema, abbiamo fatto molte ipotesi semplificative. Viene subito un dubbio: che la resistenza dell'aria giochi un ruolo significativo?

2. Effetti dell'aria su piccole masse

La resistenza dell'aria è una forza, con direzione contraria al moto, il cui modulo ha un'espressione teorica del tipo

$$F_{\text{res}} = \frac{1}{2}C\rho A|x'(t)|^2,$$

dove ρ è la densità dell'aria, A è l'area della sezione trasversale dell'oggetto, e C è un coefficiente che dipende dalla forma dell'oggetto.

[Qui semplifichiamo al massimo la teoria, perché la questione dell'attrito è estremamente complicata. Entrano in gioco forze molecolari, effetti aerodinamici quali turbolenza, formazione di onde, ecc. che non vorremmo considerare. Lo stesso coefficiente C potrebbe dipendere dalla velocità. Infatti, qui supponiamo che la forza di resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità, ma in realtà per velocità molto piccole c'è una proporzionalità quasi lineare, mentre per velocità prossime a quella del suono le cose cambiano drasticamente.]

Gli oggetti considerati nella tabella in Figura 1 sono tutti molto massivi, e le velocità in gioco sono piuttosto piccole, per cui la decelerazione dovuta alla resistenza dell'aria, cioè il rapporto F_{res}/m , risulta davvero molto piccola. Facciamo ad esempio una stima della resistenza dell'aria nel caso del salto in lungo. Prendiamo $C = 0,7$ (il coefficiente di resistenza aerodinamica), $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$ (la densità dell'aria), $A = 0.75 \text{ m}^2$ (l'area approssimativa della sezione di un atleta), $m = 80 \text{ kg}$ (il peso dell'atleta), $v = 10 \text{ m/s}$ (la velocità al momento del salto).

[Per una sfera $C = 0,5$, per un cubo $C = 1,0$, approssimativamente. La scelta di $C = 0,7$ e $A = 0,75 \text{ m}^2$ per il nostro atleta è confermata dal calcolo della velocità massima raggiunta da un paracadutista in caduta libera: uguagliando la forza di resistenza F_{res} con la forza di gravità mg , si ottiene

$$\frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 0,75 \cdot v^2 = 80 \cdot 9,8, \quad \text{da cui } v = 54,65 \text{ m/s} = 196,74 \text{ km/h},$$

[che corrisponde abbastanza bene con il dato reale.]

Allora

$$\frac{F_{\text{res}}}{m} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 1,25 \cdot 0,75 \cdot 10^2}{80} = 0,4 \text{ m/s}^2,$$

che è piuttosto piccola, anche se non del tutto trascurabile, rispetto all'accelerazione di gravità $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Il calcolo della traiettoria in presenza della resistenza dell'aria è molto difficile, in quanto le equazioni differenziali diventano nonlineari:

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -\frac{C\rho A}{2m}x_1'(t)\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}, \\ x_2''(t) &= -g - \frac{C\rho A}{2m}x_2'(t)\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}. \end{aligned}$$

Il problema in questo caso non ha soluzioni esprimibili analiticamente, ma va trattato numericamente. Ricordiamo i parametri scelti sopra per il salto del nostro atleta: $C = 0,7$, $\rho = 1.25 \text{ kg/m}^3$, $A = 0.75 \text{ m}^2$, $m = 80 \text{ kg}$, $v = 10 \text{ m/s}$, $\alpha = 27^\circ$, $h = 0,5 \text{ m}$. Scegliendo $\alpha = 27^\circ$, con un risolutore numerico si trova che il punto di arrivo è a $8,925 \text{ m}$, mentre in assenza di attrito, come abbiamo visto, sarebbe a $9,14 \text{ m}$.

Per avere una stima analitica, per quanto grezza, di quanto influisce la resistenza dell'aria sul salto in lungo di un atleta, approssimeremo $\sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}$ con una velocità media in volo, che stimiamo in $9,5 \text{ m/s}$. Calcolando

$$\frac{\frac{1}{2} 0,7 \cdot 1,25 \cdot 0,75 \cdot 9,5}{80} = 0,039,$$

le equazioni differenziali diventano

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -0,039 x_1'(t), \\ x_2''(t) &= -9,8 - 0,039 x_2'(t). \end{aligned}$$

Le risolviamo, imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_1'(0) = 10 \cos \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2(0) = 0,5, \\ x_2'(0) = 10 \sin \alpha. \end{cases}$$

e troviamo

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{10 \cos \alpha}{0,039} (e^{-0,039t} - 1), \\ x_2(t) &= -\left(\frac{10 \sin \alpha}{0,039} + \frac{9,8}{0,039^2} \right) (e^{-0,039t} - 1) - \frac{9,8}{0,039} t + 0,5. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la formula della traiettoria:

$$x_2 = \left(\tan \alpha + \frac{9,8}{0,39 \cos \alpha} \right) x_1 + \frac{9,8}{0,039^2} \ln \left(1 - \frac{0,039}{10 \cos \alpha} x_1 \right) + 0,5.$$

Scegliendo $\alpha = 27^\circ$, un'analisi grafica mostra che il punto di arrivo è a $8,92 \text{ m}$.

