Analisi Matematica 2

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica, a.a. 2017/2018

1 Alcune premesse

Consideriamo, per ogni $k = 1, 2, \dots, N$, la funzione "k-esima proiezione" $p_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita da

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_N) = x_k\,.$$

Teorema. *Le funzioni p_k sono continue.*

Dimostrazione. Consideriamo un punto $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \in \mathbb{R}^N$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Notiamo che si ha

$$|x_k - x_k^0| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{N} (x_j - x_j^0)^2} = d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)\,,$$

per cui, prendendo $\delta = \varepsilon$, si ha:

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \;\Rightarrow\; |p_k(\boldsymbol{x}) - p_k(\boldsymbol{x}_0)| = |x_k - x_k^0| < \varepsilon\,.$$

■

Sia ora $f : E \to \mathbb{R}^M$, dove $E \subseteq \mathbb{R}^N$, e consideriamo le sue "componenti", definite da $f_k = p_k \circ f : E \to \mathbb{R}$, con $k = 1, 2, \dots, M$, per cui si ha

$$f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \dots, f_M(\boldsymbol{x}))\,.$$

Teorema. *La funzione f è continua in $\boldsymbol{x}_0$ se e solo se lo sono tutte le sue componenti.*

Dimostrazione. Se f è continua in $\boldsymbol{x}_0$, lo sono anche le $f_k = p_k \circ f$ in quanto composte di funzioni continue. Viceversa, supponiamo che le componenti di f siano tutte continue in $\boldsymbol{x}_0$. Fissato $\varepsilon > 0$, per ogni $k = 1, 2, \dots, M$ esiste un $\delta_k > 0$ tale che

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta_k \;\Rightarrow\; |f_k(\boldsymbol{x}) - f_k(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon\,.$$

Posto $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M\}$, si ha

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \;\Rightarrow\; d(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^{M} (f_j(\boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x}_0))^2} < \sqrt{M}\varepsilon\,,$$

il che, per l'arbitrarietà di ε, completa la dimostrazione. ■

Teorema. *Ogni applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ è continua.*

<u>Dimostrazione</u>. Osserviamo che, essendo le proiezioni p_k lineari, le componenti $\ell_k = p_k \circ \ell$ dell'applicazione lineare ℓ sono anch'esse lineari. Consideriamo la base canonica $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_N)$ di $\mathbb{R}^N$, con

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0)\,, \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0)\,, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{e}_N &= (0, 0, 0, \dots, 1)\,. \end{aligned}$$

Ogni vettore $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ si piò scrivere come

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_N\boldsymbol{e}_N = p_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_1 + p_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_2 + \ldots + p_N(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_N\,.$$

Quindi, per ogni $k \in \{1, 2, \dots, M\}$,

$$\ell_k(\boldsymbol{x}) = p_1(\boldsymbol{x})\ell_k(\boldsymbol{e}_1) + p_2(\boldsymbol{x})\ell_k(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + p_N(\boldsymbol{x})\ell_k(\boldsymbol{e}_N)\,,$$

per cui ℓ_k risulta essere combinazione lineare delle proiezioni $p_1, p_2, \dots, p_N$. Essendo queste ultime continue, anche ℓ_k è continua. Avendo tutte le componenti continue, ℓ è pertanto continua. ∎

Sia ora $f : E \to \mathbb{R}^M$, oppure anche $f : E \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \to \mathbb{R}^M$, dove $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di accumulazione per E. Ricordiamo che, se esiste un $\boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^M$ tale che la funzione $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}^M$, definita da

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{se } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0\,, \\ \boldsymbol{l} & \text{se } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0\,, \end{cases}$$

risulti continua in $\boldsymbol{x}_0$, si dice che $\boldsymbol{l}$ è il "limite di f in $\boldsymbol{x}_0$", o anche "limite di $f(\boldsymbol{x})$ per $\boldsymbol{x}$ che tende a $\boldsymbol{x}_0$" e si scrive

$$\boldsymbol{l} = \lim_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x})\,.$$

Teorema. *Il limite $\lim_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{l} \in \mathbb{R}^M$ esiste se e solo se esistono i limiti $\lim_{x \to x_0} f_k(\boldsymbol{x}) = l_k \in \mathbb{R}$, per ogni $k = 1, 2, \dots, M$. In tal caso, si ha $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2, \dots, l_M)$. Vale quindi la formula*

$$\lim_{x \to x_0} f(\boldsymbol{x}) = (\lim_{x \to x_0} f_1(\boldsymbol{x}), \lim_{x \to x_0} f_2(\boldsymbol{x}), \dots, \lim_{x \to x_0} f_M(\boldsymbol{x}))\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Segue direttamente dal teorema sulla continuità delle componenti di una funzione continua. ∎

2 Il differenziale di una funzione a valori vettoriali

Sia E un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto di E e $f : E \to \mathbb{R}^M$ una funzione.

