

# Analisi Matematica I

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Fisica e Matematica, a.a. 2016/2017

## Lezione 1 del 03/10/2016:

### I numeri naturali e il principio di induzione

Descriviamo l'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali elencandone le principali caratteristiche.

I) È definita una “relazione d'ordine”  $\leq$  con le seguenti proprietà:

per ogni scelta di  $m, n, p$  in  $\mathbb{N}$ ,

a)  $n \leq n$ ,

b)  $[m \leq n \text{ e } n \leq m] \Rightarrow m = n$ ,

c)  $[m \leq n \text{ e } n \leq p] \Rightarrow m \leq p$ ;

inoltre, tale relazione d'ordine è “totale”:

d)  $m \leq n$  o  $n \leq m$ .

Se  $m \leq n$ , scriveremo anche  $n \geq m$ . Se  $m \leq n$  e  $m \neq n$ , scriveremo  $m < n$  oppure  $n > m$ .

II) Esiste un “primo elemento”  $0$ : si ha  $0 \leq n$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

III) Ogni elemento  $n$  ha un “successivo”  $n'$ : si ha  $n < n'$  e non esiste alcun elemento  $m$  tale che  $n < m$  e  $m < n'$ .

Si introducono i simboli  $0' = 1$ ,  $1' = 2$ ,  $2' = 3$ , ecc.

IV) (**Principio di induzione**) Se  $S$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  tale che

i)  $0 \in S$ ,

ii)  $n \in S \Rightarrow n' \in S$ ,

allora  $S = \mathbb{N}$ .

È sottinteso che la condizione ii) deve valere per  $n \in \mathbb{N}$  qualsiasi. Possiamo quindi leggerla in questo modo:

ii) se per un certo  $n$  si ha che  $n \in S$ , ne consegue che anche  $n' \in S$ .

Il principio di induzione può essere usato per definire una successione di oggetti

$$A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$$

Si procede in questo modo (**definizione per ricorrenza**):

*j*) si definisce  $A_0$ ;

*jj*) supponendo di aver definito  $A_n$  per un certo  $n$ , si definisce  $A_{n'}$ .

In tal modo, se indichiamo con  $S$  l'insieme degli  $n$  per cui  $A_n$  è definita, si ha che  $S$  verifica *i*) e *ii*). Quindi  $S$  coincide con  $\mathbb{N}$ , ossia tutti gli  $A_n$  sono definiti.

Ad esempio, possiamo definire le operazioni di “addizione” e “moltiplicazione” in  $\mathbb{N}$ .

Dato  $a \in \mathbb{N}$ , vogliamo definire  $a + n$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Poniamo

*j*)  $a + 0 = a$ ,

*jj*)  $a + n' = (a + n)'$ .

Si vede in questo modo che  $a + 1 = a + 0' = (a + 0)' = a'$  (quindi, da ora in poi, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , scriveremo indifferentemente  $n'$  o  $n + 1$ ).

Dato  $a \in \mathbb{N}$ , vogliamo definire  $a \cdot n$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Poniamo

*j*)  $a \cdot 0 = 0$ ,

*jj*)  $a \cdot n' = a + (a \cdot n)$ .

Si vede in questo modo che  $a \cdot 1 = a \cdot 0' = a + (a \cdot 0) = a + 0 = a$ ,  
 $a \cdot 2 = a \cdot 1' = a + (a \cdot 1) = a + a$ , e così via.

Nella pratica, spesso si omette il  $\cdot$  nella moltiplicazione. Inoltre, si usa scrivere  $c = b - a$  se  $c + a = b$ , e  $c = \frac{b}{a}$  se  $c \cdot a = b$ , con  $a \neq 0$ .

Possiamo inoltre definire le “potenze”  $a^n$  ponendo, per  $a \neq 0$ ,

*j*)  $a^0 = 1$ ,

*jj*)  $a^{n+1} = a \cdot a^n$ .

Si vede in questo modo che  $a^1 = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a$ ,  $a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a$ , e così via. Se  $a = 0$ , si pone  $0^n = 0$  per ogni  $n \geq 1$ , mentre resta non definito  $0^0$ .