[Il record mondiale di salto in lungo è attualmente detenuto da Mike Powell, con $8,95 \text{ m}$, ottenuto a Tokio il 30 agosto 1991. Pochi minuti prima, Carl Lewis saltò $8,91 \text{ m}$, battendo il record di $8,90 \text{ m}$ stabilito da Bob Beamon nel 1968. Analizzando il filmato dei salti dei due atleti]

www.youtube.com/watch?v=T0WfsAwwTSU

[si nota che la massima elevazione è di circa 1 m . Il nostro calcolo per $\alpha = 27^\circ$ ci dà un'elevazione massima di $1,05 \text{ m}$.]

Gli effetti dovuti alla presenza dell'aria diventano ancora più evidenti quando l'oggetto lanciato ha massa piccola o grande velocità. Ad esempio, una pallina di ping-pong viene rallentata notevolmente dall'aria, e difficilmente si riesce a lanciarla per più di una ventina di metri. Una pallina di golf, essendo più pesante, può volare anche per più di duecento metri, se lanciata da un giocatore esperto.

In [1] è stato fatto uno studio sulle traiettorie teoriche e reali delle palline da golf. In Figura 3 si vedono le traiettorie calcolate in base all'attrito dell'aria,

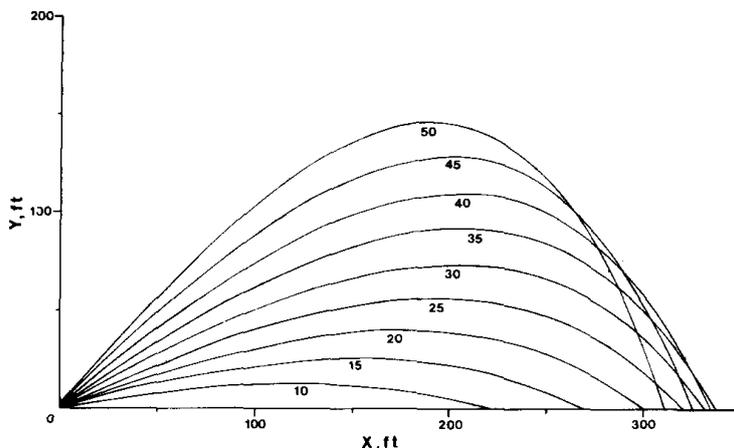


Figura 3: *Traiettoria teorica in presenza di attrito dell'aria, da [1].*

supponendolo proporzionale al quadrato della velocità. Si nota che un angolo minore di 45° risulta più favorevole, in termini di distanza raggiunta: l'angolo ottimale si aggira attorno ai 35° .

In Figura 4 si vedono invece le traiettorie reali di una pallina da golf, come lanciate da giocatori professionisti. Risulta che l'angolo ottimale di lancio è

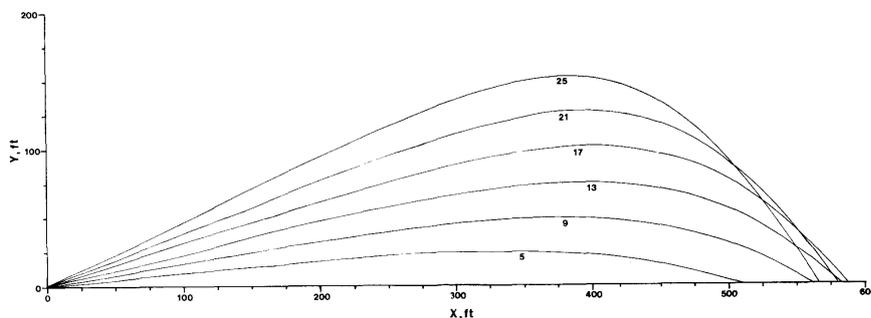


Figura 4: *Traiettorie reali di una pallina da golf, da [1].*

di circa 11° , molto lontano dai valori teorici finora calcolati. È chiaro che qui entra in gioco un fenomeno nuovo. In effetti, bisogna sapere che la pallina viene colpita in modo da imprimerle una rotazione, per cui la parte alta accompagna il flusso dell'aria, diminuendo pertanto la pressione. L'effetto di portanza che ne risulta, noto come "effetto Magnus", cambia completamente la natura del problema. Questo effetto è ancor più evidente per le palline di softair, che vengono fatte ruotare appositamente, per raggiungere distanze superiori. In Figura 5 si può notare che addirittura la traiettoria, in un primo tempo, si può incurvare verso l'alto.