Definizione. *Diremo che la funzione f è "differenziabile" in $\boldsymbol{x}_0$ se esiste una applicazione lineare $\ell : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ per cui si possa scrivere*

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r(\boldsymbol{x}) \,,$$

dove r è una funzione tale che

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{r(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = \mathbf{0} \,.$$

Se f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, l'applicazione lineare ℓ si chiama "differenziale" di f in $\boldsymbol{x}_0$ e si indica con il simbolo

$$df(\boldsymbol{x}_0) \,.$$

Siano $f_1, f_2, \ldots, f_M$ le componenti di f, per cui

$$f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \ldots, f_M(\boldsymbol{x})) \,.$$

Teorema. *La funzione f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$ se e solo se lo sono tutte le sue componenti. In tal caso, per ogni vettore $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ si ha*

$$df(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h} = (df_1(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}, df_2(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}, \ldots, df_M(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}) \,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Considerando le componenti nell'equazione

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \ell(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r(\boldsymbol{x}) \,,$$

possiamo scrivere

$$f_j(\boldsymbol{x}) = f_j(\boldsymbol{x}_0) + \ell_j(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_j(\boldsymbol{x}) \,,$$

con $j = 1, 2, \ldots, M$, e sappiamo che

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{r(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = \mathbf{0} \quad \iff \quad \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} \frac{r_j(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = 0 \ \text{ per ogni } j = 1, 2, \ldots, M \,,$$

da cui la tesi. ■

Il teorema precedente permette di ricondurre lo studio del differenziale di una funzione a valori vettoriali a quello delle sue componenti, che sono funzioni a valori scalari.

È utile considerare la matrice associata all'applicazione lineare $\ell = df(\boldsymbol{x}_0)$, data da

$$\begin{pmatrix} \ell_1(\boldsymbol{e}_1) & \ell_1(\boldsymbol{e}_2) & \dots & \ell_1(\boldsymbol{e}_N) \\ \ell_2(\boldsymbol{e}_1) & \ell_2(\boldsymbol{e}_2) & \dots & \ell_2(\boldsymbol{e}_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_M(\boldsymbol{e}_1) & \ell_M(\boldsymbol{e}_2) & \dots & \ell_M(\boldsymbol{e}_N) \end{pmatrix},$$

dove $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots \boldsymbol{e}_N$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^N$. Tale matrice si chiama "matrice jacobiana" associata alla funzione f nel punto $\boldsymbol{x}_0$ e si denota con $Jf(\boldsymbol{x}_0)$. Ricordando che

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) = df_j(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{e}_k\,,$$

con $j = 1, 2, \dots, M$ e $k = 1, 2, \dots, N$, si ottiene la matrice

$$Jf(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) & \frac{\partial f_M}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Notiamo che, nel caso $M = 1$, la matrice jacobiana $Jf(\boldsymbol{x}_0)$ risulta essere la matrice trasposta del gradiente $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$.

Studiamo ora la differenziabilità di una funzione composta.

Teorema. *Se $f : E \to \mathbb{R}^M$ è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, E' è un aperto di $\mathbb{R}^M$ contenente $f(E)$ e $g : E' \to \mathbb{R}^L$ è differenziabile in $f(\boldsymbol{x}_0)$, allora $g \circ f$ è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$, e si ha*

$$d(g \circ f)(\boldsymbol{x}_0) = dg(f(\boldsymbol{x}_0)) \circ df(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. [1] Ponendo $\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$, si ha

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_1(\boldsymbol{x})\,, \quad g(\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}_0) + dg(\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0) + r_2(\boldsymbol{y})\,,$$

con

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{r_1(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = \boldsymbol{0}\,, \quad \lim_{\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y}_0} \frac{r_2(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\|} = \boldsymbol{0}\,.$$

Introduciamo la funzione $R_2 : E' \to \mathbb{R}^L$ così definita:

$$R_2(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \dfrac{r_2(\boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0\|} & \text{se } \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}_0\,, \\ \boldsymbol{0} & \text{se } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0\,. \end{cases}$$

[1] Dimostrazione non svolta a lezione.

Si noti che R_2 è continua in $\boldsymbol{y}_0$. Allora

$$\begin{aligned} g(f(\boldsymbol{x})) &= g(f(\boldsymbol{x}_0)) + dg(f(\boldsymbol{x}_0))[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)] + r_2(f(\boldsymbol{x})) \\ &= g(f(\boldsymbol{x}_0)) + dg(f(\boldsymbol{x}_0))[df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_1(\boldsymbol{x})] + r_2(f(\boldsymbol{x})) \\ &= g(f(\boldsymbol{x}_0)) + [dg(f(\boldsymbol{x}_0)) \circ df(\boldsymbol{x}_0)](\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_3(\boldsymbol{x}) \,, \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} r_3(\boldsymbol{x}) &= dg(f(\boldsymbol{x}_0))(r_1(\boldsymbol{x})) + r_2(f(\boldsymbol{x})) \\ &= dg(f(\boldsymbol{x}_0))(r_1(\boldsymbol{x})) + \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)\| R_2(f(\boldsymbol{x})) \\ &= dg(f(\boldsymbol{x}_0))(r_1(\boldsymbol{x})) + \|df(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + r_1(\boldsymbol{x})\| R_2(f(\boldsymbol{x})) \,. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \frac{\|r_3(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \le & \left\| dg(f(\boldsymbol{x}_0)) \left(\frac{r_1(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \right) \right\| + \\ & + \left(\left\| df(\boldsymbol{x}_0) \left(\frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \right) \right\| + \frac{\|r_1(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} \right) \|R_2(f(\boldsymbol{x}))\| \,. \end{aligned}$$