Infine, definiamo il “fattoriale”  $n!$  ponendo

*j*)  $0! = 1$ ,

*jj*)  $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n!$ .

Il principio di induzione può inoltre essere usato per dimostrare una successione di proposizioni

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$$

Si procede in questo modo (**dimostrazione per induzione**):

*j*) si verifica  $P_0$ ;

*jj*) supponendo vera  $P_n$  per un certo  $n$ , si verifica  $P_{n+1}$ .

Se indichiamo con  $S$  l'insieme degli  $n$  per cui  $P_n$  è dimostrata, si ha che  $S$  verifica *i*) e *ii*). Quindi  $S$  coincide con  $\mathbb{N}$ , ossia tutte le  $P_n$  sono dimostrate.

In questo modo si possono dimostrare le varie proprietà delle operazioni di addizione, moltiplicazione e delle potenze, che supporremo da ora in poi note.

**Esempio 1.** Dimostriamo la seguente uguaglianza: se  $a \neq 1$ ,<sup>1</sup>

$$P_n : \quad \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

---

<sup>1</sup>Si supponrà qui che sia  $a^0 = 1$  anche qualora  $a = 0$ .

Vediamo  $P_0$ :

$$\sum_{k=0}^0 a^k = \frac{a^1 - 1}{a - 1};$$

essa equivale all'identità  $a^0 = 1$  e pertanto è vera. Supponiamo ora che  $P_n$  sia vera, per un certo  $n \in \mathbb{N}$ ; allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} a^k &= \sum_{k=0}^n a^k + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} \\ &= \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1}, \end{aligned}$$

per cui anche  $P_{n+1}$  è vera. Abbiamo quindi dimostrato che  $P_n$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

## Lezione 2 del 05/10/2016:

### Il principio di induzione e la formula del binomio

La formula dimostrata nell'Esempio 1 si può generalizzare nella seguente:<sup>2</sup>

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \left( \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} \right).$$

La dimostrazione è analoga. In particolare, si ha:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2), \\ a^4 - b^4 &= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3), \\ a^5 - b^5 &= (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4), \\ &\dots \end{aligned}$$

**Esempio 2.** Vogliamo dimostrare che, presi due numeri naturali  $a$  e  $n$ , si ha la seguente **disuguaglianza di Bernoulli**:

$$P_n : \quad (1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Vediamo che vale  $P_0$ , essendo sicuramente  $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \cdot a$ . Supponiamo ora vera  $P_n$  per un certo  $n$  e verifichiamo  $P_{n+1}$ :

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a,$$

per cui anche  $P_{n+1}$  è vera. Quindi,  $P_n$  è vera per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

---

<sup>2</sup>Analogamente a quanto detto nella nota precedente, anche qui si supporrà che  $a^0 = 1$ ,  $b^0 = 1$  anche nei casi in cui risultino del tipo  $0^0$ .

In alcuni casi potrebbe essere comodo iniziare la successione delle proposizioni, ad esempio, da  $P_1$  invece che da  $P_0$ , o da una qualsiasi altra di esse. Il principio di dimostrazione resta naturalmente lo stesso: se ne verifica la prima e si dimostra che da una qualsiasi di esse segue la successiva.

**Altri esempi ed esercizi.** Si possono dimostrare per induzione le seguenti formule:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Si noti l'uguaglianza

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Definiamo ora, per ogni coppia di numeri naturali  $n, k$  tali che  $k \leq n$ , i “coefficienti binomiali”

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Verifichiamo che, per  $1 \leq k \leq n$ , vale la formula

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k};$$

abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}. \end{aligned}$$

Dimostreremo ora che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , vale la seguente **formula del binomio (di Newton)**:<sup>3</sup>

$$P_n : \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

---

<sup>3</sup>Anche in questa formula si supponrà che  $a^0 = 1$ ,  $b^0 = 1$  e  $(a+b)^0 = 1$  anche nei casi in cui risultino del tipo  $0^0$ .