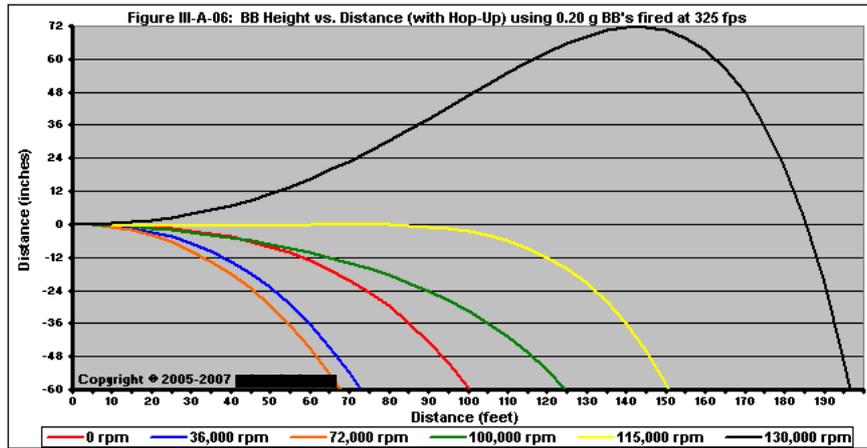


Figura 5: Traiettorie di una pallina da softair

Le considerazioni fatte finora possono essere utili nello studio della balistica, anche se la resistenza dell'aria a velocità prossime se non superiori a quella del suono è tutt'altro che facile da prevedere. Il problema della balistica è di determinare l'angolo α che fornisca una traiettoria che vada a colpire un bersaglio. Il problema si può ambientare nel piano, come sopra, introducendo le coordinate (x_1, x_2) . Il bersaglio è posto in una data posizione, diciamo $(d, 0)$, con $d > 0$, e supporremo $d < L(\alpha_{\max})$. Si noti che, in questo contesto, h potrebbe anche essere negativa.

Osserviamo che $L(\alpha)$ dipende in modo continuo da α , e che se $\alpha = \pi/2$ (lancio in verticale verso l'alto) o $\alpha = -\pi/2$ (lancio in verticale verso il basso), allora $L(\alpha) = 0$. Per il teorema degli zeri, esisteranno $\alpha_1 \in]\alpha_{\max}, \pi/2[$ e $\alpha_2 \in]-\pi/2, \alpha_{\max}[$ per cui $L(\alpha_1) = L(\alpha_2) = d$.

3. Moto in campo gravitazionale

Affrontiamo il problema del lancio di un oggetto da un'altezza $h > 0$, in orizzontale (ossia $\alpha = 0$), con velocità v . Abbiamo già visto che, se il campo gravitazionale è costante, la traiettoria del moto segue la parabola

$$x_2 = -\frac{g}{2v^2} x_1^2 + h.$$

Ma ora ci poniamo in un campo gravitazionale Newtoniano, dove la forza è data dalla nota formula

$$F = G \frac{mM}{d^2}.$$

In altri termini, se usiamo la notazione $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, l'equazione del moto è¹

$$\ddot{x}(t) = -\frac{GM}{|x(t)|^3} x(t).$$

¹Useremo qui la notazione di Newton per indicare le derivate: scriveremo ad esempio \dot{x} invece di x' , e \ddot{x} invece di x'' .

Per trovare la traiettoria del moto, passiamo a coordinate polari:

$$x(t) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t)).$$

Abbiamo allora

$$\dot{x}(t) = (\dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t)\dot{\theta}(t) \sin \theta(t), \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t)\dot{\theta}(t) \cos \theta(t)),$$

e quindi²

$$\ddot{x} = (\ddot{\rho} \cos \theta - 2\dot{\rho}\dot{\theta} \sin \theta - \rho\ddot{\theta} \sin \theta - \rho\dot{\theta}^2 \cos \theta, \ddot{\rho} \sin \theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \cos \theta + \rho\ddot{\theta} \cos \theta - \rho\dot{\theta}^2 \sin \theta).$$

L'equazione differenziale diventa pertanto

$$\begin{cases} \ddot{\rho} \cos \theta - 2\dot{\rho}\dot{\theta} \sin \theta - \rho\ddot{\theta} \sin \theta - \rho\dot{\theta}^2 \cos \theta = -\frac{GM}{\rho^2} \cos \theta, \\ \ddot{\rho} \sin \theta + 2\dot{\rho}\dot{\theta} \cos \theta + \rho\ddot{\theta} \cos \theta - \rho\dot{\theta}^2 \sin \theta = -\frac{GM}{\rho^2} \sin \theta. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per $\cos \theta$, la seconda per $\sin \theta$ e sommando, otteniamo

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{\rho^2}.$$

D'altra parte, moltiplicando la prima equazione per $\sin \theta$, la seconda per $\cos \theta$ e sottraendo, si ha che

$$-2\dot{\rho}\dot{\theta} - \rho\ddot{\theta} = 0.$$

A questo punto, notiamo che

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} = \rho(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = 0,$$

il che significa che la quantità $\mu := \rho^2(t)\dot{\theta}(t)$ è costante nel tempo t . Essa si chiama *momento angolare scalare*. Supporremo ad esempio $\mu > 0$, e pertanto avremo che $\dot{\theta}(t) > 0$, per ogni t . Sostituendo nella prima equazione, abbiamo quindi

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \frac{\mu^2}{\rho^3} + \frac{GM}{\rho^2} = 0, \\ \dot{\theta} = \frac{\mu}{\rho^2}. \end{cases}$$