Se $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, il primo addendo tende a 0, poiché $dg(f(\boldsymbol{x}_0))$ è continua; f è continua in $\boldsymbol{x}_0$ e R_2 è continua in $\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$ con $R_2(\boldsymbol{y}_0)) = \mathbf{0}$, per cui $\|R_2(f(\boldsymbol{x}))\|$ tende a 0; $df(\boldsymbol{x}_0)$, essendo continua, è limitata sull'insieme compatto $\bar{B}(\mathbf{0}, 1)$. Quindi, si ha che

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} \frac{\|r_3(\boldsymbol{x})\|}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|} = 0 \,.$$

Ne segue che $g \circ f$ è differenziabile in x_0 con differenziale $dg(f(\boldsymbol{x}_0)) \circ df(\boldsymbol{x}_0)$. ■

Come noto, la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è il prodotto delle due matrici corrispondenti. Dal teorema precedente abbiamo quindi la seguente formula per le matrici jacobiane:

$$J(g \circ f)(\boldsymbol{x}_0) = Jg(f(\boldsymbol{x}_0)) \cdot Jf(\boldsymbol{x}_0) \,,$$

ossia

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdots \frac{\partial (g\circ f)_1}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ \frac{\partial (g\circ f)_L}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdots \frac{\partial (g\circ f)_L}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(\boldsymbol{x}_0)) \cdots \frac{\partial g_1}{\partial y_M}(f(\boldsymbol{x}_0)) \\ \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ \frac{\partial g_L}{\partial y_1}(f(\boldsymbol{x}_0)) \cdots \frac{\partial g_L}{\partial y_M}(f(\boldsymbol{x}_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdots \frac{\partial f_M}{\partial x_N}(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix} .$$

Ne segue la formula per le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) &= \frac{\partial g_i}{\partial y_1}(f(\boldsymbol{x}_0)) \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\partial g_i}{\partial y_2}(f(\boldsymbol{x}_0)) \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) + \ldots + \frac{\partial g_i}{\partial y_M}(f(\boldsymbol{x}_0)) \frac{\partial f_M}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \\ &= \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(\boldsymbol{x}_0)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}_0) \,, \end{aligned}$$

dove $i = 1, 2, \ldots, L$ e $k = 1, 2, \ldots, N$.

3 Il teorema della funzione implicita

Teorema. *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un aperto, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e (x_0, y_0) un punto di Ω per cui si abbia:*

$$g(x_0, y_0) = 0 \,, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \,.$$

Allora esistono un intorno aperto U di x_0, un intorno aperto V di y_0 e una funzione $\eta : U \to V$ di classe C^1 tali che $U \times V \subseteq \Omega$ e, presi $x \in U$ e $y \in V$, si ha:

$$g(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \eta(x) \,.$$

Vale inoltre la formula

$$\eta'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, \eta(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, \eta(x))} \,.$$

La funzione η risulta definita "implicitamente" dall'equazione $g(x, y) = 0$; il suo grafico è l'insieme

$$Gr(\eta) = \{(x, y) \in U \times V : g(x, y) = 0\} \,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo ad esempio $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Per la proprietà di permanenza del segno, esiste un $\delta > 0$ tale che, se $|x - x_0| \leq \delta$ e $|y - y_0| \leq \delta$, allora $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) > 0$. Quindi, per ogni $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, la funzione $g(x, \cdot)$ è strettamente crescente su $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$. Essendo $g(x_0, y_0) = 0$, avremo che

$$g(x_0, y_0 - \delta) < 0 < g(x_0, y_0 + \delta) \,.$$

Per la permanenza del segno, esiste un $\delta' > 0$ tale che, se $x \in [x_0 - \delta', x_0 + \delta']$, allora

$$g(x, y_0 - \delta) < 0 < g(x, y_0 + \delta) \,.$$

Definiamo $U =]x_0 - \delta', x_0 + \delta'[$ e $V =]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$. Quindi, per ogni $x \in U$, siccome $g(x, \cdot)$ è strettamente crescente, esiste uno ed un solo $y \in]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ per cui $g(x, y) = 0$; chiamo $\eta(x)$ tale y. Resta così definita una funzione $\eta : U \to V$ tale che, presi $x \in U$ e $y \in V$, si ha:

$$g(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \eta(x) \,.$$

Per vedere che η è continua, fissiamo ora un $\bar{x} \in U$ e dimostriamo la continuità in $\bar{x}$. Preso un $x \in U$ e considerata la funzione $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definita da

$$\gamma(t) = (\bar{x} + t(x - \bar{x}), \eta(\bar{x}) + t(\eta(x) - \eta(\bar{x}))),$$

applicando il teorema di Lagrange alla funzione $g \circ \gamma$ si ha che esiste un $\xi \in]0, 1[$ per cui

$$g(x, \eta(x)) - g(\bar{x}, \eta(\bar{x})) = \frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))(x - \bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))(\eta(x) - \eta(\bar{x})) \,.$$