Come casi particolari della formula del binomio, abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4, \\(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, \\&\dots\end{aligned}$$

## Lezione 3 del 06/10/2016:

### I numeri reali

Non ci soffermeremo sulle ragioni di carattere algebrico che portano, a partire dall'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

alla costruzione dell'insieme dei numeri interi relativi

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

e dell'insieme dei numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}.$$

Ci interessa però far notare che l'insieme dei numeri razionali non è sufficiente a trattare questioni geometriche elementari, quali ad esempio la misurazione della diagonale di un quadrato di lato 1.

**Teorema.** *Non esiste alcun numero razionale  $x$  tale che  $x^2 = 2$ .*

Dimostrazione. <sup>4</sup> Per assurdo, supponiamo che esistano  $m, n \in \mathbb{N}$  non nulli tali che

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2,$$

ossia  $m^2 = 2n^2$ . Allora  $m$  deve essere pari, per cui esiste un  $m_1 \in \mathbb{N}$  non nullo tale che  $m = 2m_1$ . Ne segue che  $4m_1^2 = 2n^2$ , ossia  $2m_1^2 = n^2$ . Pertanto anche  $n$  deve essere pari, per cui esiste un  $n_1 \in \mathbb{N}$  non nullo tale che  $2n_1 = n$ . Quindi

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} \quad \text{e} \quad \left(\frac{m_1}{n_1}\right)^2 = 2.$$

Possiamo ora ripetere lo stesso ragionamento quante volte vogliamo, continuando a dividere per 2 numeratore e denominatore:

$$\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_3}{n_3} = \dots = \frac{m_k}{n_k} = \dots$$

dove  $m_k$  e  $n_k$  sono numeri naturali non nulli tali che  $m = 2^k m_k$ ,  $n = 2^k n_k$ . Quindi, essendo  $n_k \geq 1$ , si ha che  $n \geq 2^k$ , per ogni numero naturale  $k \geq 1$ . In particolare,  $n \geq 2^n$ . Ma la disuguaglianza di Bernoulli ci dice che  $2^n = (1+1)^n \geq 1+n$ , e ne consegue che  $n \geq 1+n$ , il che è palesemente falso. ■

<sup>4</sup>Dimostrazione vista durante il Precorso.

Si rende pertanto necessario estendere ulteriormente l'insieme dei numeri razionali.

È possibile costruire l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  a partire dai razionali. Essendo però tale costruzione piuttosto laboriosa, ci limiteremo qui ad enunciare le principali proprietà di  $\mathbb{R}$ .

1) È definita una relazione d'ordine totale  $\leq$  (vedi le proprietà enunciate per i numeri naturali).

2) È definita un'operazione di addizione  $+$  con le seguenti proprietà:

per ogni scelta di  $x, y, z$  in  $\mathbb{R}$ ,

- a) (associativa)  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
- b) esiste un "elemento neutro"  $0$ : si ha  $x + 0 = x = 0 + x$ ;
- c) ogni elemento  $x$  ha un "opposto"  $-x$ : si ha  $x + (-x) = 0 = (-x) + x$ ;
- d) (commutativa)  $x + y = y + x$ ;
- e) se  $x \leq y$ , allora  $x + z \leq y + z$ .

3) È definita un'operazione di moltiplicazione  $\cdot$  con le seguenti proprietà:

per ogni scelta di  $x, y, z$  in  $\mathbb{R}$ ,

- a) (associativa)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ ;
- b) esiste un "elemento neutro"  $1$ : si ha  $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ ;
- c) ogni elemento  $x \neq 0$  ha un "reciproco"  $x^{-1}$ : si ha  $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$ ;
- d) (commutativa)  $x \cdot y = y \cdot x$ ;
- e) se  $x \leq y$  e  $z \geq 0$ , allora  $x \cdot z \leq y \cdot z$ ;

e una proprietà che coinvolge entrambe le operazioni:

- f) (distributiva)  $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ ;

4) (**Proprietà di separazione**) Dati due sottoinsiemi non vuoti  $A, B$  tali che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b,$$

esiste un elemento  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b.$$

Dalle proprietà elencate qui sopra si possono ricavare tutte le proprietà algebriche dei numeri reali, che supporremo già note.