Vogliamo trovare una funzione $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ tale che

$$\rho(t) = \mathcal{F}(\theta(t)), \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Supponendo che una tale funzione esista, introduciamo anche la funzione ausiliaria $\mathcal{G}(\theta) = 1/\mathcal{F}(\theta)$ e abbiamo

$$\dot{\rho}(t) = \mathcal{F}'(\theta(t))\dot{\theta}(t) = \mathcal{F}'(\theta(t))\frac{\mu}{\rho(t)^2} = \mathcal{F}'(\theta(t))\frac{\mu}{\mathcal{F}(\theta(t))^2} = -\mu\mathcal{G}'(\theta(t)),$$

²Per semplificare le notazioni, spesso ometteremo nel seguito la dipendenza esplicita da t , per cui scriveremo, ad esempio, \ddot{x} invece di $\ddot{x}(t)$.

e quindi, ricordando che $1/\rho(t) = \mathcal{G}(\theta(t))$,

$$\ddot{\rho}(t) = -\mu \mathcal{G}''(\theta(t)) \dot{\theta}(t) = -\mu \mathcal{G}''(\theta(t)) \frac{\mu}{\rho(t)^2} = -\mu^2 \mathcal{G}''(\theta(t)) \mathcal{G}(\theta(t))^2.$$

Sostituendo nell'equazione, otteniamo che

$$-\mu^2 \mathcal{G}''(\theta(t)) \mathcal{G}(\theta(t))^2 - \mu^2 \mathcal{G}(\theta(t))^3 + GM \mathcal{G}(\theta(t))^2 = 0,$$

da cui

$$\mathcal{G}''(\theta(t)) + \mathcal{G}(\theta(t)) = \frac{GM}{\mu^2}.$$

Questa è l'equazione di un oscillatore armonico con un termine forzante costante, di facile soluzione: si ha

$$\mathcal{G}(\theta(t)) = \frac{GM}{\mu^2} + \gamma_0 \cos(\theta(t) - \theta_0),$$

dove γ_0 e θ_0 sono costanti da determinarsi a partire dalle condizioni iniziali. Vista la simmetria del problema, fissiamo per semplicità $\theta_0 = 0$. Abbiamo così l'equazione

$$\rho(t) = \frac{1}{\frac{GM}{\mu^2} + \gamma_0 \cos \theta(t)}.$$

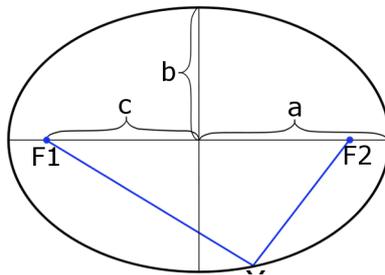
Ponendo

$$\ell = \frac{\mu^2}{GM}, \quad \varepsilon = \frac{\mu^2 |\gamma_0|}{GM},$$

otteniamo

$$\rho(t) = \frac{\ell}{1 \pm \varepsilon \cos \theta(t)}.$$

⌈ Ricaviamo l'equazione di un'ellisse in coordinate polari, supponendo che uno dei due fuochi sia posizionato nell'origine, e l'asse maggiore sia orizzontale. ⌋



Com'è noto, se indichiamo con

- a la lunghezza del semiasse maggiore,
- b la lunghezza del semiasse minore,
- c la semi-distanza tra i due fuochi,

l'equazione cartesiana di questa ellisse è

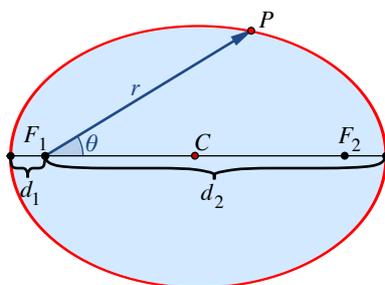
$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ricordiamo inoltre che si ha

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Scrivendo un punto P dell'ellisse in coordinate polari

$$P = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$



abbiamo che

$$\rho + \sqrt{(\rho \cos \theta - 2c)^2 + (\rho \sin \theta)^2} = 2a,$$

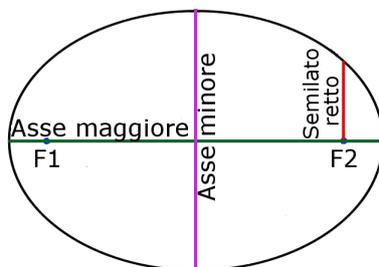
da cui, facendo i calcoli,

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \cos \theta}.$$

Se denotiamo con

$$\ell = \frac{b^2}{a} \text{ il semilato retto,}$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ l'eccentricità,}$$



si ha l'equazione

$$\rho = \frac{\ell}{1 - \varepsilon \cos \theta}.$$

Si noti che se avessimo preso F_2 invece di F_1 come origine del sistema di coordinate, avremmo ottenuto la formula

$$\rho = \frac{\ell}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

In seguito ci sarà utile conoscere la formula dell'area dell'ellisse:

$$A = 2 \int_{-a}^a \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} dx = 2b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos^2 u du = \pi ab = \frac{\pi \ell}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3}}.$$

[(Abbiamo usato la sostituzione $x = a \sin u$).]