Essendo $g(x,\eta(x)) = g(\bar{x},\eta(\bar{x})) = 0$, si ha che

$$|\eta(x)-\eta(\bar{x})| = \left|\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))}\right| |x-\bar{x}| \,.$$

Siccome le derivate parziali di g sono continue e $\frac{\partial g}{\partial y}$ è non nulla sul compatto $\overline{U}\times\overline{V}$, si ha che $|\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))(\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi)))^{-1}|$ è limitato superiormente e ne segue la continuità di η in $\bar{x}$. Resta da vedere la derivabilità: procedendo come sopra si ha che

$$\frac{\eta(x)-\eta(\bar{x})}{x-\bar{x}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))} \,,$$

con $\gamma(\xi)$ appartenente al segmento che congiunge $(\bar{x},\eta(\bar{x}))$ con $(x,\eta(x))$. Se x tende a $\bar{x}$, si ha che $\gamma(\xi)$ tende a $(\bar{x},\eta(\bar{x}))$ e quindi

$$\eta'(\bar{x}) = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{\eta(x)-\eta(\bar{x})}{x-\bar{x}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x},\eta(\bar{x}))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{x},\eta(\bar{x}))} \,.$$

Ne segue che η è di classe C^1 e vale la formula dell'enunciato. ∎

4 Il teorema della funzione implicita - caso generale

Vediamo come si generalizza il teorema della funzione implicita. Considereremo un insieme aperto Ω di $\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ e una funzione $g:\Omega\to\mathbb{R}^N$, di classe C^1. Quindi, g ha N componenti

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\ldots,g_N(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\,.$$

Qui $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_M)\in\mathbb{R}^M$ e $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_N)\in\mathbb{R}^N$. Useremo la seguente notazione per le matrici jacobiane:

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial x_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial x_M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial y_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}.$$

Teorema. *Siano $\Omega\subseteq\mathbb{R}^M\times\mathbb{R}^N$ un aperto, $g:\Omega\to\mathbb{R}^N$ una funzione di classe C^1 e $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ un punto di Ω per cui si abbia:*

$$g(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0\,, \qquad \det\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0\,.$$

Allora esistono un intorno aperto U di $\boldsymbol{x}_0$, un intorno aperto V di $\boldsymbol{y}_0$ e una funzione $\eta:U\to V$ di classe C^1 tali che $U\times V\subseteq\Omega$ e, presi $\boldsymbol{x}\in U$ e $\boldsymbol{y}\in V$, si ha:

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \boldsymbol{y}=\eta(\boldsymbol{x})\,.$$

Vale inoltre la formula

$$J\eta(\boldsymbol{x}) = -\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\eta(\boldsymbol{x}))\right)^{-1} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\eta(\boldsymbol{x}))\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. [2] Faremo la dimostrazione per induzione su N.

Nel caso $N=1$ e $M\geq 2$, si procede in modo del tutto analogo a quanto già fatto nel caso $M=1$. Basterà prendere, al posto dell'intervallo $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, la palla chiusa $\bar{B}(\boldsymbol{x}_0,\delta)$, e similmente per gli intorni aperti di $\boldsymbol{x}_0$, per dimostrare l'esistenza e la continuità della funzione η. Resta da vedere la derivabilità: considerato $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_M)$, prendiamo ora $\boldsymbol{x} = (\bar{x}_1+h,\dots,\bar{x}_M)$; procedendo come in precedenza, si ha che

$$\frac{\eta(\bar{x}_1+h,\dots,\bar{x}_M)-\eta(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_M)}{h} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\gamma(\xi))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\gamma(\xi))}\,,$$

con $\gamma(\xi)$ appartenente al segmento che congiunge $(\bar{\boldsymbol{x}},\eta(\bar{\boldsymbol{x}}))$ con $(\boldsymbol{x},\eta(\boldsymbol{x}))$. Se h tende a 0, si ha che $\gamma(\xi)$ tende a $(\bar{\boldsymbol{x}},\eta(\bar{\boldsymbol{x}}))$ e quindi

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_1}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \lim_{h\to 0}\frac{\eta(\bar{x}_1+h,\dots,\bar{x}_M)-\eta(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_M)}{h} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{\boldsymbol{x}},\eta(\bar{\boldsymbol{x}}))}{\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{\boldsymbol{x}},\eta(\bar{\boldsymbol{x}}))}\,.$$

Analogamente si calcolano le derivate parziali rispetto a $x_2,\dots,x_M$, per cui si vede che η è di classe C^1 e

$$J\eta(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{x},\eta(\boldsymbol{x}))}\,\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},\eta(\boldsymbol{x}))\,.$$

Supponiamo ora l'enunciato valido fino a $N-1$, per un certo $N\geq 2$ (e $M\geq 1$ qualsiasi) e dimostriamo che vale anche per N. Useremo la notazione

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = (y_1,\dots,y_{N-1})\,,$$

per cui scriveremo $y=(\tilde{\boldsymbol{y}}_1, y_N)$. Siccome

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial y_1}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \end{pmatrix} \neq 0\,,$$

almeno uno degli elementi dell'ultima colonna è non nullo. Possiamo supporre senza perdita di generalità, eventualmente permutando le righe, che sia $\frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0$. Scrivendo $\boldsymbol{y}_0 = (\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0, y_N^0)$, con $\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0 = (y_1^0,\dots,y_{N-1}^0)$, sarà

$$g_N(\boldsymbol{x}_0,\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0,y_N^0) = 0\,,\qquad \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0,\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0,y_N^0)\neq 0\,.$$

[2] Dimostrazione non vista a lezione.