Ritroviamo l'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ :  $0$  e  $1$  sono gli elementi neutri di addizione e moltiplicazione, dopodiché si ha  $2 = 1 + 1$ ,  $3 = 2 + 1$  e così via, per ricorrenza.

Nel seguito, ometteremo quasi sempre il  $\cdot$  nella moltiplicazione. Scriveremo, come è noto,  $z = y - x$  se  $z + x = y$ , e  $z = \frac{y}{x}$  se  $zx = y$ , con  $x \neq 0$ . In particolare,  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ .

Le potenze  $a^n$  si definiscono come nella Sezione 1 per ogni  $a \in \mathbb{R}$  e, se  $a \neq 1$ , continua a valere la formula per la somma delle potenze ivi dimostrata (Esempio 1 e sua generalizzazione). La disuguaglianza di Bernoulli risulta valida per ogni  $a > -1$  e la formula del binomio di Newton continua a valere se  $a, b$  sono numeri reali qualsiasi.

Un sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}$  si dice “limitato superiormente” se esiste un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $x \in E$ , si ha  $x \leq \alpha$ ; un tale  $\alpha$  è allora una “limitazione superiore” di  $E$ . Se in più si ha che  $\alpha \in E$ , si dirà che  $\alpha$  è il “massimo” di  $E$  e si scriverà  $\alpha = \max E$ .

Analogamente,  $E$  si dice “limitato inferiormente” se esiste un  $\beta \in \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $x \in E$ , si ha  $x \geq \beta$ ; un tale  $\beta$  è allora una “limitazione inferiore” di  $E$ . Se in più si ha che  $\beta \in E$ , si dirà che  $\beta$  è il “minimo” di  $E$  e si scriverà  $\beta = \min E$ .

Diremo che  $E$  è “limitato” se è sia limitato superiormente che limitato inferiormente.

**Teorema.** *Se  $E$  è un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbb{R}$  limitato superiormente, l'insieme delle limitazioni superiori di  $E$  ha sempre un minimo.*

Dimostrazione. Sia  $B$  l'insieme delle limitazioni superiori di  $E$ . Allora

$$\forall a \in E \quad \forall b \in B \quad a \leq b,$$

e per la proprietà di separazione esiste un elemento  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall a \in E \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b.$$

Ciò significa che  $c$  è una limitazione superiore di  $E$ , e quindi  $c \in B$ , ed è anche una limitazione inferiore di  $B$ . Pertanto,  $c = \min B$ . ■

Se  $E$  è limitato superiormente, la minima limitazione superiore di  $E$  si chiama “estremo superiore” di  $E$ : è un numero reale  $s \in \mathbb{R}$  e si scrive  $s = \sup E$ . Esso è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- i)  $\forall x \in E \quad x \leq s$ ,
- ii)  $\forall s' < s \quad \exists x \in E : \quad x > s'$ .

Se l'estremo superiore  $s$  appartiene ad  $E$ , si ha che  $s = \max E$ ; succede spesso, però, che  $E$ , pur essendo limitato superiormente, non abbia un massimo.

Analogamente a quanto sopra, si può dimostrare il seguente

**Teorema.** *Se  $E$  è un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbb{R}$  limitato inferiormente, l'insieme delle limitazioni inferiori di  $E$  ha sempre un massimo.*

Se  $E$  è limitato inferiormente, la massima limitazione inferiore di  $E$  si chiama “estremo inferiore” di  $E$ : è un numero reale  $i \in \mathbb{R}$  e si scrive  $i = \inf E$ . Esso è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

- j)  $\forall x \in E \quad x \geq i$ ,
- jj)  $\forall i' > i \quad \exists x \in E : \quad x < i'$ .

Se l'estremo inferiore  $i$  appartiene ad  $E$ , si ha che  $i = \min E$ ; non è detto, però, che  $E$ , pur essendo limitato inferiormente, abbia un minimo.