Tornando al nostro problema iniziale, abbiamo trovato che, se $\varepsilon < 1$, l'orbita descritta dall'oggetto lanciato è un'ellisse, con uno dei due fuochi nell'origine (il centro della Terra). Calcoliamone i parametri: innanzitutto, si vede che al momento del lancio si ha $\dot{\theta}(0) = v/(R+h)$, da cui deduciamo che

$$\mu = (R+h)^2 \dot{\theta}(0) = (R+h)v.$$

Ne segue che

$$\ell = \frac{(R+h)^2 v^2}{GM}, \quad \varepsilon = \pm \left(1 - \frac{(R+h)v^2}{GM} \right).$$

Inoltre, la scelta $\theta_0 = 0$ ci ha collocato, noi lanciatori dell'oggetto, sull'asse orizzontale, nella posizione $(R+h, 0)$. Osservando che $a+c = R+h$ e ricordando che $c = a\varepsilon$, abbiamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{GM(R+h)}{2GM - (R+h)v^2}, \\ b &= v \sqrt{\frac{(R+h)^3}{2GM - (R+h)v^2}}, \\ c &= \frac{(GM - (R+h)v^2)(R+h)}{2GM - (R+h)v^2}. \end{aligned}$$

Vediamo ora cosa succede nella prima fase del lancio, quando $|y|$ è molto piccolo se confrontato con il raggio terrestre. La formula di Taylor, per valori di ξ prossimi a zero, ci dà

$$\sqrt{1+\xi} \approx 1 + \frac{1}{2}\xi.$$

Quindi, per $|y|$ piccolo, avremo

$$x = c + a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \approx c + a \left(1 - \frac{y^2}{2b^2} \right) = R+h - \frac{a}{2b^2} y^2 = R+h - \frac{1}{2\ell} y^2.$$

D'altra parte, supponendo h piccola rispetto a R ,

$$\frac{1}{2\ell} = \frac{GM}{2(R+h)^2 v^2} \approx \frac{GM}{2R^2 v^2} = \frac{g}{2v^2},$$

e si trova che

$$x \approx R+h - \frac{g}{2v^2} y^2.$$

Questa è esattamente la formula della parabola che avevamo già trovato supponendo il campo gravitazionale costante, in quanto ora, avendo ruotato il sistema di riferimento, risulta $x_1 = y$ e $x_2 = x$, mentre l'addendo $R+h$ tiene conto dell'“altezza” dal centro della Terra.

4. In orbita!

La *Prima legge di Keplero* afferma che un oggetto attratto da una massa fissa si deve muovere lungo un'ellisse con uno dei fuochi posizionato nel punto attrattore. In realtà, questo succede se l'eccentricità ε è minore di 1. In particolare, se $\varepsilon = 0$, si ha un'orbita circolare.

Se $\varepsilon = 1$ l'orbita è una parabola (questa volta sì), mentre se $\varepsilon > 1$ si ha un'iperbole. Questo tipo di orbite non erano state predette da Keplero.

La *Seconda legge di Keplero* descrive la velocità di movimento di $x(t)$ lungo l'ellisse. Indichiamo con $A(t)$ l'area spazzata dal vettore $x(\tau)$ al variare di τ da 0 a t . Scrivendo $x(\tau) = (\rho(\tau) \cos \theta(\tau), \rho(\tau) \sin \theta(\tau))$, abbiamo che $\rho(\tau) = \mathcal{F}(\theta(\tau))$, per cui

$$A(t) = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \left(\int_0^{\mathcal{F}(\vartheta)} r \, dr \right) d\vartheta = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} \mathcal{F}(\vartheta)^2 d\vartheta.$$

Ricordando che $\mu = \rho(\tau)^2 \dot{\theta}(\tau)$ è costante, e supponendo $\mu > 0$, abbiamo che $\tau \mapsto \theta(\tau)$ è strettamente crescente, per cui possiamo effettuare un cambio di variabile nell'integrale:

$$A(t) = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{1}{2} \mathcal{F}(\vartheta)^2 d\vartheta = \int_0^t \frac{1}{2} \mathcal{F}(\theta(\tau))^2 \dot{\theta}(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{2} \rho(\tau)^2 \dot{\theta}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \mu t.$$

Ecco quanto afferma la seconda legge: l'area $A(t)$ cresce linearmente in t , per cui la sua derivata $\frac{d}{dt}A(t)$ è costante.

La *Terza legge di Keplero* fornisce una relazione tra il periodo di rotazione e il semiasse maggiore dell'orbita ellittica. Sia T il tempo impiegato dal nostro oggetto per compiere una rotazione attorno alla massa fissa. Abbiamo quindi (vedi la formula per l'area dell'ellisse) che

$$\frac{1}{2} \mu T = \pi ab.$$

Da ciò, essendo $b^2 = a\ell$ e $\mu^2 = GM\ell$, troviamo la formula

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

È interessante notare che il periodo dipende solo dalla lunghezza del semiasse maggiore, ed è indipendente dalla lunghezza del semiasse minore.³