Allora (caso unidimensionale) esistono un intorno aperto U_1 di $(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0)$, un intorno aperto V_N di y_N^0 e una funzione $\eta_1 : U_1 \to V_N$ di classe C^1 tali che $U_1 \times V_N \subseteq \Omega$, per cui si abbia: se $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) \in U_1$ e $y_N \in V_N$,

$$g_N(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, y_N) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_N = \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)\,,$$

e

$$J\eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) = -\frac{1}{\frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)))} \, \frac{\partial g_N}{\partial(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1))\,.$$

Possiamo supporre U_1 della forma $\widetilde{U} \times \widetilde{V}_1$, con $\widetilde{U}$ intorno aperto di $\boldsymbol{x}_0$ e $\widetilde{V}_1$ intorno aperto di $\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0$. Definiamo la funzione $\phi : \widetilde{U} \times \widetilde{V}_1 \to \mathbb{R}^{N-1}$, ponendo

$$\phi(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) = (g_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)), \ldots, g_{N-1}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)))\,.$$

Per brevità, scriveremo

$$g_{(1,\ldots,N-1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (g_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \ldots, g_{N-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))\,.$$

Notiamo che $\phi(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = 0$ e che, essendo $\eta_1(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = y_N^0$,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = \frac{\partial g_{(1,\ldots,N-1)}}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) + \frac{\partial g_{(1,\ldots,N-1)}}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\frac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0)\,. \qquad (*)$$

Inoltre, siccome $g_N(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1)) = 0$, per ogni $(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) \in U_1$, differenziando si ha:

$$0 = \frac{\partial g_N}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) + \frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)\frac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0)\,. \qquad (**)$$

Scriviamo

$$\det \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = \frac{1}{\frac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)} \det \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) & \dfrac{\partial g_{(1,\ldots,N-1)}}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \\ \hline 0 & \dfrac{\partial g_N}{\partial y_N}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \end{array}\right),$$

avendo usato la notazione di matrice suddivisa a blocchi. Sostituendo le due uguaglianze $(*)$, $(**)$ e usando le proprietà dei determinanti, si ha:

$$\begin{aligned}
&\det \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \phi}{\partial \tilde{y}_1}(x_0, \tilde{y}_1^0) & \dfrac{\partial g_{(1,\ldots,N-1)}}{\partial y_N}(x_0, y_0) \\ \hline 0 & \dfrac{\partial g_N}{\partial y_N}(x_0, y_0) \end{array}\right) = \\
&= \det \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial g_{(1,\ldots,N-1)}}{\partial \tilde{y}_1}(x_0, y_0) + \dfrac{\partial g_{(1,\ldots,N-1)}}{\partial y_N}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{y}_1}(x_0, \tilde{y}_1^0) & \dfrac{\partial g_{(1,\ldots,N-1)}}{\partial y_N}(x_0, y_0) \\ \hline \dfrac{\partial g_N}{\partial \tilde{y}_1}(x_0, y_0) + \dfrac{\partial g_N}{\partial y_N}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{y}_1}(x_0, \tilde{y}_1^0) & \dfrac{\partial g_N}{\partial y_N}(x_0, y_0) \end{array}\right) \\
&= \det \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial g}{\partial \tilde{y}_1}(x_0, y_0) + \dfrac{\partial g}{\partial y_N}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \eta_1}{\partial \tilde{y}_1}(x_0, \tilde{y}_1^0) & \dfrac{\partial g}{\partial y_N}(x_0, y_0) \end{array}\right) \\
&= \det \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial g}{\partial \tilde{y}_1}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial g}{\partial y_N}(x_0, y_0) \end{array}\right) = \det \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi

$$\phi(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) = 0\,, \qquad \det \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{y}}_1}(\boldsymbol{x}_0, \tilde{\boldsymbol{y}}_1^0) \neq 0\,.$$

Per l'ipotesi induttiva, esistono un intorno aperto U di $\boldsymbol{x}_0$, un intorno aperto V_1 di $\tilde{\boldsymbol{y}}_1^0$ e una funzione $\eta_2 : U \to V_1$ di classe C^1 tali che $U \times V_1 \subseteq \widetilde{U} \times \widetilde{V}_1$, per cui si abbia: per ogni $\boldsymbol{x} \in U$ e $\tilde{\boldsymbol{y}}_1 \in V_1$,

$$\phi(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \eta_2(\boldsymbol{x})\,.$$

In conclusione, per $\boldsymbol{x} \in U$ e $\boldsymbol{y} = (\tilde{\boldsymbol{y}}_1, y_N) \in V_1 \times V_2$, si ha:

$$\begin{aligned}
g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} g_{(1,\dots,N-1)}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, y_N) = 0 \\ g_N(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, y_N) = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} g_{(1,\dots,N-1)}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1, y_N) = 0 \\ y_N = \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \phi(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) = 0 \\ y_N = \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \eta_2(\boldsymbol{x}) \\ y_N = \eta_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}_1) \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{y} = (\eta_2(\boldsymbol{x}), \eta_1(\boldsymbol{x}, \eta_2(\boldsymbol{x})))\,.
\end{aligned}$$