## Lezione 4 del 12/10/2016:

### I numeri reali – continuazione

Nel caso in cui  $E$  non sia limitato superiormente, useremo la scrittura

$$\sup E = +\infty.$$

**Teorema.**  $\sup \mathbb{N} = +\infty$ .

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che  $\mathbb{N}$  sia limitato superiormente, e sia  $s = \sup \mathbb{N}$ . Per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $n > s - \frac{1}{2}$ . Ma allora  $n + 1 \in \mathbb{N}$  e

$$n + 1 > s - \frac{1}{2} + 1 > s,$$

in contraddizione col fatto che  $s$  è una limitazione superiore per  $\mathbb{N}$ . ■

Nel caso in cui  $E$  non sia limitato inferiormente, useremo la scrittura

$$\inf E = -\infty.$$

Ad esempio, si ha che  $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ .

Ci sarà utile, anche in seguito, la seguente proprietà dei numeri reali.

**Lemma.** Se  $0 \leq \alpha < \beta$ , allora  $\alpha^2 < \beta^2$ .

Dimostrazione. Se  $0 \leq \alpha < \beta$ , si ha  $\alpha^2 = \alpha\alpha \leq \alpha\beta < \beta\beta = \beta^2$ . ■

Dimostreremo ora che esiste un numero reale  $c > 0$  tale che  $c^2 = 2$ .

Definiamo gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ e } x^2 < 2\}, \\ B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ e } x^2 > 2\}.$$

Si può vedere che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b;$$

(altrimenti avremmo  $0 \leq b < a$ , quindi, per il Lemma,  $b^2 < a^2$ , mentre è  $a^2 < 2$  e  $b^2 > 2$ , impossibile). Usando la proprietà di separazione, esiste un elemento  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b.$$

Si noti che, essendo  $1 \in A$ , sicuramente  $c \geq 1$ . Vogliamo ora mostrare che si ha proprio  $c^2 = 2$ .

Per assurdo, se  $c^2 > 2$ , allora, per  $n \geq 1$ ,

$$\left(c - \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 - \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \geq c^2 - \frac{2c}{n};$$

quindi, se  $n > 2c/(c^2 - 2)$ , si può verificare che  $c - \frac{1}{n} > 0$  e  $(c - \frac{1}{n})^2 > 2$ , e pertanto  $c - \frac{1}{n} \in B$ . Ma allora deve essere  $c \leq c - \frac{1}{n}$ , il che è impossibile.

Supponiamo ora, sempre per assurdo, che  $c^2 < 2$ . Allora, se  $n \geq 1$ ,

$$\left(c + \frac{1}{n}\right)^2 = c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c^2 + \frac{2c}{n} + \frac{1}{n} = c^2 + \frac{2c+1}{n};$$

quindi, se  $n > (2c+1)/(2-c^2)$ , si ha che  $(c + \frac{1}{n})^2 < 2$ , e pertanto  $c + \frac{1}{n} \in A$ . Ma allora deve essere  $c + \frac{1}{n} \leq c$ , il che è impossibile.

Non potendo essere né  $c^2 > 2$  né  $c^2 < 2$ , deve quindi essere  $c^2 = 2$ .

Il Lemma ci assicura inoltre che non ci possono essere altre soluzioni positive dell'equazione

$$x^2 = 2,$$

la quale pertanto ha esattamente due soluzioni,  $c$  e  $-c$ .

Lo stesso tipo di procedimento può essere usato per dimostrare che, qualunque sia il numero reale positivo  $r$ , esiste un unico numero reale positivo  $c$  tale che  $c^2 = r$ . Questo si chiama “radice quadrata” di  $r$  e si scrive  $c = \sqrt{r}$ . Si noti che l'equazione  $x^2 = r$  ha due soluzioni:  $x = \sqrt{r}$  e  $x = -\sqrt{r}$ . Si pone inoltre  $\sqrt{0} = 0$ , mentre la radice quadrata di un numero negativo resta non definita.