³Le tre leggi sono state trovate da Johannes Kepler studiando il moto dei pianeti attorno al sole. Le prime due sono enunciate in [3], la terza in [4]. Isaac Newton ne ha poi dato un'interpretazione generale in [6], dimostrando che esse valgono in qualunque campo gravitazionale centrale. Una spiegazione originale delle leggi di Keplero si può trovare qui:

www.youtube.com/watch?v=ge06Znj7hyk

Calcoliamo ora la minima velocità per rimanere lungo un'orbita circolare attorno alla Terra. Se $r \approx R_T$ è il raggio di tale orbita, il periodo di rotazione è dato da

$$T \approx \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM_T} R_T^3} = 5060 \text{ s},$$

corrispondente a circa un'ora e venticinque minuti. La velocità lungo l'orbita sarà uguale a

$$\frac{2\pi R_T}{T} \approx 7910 \text{ m/s} = 28.475 \text{ km/h}.$$

[La Stazione Spaziale Internazionale orbita attorno alla Terra a una distanza di 400 km dalla superficie, una velocità di 27.576 km/h, con un periodo di circa un'ora e trentatré minuti.]

Un satellite geostazionario deve avere un periodo $T = 86.164 \text{ s}$, corrispondenti a un giorno siderale. Se ne deduce che la sua distanza dal centro della Terra deve essere di 42.160 km. Ruoterà dunque con velocità di 3074 m/s, cioè 11.066 km/h.

Dovendo lanciare un satellite in orbita, è conveniente trarre vantaggio dal fatto che la Terra ruota. Infatti, all'equatore si ha una velocità di 464,5 m/s, ossia di circa 1670 km/h. Resta il fatto che a questi bisogna aggiungerne un bel po'...

Per la Luna risulta che il semiasse maggiore dell'ellisse descritto attorno alla Terra è di circa $a = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$. Ne deduciamo che il suo periodo è $T_L \approx 2,372 \cdot 10^6 \text{ s}$, che corrisponde a circa 27 giorni e mezzo.]

Ci sarà utile introdurre la cosiddetta *manovra di trasferimento alla Hohmann*,⁴ che permette di passare da un'orbita circolare ad un'altra, attraverso un'orbita ellittica. Sia r_1 il raggio dell'orbita circolare di partenza, e r_2 il raggio dell'orbita che si vuole raggiungere. Entrambe le consideriamo centrate nell'origine. Le corrispondenti velocità sulle due orbite sono costanti,

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_1}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}}.$$

Consideriamo ora un'ellisse con un fuoco nell'origine, con perigeo⁵ in $(-r_1, 0)$ e apogeo in $(r_2, 0)$. La velocità di percorrenza lungo l'orbita ellittica varia con la formula $v = \mu/\rho$, dove ρ indica la distanza del corpo dall'origine. Pertanto, ricordando che $\mu^2 = GM\ell$ e $\ell = b^2/a = (a-c)(a+c)/a$, la velocità al perigeo è data da

$$v_P = \sqrt{\frac{2GM_T r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}.$$

Similmente, la velocità all'apogeo è uguale a

$$v_A = \sqrt{\frac{2GM_T r_1}{r_2(r_1 + r_2)}}.$$

⁴Walter Hohmann ideò questa manovra nel 1925. Per la sua opera [2] egli è considerato uno dei pionieri dei viaggi spaziali.

⁵Il *perigeo* è il punto dell'orbita più vicino alla Terra, mentre l'*apogeo* è quello più lontano.

Supponendo ad esempio $r_1 < r_2$, la manovra di Hohmann consiste in questo: mentre siamo sull'orbita circolare interna, di raggio r_1 , ad un tratto si cambia la velocità da v_1 a v_P , entrando così nell'orbita ellittica, al suo perigeo. Una volta percorsa esattamente mezza ellisse, trovandoci all'apogeo, si cambia la velocità da v_A a v_2 , stabilizzandoci sull'orbita circolare più esterna, di raggio r_2 .

Nel caso in cui sia $r_1 > r_2$, si procederà in modo analogo: partendo dall'orbita più esterna, dapprima si cambia la velocità da v_1 a v_A , entrando nell'orbita ellittica al suo apogeo. Una volta percorsa mezza orbita, al perigeo si cambia la velocità da v_P a v_2 . In entrambi i casi, il tempo di trasferimento lungo la semi-ellisse da un'orbita circolare all'altra si può calcolare usando la terza legge di Keplero, ottenendo

$$T_{\text{trasf}} = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8GM_T}}.$$

5. La missione dell'Apollo 11

Il 16 luglio 1969 ebbe inizio la missione Apollo 11, il cui obiettivo era di portare l'uomo sulla Luna. Riportiamo il resoconto delle varie fasi del viaggio, così come descritto dalla NASA in [7].