Ponendo $V = V_1 \times V_2$, resta pertanto definita la funzione $\eta : U \to V$:

$$\eta(\boldsymbol{x}) = (\eta_2(\boldsymbol{x}), \eta_1(\boldsymbol{x}, \eta_2(\boldsymbol{x})))\,.$$

Tale funzione è di classe C^1, siccome lo sono sia η_1 che η_2. Siccome $g(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x})) = 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in U$, se ne deduce che che

$$\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x})) + \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}, \eta(\boldsymbol{x})) J\eta(\boldsymbol{x}) = 0\,,$$

da cui la formula per $J\eta(\boldsymbol{x})$. ■

5 $M-$superfici

Indichiamo con I un rettangolo di $\mathbb{R}^M$, dove $1 \leq M \leq N$. Avremo quindi:

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_M, b_M]\,.$$

Definizione. *Chiameremo "$M-$superficie" in $\mathbb{R}^N$ una funzione* [3] $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ *di classe C^1. Se $M = 1$, σ si dirà anche "curva"; se $M = 2$, si dirà semplicemente "superficie". L'insieme $\sigma(I)$ è detto "supporto" della $M-$superficie σ. Diremo che la $M-$superficie σ è "regolare" se, per ogni $\boldsymbol{u}$ interno ad I, la matrice jacobiana $J\sigma(\boldsymbol{u})$ ha rango M.*

[3] Le derivate parziali di σ devono essere continue su tutto I e nei punti di frontiera vanno intese, se necessario, come derivate destre o sinistre. Equivalentemente, si potrebbe estendere σ ad una funzione di classe C^1 definita su un aperto contenente I.

Consideriamo da vicino il caso $N = 3$. Una curva in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. La curva è regolare se, per ogni $t \in]a,b[$, il "vettore derivata" (o "vettore velocità") $\sigma'(t) = (\sigma_1'(t), \sigma_2'(t), \sigma_3'(t))$ è non nullo. È individuata una retta, passante per il punto $\sigma(t)$, avente la direzione di $\sigma'(t)$; essa è detta "retta tangente" alla curva nel punto $\sigma(t)$. Si definisce il seguente "versore tangente":

$$\tau_\sigma(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}\,.$$

Una superficie in $\mathbb{R}^3$ è una funzione $\sigma : [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$. La superficie è regolare se, per ogni $(u,v) \in]a_1,b_1[\, \times\,]a_2,b_2[$, i vettori $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)$, $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$ sono linearmente indipendenti. È individuato un piano, contenete il punto $\sigma(u,v)$, parallelo al piano generato dai due vettori $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$; esso è detto "piano tangente" alla superficie nel punto $\sigma(u,v)$. Si definisce il seguente "versore normale":

$$\nu_\sigma(u,v) = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)}{||\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)||}\,.$$

Esempi. 1. La superficie $\sigma : [0,\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u,v) = (R\sin u\cos v, R\sin u\sin v, R\cos u)$$

ha come supporto la semisfera

$$\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y \geq 0\}\,.$$

Calcolando

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, -R\sin u)\,,$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (-R\sin u\sin v, R\sin u\cos v, 0)\,,$$

vediamo che

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v) = (\sin^2\! u\cos v, \sin^2\! u\sin v, \sin u\cos u)\,.$$

Essendo

$$\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\| = \sin u\,,$$

si tratta di una superficie regolare, e si ha:

$$\nu_\sigma(u,v) = (\sin u\cos v, \sin u\sin v, \cos u)\,.$$

2. La superficie $\sigma : [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

dove $0 < r < R$, ha come supporto l'anello toroidale o "toro"

$$\{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}\,.$$

Si può verificare che anche in questo caso si tratta di una superficie regolare.

3. La superficie $\sigma : [r,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $0 \leq r < R$, data da

$$\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 0)\,,$$

ha come supporto l'insieme

$$\{(x,y,z) : r^2 \leq x^2+y^2 \leq R^2,\ z=0\}\,,$$

che è un cerchio se $r=0$, una corona circolare se $r>0$. Anche in questo caso si tratta di una superficie regolare.

4. La superficie $\sigma : [r,R] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, con $0 < r < R$, definita da

$$\begin{aligned}\sigma(u,v) = \Bigg(\bigg(\frac{r+R}{2} + \Big(u - \frac{r+R}{2}\Big)\cos\Big(\frac{v}{2}\Big)\bigg)\cos v,\\ \bigg(\frac{r+R}{2} + \Big(u - \frac{r+R}{2}\Big)\cos\Big(\frac{v}{2}\Big)\bigg)\sin v,\\ \Big(u - \frac{r+R}{2}\Big)\sin\Big(\frac{v}{2}\Big)\Bigg)\,,\end{aligned}$$

ha come supporto un nastro di Möbius. Si può verificare anche in questo caso che si tratta di una superficie regolare.