Studieremo ora la “densità” degli insiemi  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  nell'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$ .

**Teorema.** *Dati due numeri reali  $\alpha, \beta$ , con  $\alpha < \beta$ , esiste un numero razionale tra essi compreso.*

Dimostrazione. Consideriamo tre casi distinti.

Primo caso:  $0 \leq \alpha < \beta$ . Scegliamo  $n \in \mathbb{N}$  tale che

$$n > \frac{1}{\beta - \alpha},$$

e sia  $m \in \mathbb{N}$  il più grande numero naturale tale che

$$m < n\beta.$$

Quindi  $\frac{m}{n} < \beta$ , e resta da vedere che  $\frac{m}{n} > \alpha$ . Per assurdo, sia  $\frac{m}{n} \leq \alpha$ ; allora

$$\frac{m+1}{n} \leq \alpha + \frac{1}{n} < \alpha + (\beta - \alpha) = \beta,$$

ossia  $m+1 < n\beta$ , in contraddizione col fatto che  $m$  è il più grande numero naturale minore di  $n\beta$ .

Secondo caso:  $\alpha < 0 < \beta$ . Basta scegliere il numero 0, che è razionale.

Terzo caso:  $\alpha < \beta \leq 0$ . Ci si può ricondurre al primo caso cambiando i segni:  $0 \leq -\beta < -\alpha$ , per cui esiste un razionale  $\frac{m}{n}$  tale che  $-\beta < \frac{m}{n} < -\alpha$ . Allora  $\alpha < -\frac{m}{n} < \beta$ . ■

**Teorema.** Dati due numeri reali  $\alpha, \beta$ , con  $\alpha < \beta$ , esiste un numero irrazionale tra essi compreso.

Dimostrazione. Per il teorema precedente, esiste un numero razionale  $\frac{m}{n}$  tale che

$$\alpha + \sqrt{2} < \frac{m}{n} < \beta + \sqrt{2}.$$

Ne segue che

$$\alpha < \frac{m}{n} - \sqrt{2} < \beta,$$

con  $\frac{m}{n} - \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . ■

Scopriremo ora una sostanziale differenza tra gli insiemi  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Consideriamo la seguente successione di numeri razionali non negativi:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{2}{2} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{1}{5} & \frac{2}{4} & \frac{3}{3} & \frac{4}{2} & \frac{5}{1} & \dots \end{array}$$

Come si vede, essa è costruita elencando i numeri razionali in cui la somma tra numeratore e denominatore è 1, poi 2, poi 3 e così via. Essa è sicuramente suriettiva, in quanto tutti i numeri razionali non negativi compaiono prima o poi nella lista. Possiamo ora modificarla per trovarne una biiettiva, eliminando i numeri che compaiono già in precedenza:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{1}{3} & \frac{3}{1} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{1}{5} & \frac{5}{1} & \frac{1}{6} & \frac{2}{5} & \frac{3}{4} & \frac{4}{3} & \frac{5}{2} & \frac{6}{1} & \dots \end{array}$$

A questo punto, è facile modificarla ancora per ottenere tutti i numeri razionali:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{3}{1} & -\frac{3}{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \dots \end{array}$$

In questo modo, abbiamo costruito una funzione  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  biiettiva. Diremo quindi che  $\mathbb{Q}$  è un insieme “numerabile”.

Vediamo ora che  $\mathbb{R}$  non è un insieme numerabile, ossia che non esiste una funzione  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  biiettiva. Infatti, se per assurdo esistesse una tale funzione, potrei elencare i numeri reali in una successione e, scrivendoli in forma decimale, avrei

$$\begin{array}{l} 0 \rightarrow \alpha_0 = \alpha_{0,0}, \alpha_{0,1}\alpha_{0,2}\alpha_{0,3}\alpha_{0,4} \dots \\ 1 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_{1,0}, \alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4} \dots \\ 2 \rightarrow \alpha_2 = \alpha_{2,0}, \alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4} \dots \\ 3 \rightarrow \alpha_3 = \alpha_{3,0}, \alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4} \dots \\ 4 \rightarrow \alpha_4 = \alpha_{4,0}, \alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4} \dots \\ \dots \end{array}$$