16 luglio, 13:32 UTC - partenza da Cape Kennedy, in Florida;

16 luglio, 13:44 UTC - in orbita terrestre a 185 km di altezza;

16 luglio, 16:06 UTC - dopo aver fatto un giro e mezzo attorno alla Terra, immissione nell'orbita di trasferimento verso la Luna;

17 luglio, 16:17 UTC - piccola correzione dell'orbita trans-lunare;

18 luglio - continua la traversata;

19 luglio, 17:22 UTC - entrata in orbita lunare, a 110 km di altezza;

20 luglio, 19:08 UTC - distacco del LEM (Lunar Excursion Module);

20 luglio, 20:17 UTC - allunaggio;

21 luglio, 17:54 UTC - partenza dalla Luna;

21 luglio, 21:35 UTC - riaggancio del LEM;

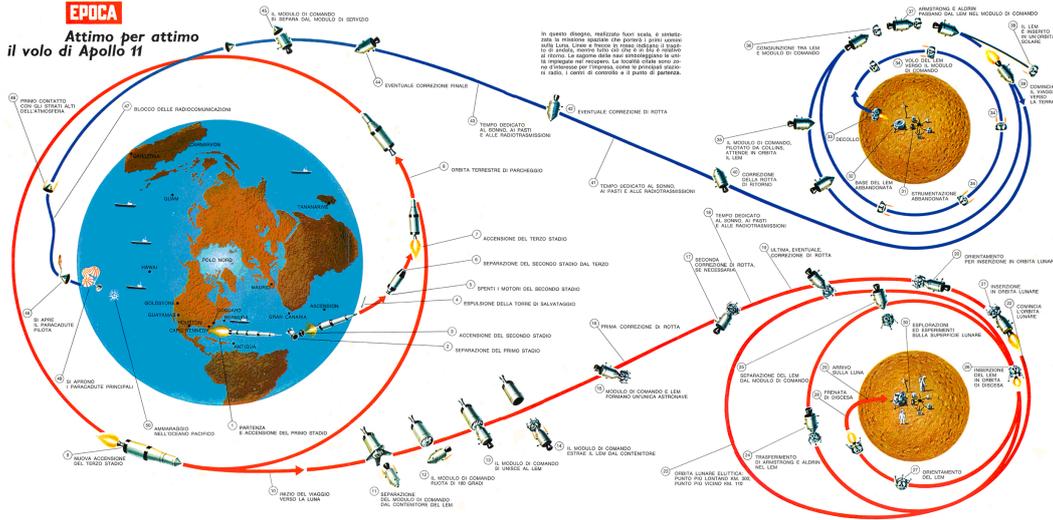
22 luglio, 04:55 UTC - immissione nell'orbita di trasferimento verso la Terra;

22 luglio, 20:01 UTC - piccola correzione di rotta;

23 luglio - continua il viaggio di rientro;

24 luglio, 16:51 UTC - ammaraggio nell'Oceano Pacifico.

Cercheremo ora di descrivere in termini matematici questo viaggio, seppur approssimativamente.



Prima fase: trasferimento dalla superficie terrestre a un'orbita circolare a 185 km d'altezza.

Questa fase fu completata in soli 12 minuti, il tempo necessario affinché il razzo⁶ Saturn 5 portasse l'astronave a una velocità di

$$\sqrt{\frac{6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{6,555 \cdot 10^6}} = 7792 \text{ m/s} = 28.052 \text{ km/h}.$$

Seconda fase: trasferimento dall'orbita circolare raggiunta, di raggio $r_T = 6,555 \cdot 10^6 \text{ m}$, all'orbita lunare, a circa 110 km sopra la superficie della Luna.

Ricordiamo che $D = 3,844 \cdot 10^8 \text{ m}$ è la distanza Terra-Luna, $R_L = 1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$ il raggio della Luna e $M_L = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ la sua massa. Ora faremo alcune semplificazioni. Supporremo che la Terra e la Luna siano ferme nello spazio, e che la traiettoria della navicella segua un andamento rettilineo. Introduciamo allora l'energia che, com'è noto, è una costante del moto:

$$E = \frac{\dot{\rho}(t)^2}{2} - \frac{GM_T}{\rho(t)} - \frac{GM_L}{D - \rho(t)},$$

e supponiamo che $0 < \rho(t) < D$, con $\rho(0) = r_T$. Dobbiamo trovare la velocità iniziale da imprimere alla navicella per arrivare al punto di equilibrio, che si trova a una distanza d_0 dalla Terra (e quindi a distanza $D - d_0$ dalla Luna) tale che

$$\frac{GM_T}{d_0^2} = \frac{GM_L}{(D - d_0)^2},$$

con una certa velocità v_0 . Un rapido calcolo ci dà

$$d_0 = \frac{M_T - \sqrt{M_T M_L}}{M_T - M_L} D = 3,46 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

⁶Il Saturn 5 è a tutt'oggi il più grande e potente razzo costruito dall'uomo. Era lungo 110 m e pesava $3 \cdot 10^6 \text{ kg}$.