6 $M-$parametrizzazioni locali

In questa sezione supporremo $1 \leq M < N$. Identificando $\mathbb{R}^N$ con $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M}$, ogni vettore $\boldsymbol{p} = (p_1,\ldots,p_N)$ di $\mathbb{R}^N$ si scriverà nella forma $\boldsymbol{p} = (\hat{\boldsymbol{p}},\tilde{\boldsymbol{p}})$, con $\hat{\boldsymbol{p}} = (p_1,\ldots,p_M)$ e $\tilde{\boldsymbol{p}} = (p_{M+1},\ldots,p_N)$.

Useremo inoltre la seguente notazione: dato $\hat{\boldsymbol{p}} = (p_1,\ldots,p_M) \in \mathbb{R}^M$ e $r>0$,

$$B[\hat{\boldsymbol{p}},r] = [p_1-r,p_1+r] \times \ldots \times [p_M-r,p_M+r] \subseteq \mathbb{R}^M\,.$$

Per semplicità, scriveremo $B[r]$ invece di $B[\mathbf{0},r]$.

Teorema. *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{p}_0$ un punto di Ω e $g : \Omega \to \mathbb{R}^{N-M}$ una funzione di classe C^1, tale che*

$$g(\boldsymbol{x}_0) = 0\,, \quad e \quad Jg(\boldsymbol{x}_0) \text{ ha rango } N-M.$$

Allora esistono un intorno U di $\boldsymbol{p}_0$ e una $M-$superficie regolare e iniettiva $\sigma : B[r] \to \mathbb{R}^N$, per un certo $r>0$, tali che $\sigma(\mathbf{0}) = \boldsymbol{p}_0$ e

$$\{\boldsymbol{p} \in U : g(\boldsymbol{p}) = 0\} = \sigma(B[r])\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo, per esempio, che sia invertibile

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{\boldsymbol{p}}}(\boldsymbol{p}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial p_{M+1}}(\boldsymbol{p}_0) \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial p_N}(\boldsymbol{p}_0) \\ \vdots \quad \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{N-M}}{\partial p_{M+1}}(\boldsymbol{p}_0) \cdots & \frac{\partial g_{N-M}}{\partial p_N}(\boldsymbol{p}_0) \end{pmatrix}.$$

Per il teorema della funzione implicita, esistono un intorno aperto $\hat{U}$ di $\hat{\boldsymbol{p}}_0$, un intorno aperto $\widetilde{U}$ di $\tilde{\boldsymbol{p}}_0$ e una funzione $\eta : \hat{U} \to \widetilde{U}$, tali che $\hat{U} \times \widetilde{U} \subseteq \Omega$ e, se $\hat{\boldsymbol{p}} \in \hat{U}$ e $\tilde{\boldsymbol{p}} \in \widetilde{U}$, si ha:

$$g(\hat{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{p}}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{p}} = \eta(\hat{\boldsymbol{p}}).$$

Preso $r > 0$ tale che $B[\hat{\boldsymbol{p}}_0, r] \subseteq \hat{U}$, sia $U = B[\hat{\boldsymbol{p}}_0, r] \times \widetilde{U}$ e $\sigma : B[r] \to \mathbb{R}^N$ definita da $\sigma(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{p}}_0, \eta(\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{p}}_0))$. Si verifica che la matrice jacobiana $J\sigma(\boldsymbol{u})$ ha come sottomatrice la matrice $M \times M$ identità, per cui σ è regolare. Si vede facilmente che σ è iniettiva, in quanto lo è la prima componente $\boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{p}}_0$. Inoltre, se $\boldsymbol{p} = (\hat{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{p}}) \in U$,

$$g(\hat{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{p}}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{p}} = \eta(\hat{\boldsymbol{p}}) \quad \Leftrightarrow \quad (\hat{\boldsymbol{p}}, \tilde{\boldsymbol{p}}) = \sigma(\hat{\boldsymbol{p}} - \hat{\boldsymbol{p}}_0),$$

da cui la tesi. Nel caso in cui la sottomatrice considerata non sia invertibile, basterà operare degli scambi nelle colonne della matrice $Jg(\boldsymbol{p}_0)$ per ricondursi alla situazione precedente. ■

La $M-$superficie σ individuata dal teorema precedente è detta "$M-$parametrizzazione locale".

Vediamo tre casi di particolare interesse. Iniziamo con una curva in $\mathbb{R}^2$ (caso $M = 1$, $N = 2$).

Corollario 1. *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di Ω e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, tale che*

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad e \quad \nabla g(x_0, y_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di (x_0, y_0) e una curva regolare e iniettiva $\sigma : [-r, r] \to \mathbb{R}^2$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(0) = (x_0, y_0)$ e

$$\{(x, y) \in U : g(x, y) = 0\} = \sigma([-r, r]).$$

Vediamo ora il caso di una superficie in $\mathbb{R}^3$ (caso $M = 2$, $N = 3$).

Corollario 2. *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) un punto di Ω e $g : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, tale che*

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad e \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Allora esistono un intorno U di (x_0, y_0, z_0) e una superficie regolare e iniettiva $\sigma : [-r, r] \times [-r, r] \to \mathbb{R}^3$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(0, 0) = (x_0, y_0, z_0)$ e

$$\{(x, y, z) \in U : g(x, y, z) = 0\} = \sigma([-r, r] \times [-r, r]).$$

Infine, vediamo il caso di una curva in $\mathbb{R}^3$ (caso $M = 1$, $N = 3$).

Corollario 3. *Siano Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) un punto di Ω e $g_1, g_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1, tali che*

$$g_1(x_0, y_0, z_0) = g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \neq 0\,.$$

Allora esistono un intorno U di (x_0, y_0, z_0) e una curva regolare e iniettiva $\sigma : [-r, r] \to \mathbb{R}^3$, per un certo $r > 0$, tali che $\sigma(0) = (x_0, y_0, z_0)$ e

$$\{(x, y, z) \in U : g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\} = \sigma([-r, r])\,.$$

7 Moltiplicatori di Lagrange

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{x}_0$ un punto di Ω e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$. Vogliamo cercare eventuali punti di massimo o di minimo per la funzione ristretta a un "vincolo", che sarà descritto da un'altra funzione, in generale a valori vettoriali.

Teorema. *Sia $g : \Omega \to \mathbb{R}^{N-M}$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$g(\boldsymbol{x}_0) = 0\,, \quad \text{e} \quad Jg(\boldsymbol{x}_0) \text{ ha rango } N - M.$$

Posto

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : g(\boldsymbol{x}) = 0\}\,,$$

se $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esistono $(N - M)$ numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-M}$ tali che

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{j=1}^{N-M} \lambda_j \nabla g_j(\boldsymbol{x}_0)\,.$$

I numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_{N-M}$ si chiamano **moltiplicatori di Lagrange***.*

<u>Dimostrazione</u>. Per il teorema precedente, esistono un intorno U di $\boldsymbol{x}_0$, un $r > 0$ e una $M-$superficie regolare $\sigma : B[r] \to \mathbb{R}^N$ tali che $\sigma(\mathbf{0}) = \boldsymbol{x}_0$ e

$$S \cap U = \sigma(B[r])\,.$$

Considerata la funzione $F : B[r] \to \mathbb{R}$, definita da $F(\boldsymbol{u}) = f(\sigma(\boldsymbol{u}))$, si ha che $\mathbf{0}$ è un punto di minimo o massimo locale per F. Quindi, $\nabla F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, per cui

$$0 = JF(\mathbf{0}) = Jf(\boldsymbol{x}_0) J\sigma(\mathbf{0})\,.$$

Ne segue che

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \text{ è ortogonale a } \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{0}), \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_M}(\mathbf{0})\,.$$

Inoltre, essendo $g(\sigma(\boldsymbol{u})) = 0$ per ogni $\boldsymbol{u} \in B[r]$, si ha che

$$Jg(\boldsymbol{x}_0) J\sigma(\mathbf{0}) = 0\,.$$

Quindi anche i vettori

$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}_0), \ldots, \nabla g_{N-M}(\boldsymbol{x}_0) \text{ sono tutti ortogonali a } \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{0}), \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_M}(\mathbf{0}).$$

Avendo supposto che $J\sigma(\mathbf{0})$ abbia rango M,

$$\text{lo spazio vettoriale } \mathcal{T} \text{ generato da } \frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\mathbf{0}), \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_M}(\mathbf{0}) \text{ ha dimensione } M.$$

Quindi lo spazio ortogonale $\mathcal{T}^\perp$ ha dimesnione $N-M$. Siccome, come abbiamo visto,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0), \nabla g_1(\boldsymbol{x}_0), \ldots, \nabla g_{N-M}(\boldsymbol{x}_0) \in \mathcal{T}^\perp,$$

questi vettori devono essere linearmente dipendenti. Quindi, essendo i vettori $\nabla g_1(\boldsymbol{x}_0)$, $\ldots$, $\nabla g_{N-M}(\boldsymbol{x}_0)$ linearmente indipendenti, ne segue che $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ si può esprimere come combinazione lineare dei $\nabla g_j(\boldsymbol{x}_0)$. ■

Vediamo anche qui tre casi particolari interessanti.

Corollario 1. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) un punto di Ω, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$g(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g(x_0, y_0) \neq 0,$$

e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0). Posto

$$S = \{(x, y) \in \Omega : g(x, y) = 0\},$$

se (x_0, y_0) è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esiste un numero reale λ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Corollario 2. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) un punto di Ω, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$g(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0, z_0). Posto

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega : g(x, y, z) = 0\},$$

se (x_0, y_0, z_0) è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esiste un numero reale λ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Corollario 3. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^3$, (x_0, y_0, z_0) un punto di Ω, $g_1, g_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 tali che*

$$g_1(x_0, y_0, z_0) = g_2(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) \times \nabla g_2(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in (x_0, y_0, z_0). Posto

$$S = \{(x, y, z) \in U : g_1(x, y, z) = 0,\ g_2(x, y, z) = 0\},$$

se (x_0, y_0, z_0) è un punto di minimo o massimo locale per $f|_S$, allora esistono due numeri reali λ_1, λ_2 tali che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0, y_0, z_0) + \lambda_2 \nabla g_2(x_0, y_0, z_0).$$