Passiamo all'uguaglianza dell'energia in partenza e al punto di equilibrio:

$$\frac{\dot{\rho}(0)^2}{2} - \frac{GM_T}{r_T} - \frac{GM_L}{D - r_T} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM_T}{d_0} - \frac{GM_L}{D - d_0}.$$

Si tratta ora di scegliere a che velocità vogliamo passare il punto di equilibrio d_0 . Verificheremo che la scelta $v_0 = 775 \text{ m/s} = 2790 \text{ km/h}$ risulta corrispondere abbastanza bene con i dati della missione. Con tale scelta, troviamo⁷

$$\dot{\rho}(0) = 10.938 \text{ m/s} = 39.376 \text{ km/h}.$$

Una volta passato il punto di equilibrio, si inizia la caduta verso la Luna, fino ad arrivare a una distanza di 110 km dalla sua superficie, e cioè a una distanza di $r_L = 1,85 \cdot 10^6 \text{ m}$ dal suo centro. Calcoliamo la velocità di arrivo al tempo t_A in cui $\rho(t_A) = D - r_L$, uguagliando di nuovo le energie:

$$\frac{\dot{\rho}(t_A)^2}{2} - \frac{GM_T}{D - r_L} - \frac{GM_L}{r_L} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM_T}{d_0} - \frac{GM_L}{D - d_0},$$

da cui

$$\dot{\rho}(t_A) = 2328 \text{ m/s} = 8382 \text{ km/h}.$$

Il tempo di trasferimento dall'orbita terrestre a quella lunare si può ricavare scrivendo di nuovo l'uguaglianza delle energie

$$\frac{\dot{\rho}(t)^2}{2} - \frac{GM_T}{\rho(t)} - \frac{GM_L}{D - \rho(t)} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM_T}{d_0} - \frac{GM_L}{D - d_0},$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} \text{tempo} &= \int_{r_T}^{D-r_L} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{v_0^2}{2} + \frac{GM_T}{\rho} + \frac{GM_L}{D - \rho} - \frac{GM_T}{d_0} - \frac{GM_L}{D - d_0} \right)^{-1/2} d\rho \\ &= 27.791 \text{ s} = 73 \text{ h } 17 \text{ m } 40 \text{ s}. \end{aligned}$$

Terza fase: messa in orbita lunare circolare, con raggio $r_L = 1,85 \cdot 10^6 \text{ m}$.

La velocità dovrà essere di

$$\sqrt{\frac{GM_L}{r_L}} = 1627 \text{ m/s} = 5858 \text{ km/h}.$$

Per poter raggiungere l'altezza voluta, sarà necessario ricorrere alla manovra di Hohmann.

A questo punto, il LEM può staccarsi dalla navicella madre Apollo 11 e portare i due astronauti Armstrong e Aldrin sulla Luna. L'epica impresa dell'allunaggio e del successivo ricongiungimento con l'Apollo 11 pilotata da Collins ha dell'incredibile. Anche qui, per sincronizzare le orbite dell'Apollo

⁷Nella missione Apollo 10, il 26 maggio 1969, la massima velocità rispetto alla Terra è stata di 39.897 km/h , che è tuttora il record assoluto di velocità raggiunto dall'uomo.

11 e del LEM è stata necessaria almeno una manovra alla Hohmann. Una volta tornati sull' Apollo 11, gli astronauti possono intraprendere il viaggio di ritorno. I calcoli si possono ripetere tali quali: ripartenza a 8382 km/h , passaggio del punto di equilibrio a 2790 km/h , arrivo nell'atmosfera terrestre a 39.376 km/h . A questa velocità, l'attrito dell'aria va affrontato con cautela, perché crea enormi problemi di surriscaldamento. Ancora pochi minuti, e la navicella può ammarare nell'Oceano Pacifico, frenata da tre paracaduti. La missione è compiuta.

Troppa perfezione? In realtà non tutto andò come previsto, vedi ad esempio:

www.siamoandatisullaluna.com/troppa-perfezione.html

[Ci poniamo ora una domanda: qual è la velocità necessaria a “sfuggire” dall'attrazione gravitazionale terrestre, partendo dalla sua superficie? (È la cosiddetta *velocità di fuga* v_f .) Valutando l'energia per $\rho(0) = R_T$ e per il valore limite ottenuto quando per $\rho(t) \rightarrow +\infty$, che si suppone venga “raggiunto” a velocità zero, si ha

$$v_f = \sqrt{\frac{2M_T G}{R_T}} = 11.186 \text{ m/s} = 40.270 \text{ km/h}.$$

Per la Luna, essendo $R_L = 1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$, $M_L = 7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, la velocità di fuga dalla sua superficie è data da

$$v_f = \sqrt{\frac{2M_L G}{R_L}} = 2373 \text{ m/s} = 8543 \text{ km/h}.$$

Riferimenti bibliografici

- [1] H. Erlichson, Maximum projectile range with drag and lift, with particular application to golf, *American Journal of Physics* 51 (1983), 357–361.
- [2] W. Hohmann, *The Attainability of Heavenly Bodies*, 1925.
https://archive.org/stream/nasa_techdoc_19980230631/19980230631#page/n4/mode/1up
- [3] J. Kepler, *Astronomia Nova*, 1609.
- [4] J. Kepler, *Harmonices Mundi*, 1619.
- [5] N.P. Linthorne, Throwing and jumping for maximum horizontal range, *J. Sports Sci.* 19, 359 (2001).
- [6] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687.
- [7] N.A.S.A., *Apollo 11 Mission Report*, Houston, Texas, 1969:
www.hq.nasa.gov/alsj/a11/A11_MissionReport.pdf