(qui tutti gli  $\alpha_{i,j}$  sono numeri naturali e, se  $j \geq 1$ , sono cifre comprese tra 0 e 9). Posso ora costruire un numero reale diverso da tutti gli  $\alpha_i$  della lista. Basta prendere gli elementi della diagonale  $\alpha_{0,0}, \alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,4}, \dots$  e modificarli uno a uno: scelgo un numero naturale  $\beta_0$ , tra 0 e 9, diverso da  $\alpha_{0,0}$ , poi un  $\beta_1$ , tra 0 e 9, diverso da  $\alpha_{1,1}$ , poi ancora un  $\beta_2$ , sempre tra 0 e 9, diverso da  $\alpha_{2,2}$ , e così via, con l'accortezza di non prenderli tutti uguali a 9, da un certo punto in poi. A questo punto, il numero reale  $\beta$  avente forma decimale

$$\beta = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 \dots$$

non può essere uguale ad alcuno dei numeri  $\alpha_i$ . La funzione  $\varphi$  non può pertanto essere suriettiva.

Avendo visto che  $\mathbb{Q}$  è numerabile e che  $\mathbb{R}$  non lo è, possiamo dedurre che nemmeno  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  può essere numerabile.

Chiamiamo “intervallo” un sottoinsieme non vuoto  $I$  di  $\mathbb{R}$  con la seguente proprietà: comunque presi due suoi elementi  $\alpha, \beta$ , l'insieme  $I$  contiene anche tutti i numeri tra essi compresi.

Si può dimostrare che gli intervalli sono di uno dei seguenti tipi, con le rispettive notazioni:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x : a \leq x \leq b\}, \\ ]a, b[ &= \{x : a < x < b\}, \\ [a, b[ &= \{x : a \leq x < b\}, \\ ]a, b] &= \{x : a < x \leq b\}, \\ [a, +\infty[ &= \{x : x \geq a\}, \\ ]a, +\infty[ &= \{x : x > a\}, \\ ]-\infty, b] &= \{x : x \leq b\}, \\ ]-\infty, b[ &= \{x : x < b\}, \\ \mathbb{R}, &\text{ talvolta denotato con } ]-\infty, +\infty[. \end{aligned}$$

I primi quattro sono limitati (sia superiormente che inferiormente), gli altri no. Nella lista si possono anche includere gli insiemi costituiti da un unico punto, cioè del tipo  $[a, a]$ . In tal caso, si tratta di un intervallo degenere. Gli intervalli del tipo  $[a, b]$  si dicono “chiusi e limitati”, quelli del tipo  $]a, b[$  “aperti e limitati”.

## Lezione 5 del 13/10/2016:

### Dai reali ai complessi

**Teorema (di Cantor).** Consideriamo una successione di intervalli chiusi e limitati  $I_n = [a_n, b_n]$ , con  $a_n \leq b_n$ , tali che

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

Allora esiste un elemento  $c \in \mathbb{R}$  che appartiene a tutti gli  $I_n$ .

Dimostrazione. Definiamo gli insiemi

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Preso un elemento  $a_n$  di  $A$  e un elemento  $b_m$  di  $B$  (non necessariamente con lo stesso indice), vediamo che  $a_n \leq b_m$ . Infatti, se  $n \leq m$ , allora  $I_n \supseteq I_m$ , per cui  $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$ . Se invece  $n \geq m$ , si ha  $I_m \supseteq I_n$ , per cui  $a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$ . In ogni caso,  $a_n \leq b_m$ . Possiamo quindi usare la proprietà di separazione, e troviamo un  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq c \leq b.$$

In particolare,  $a_n \leq c \leq b_n$ , cioè  $c \in I_n$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . ■

Il teorema di Cantor verrà ripreso e usato in seguito. Lasciamo ora questo argomento per introdurre il campo dei numeri complessi. Consideriamo l'insieme

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\},$$

che spesso si indica con  $\mathbb{R}^2$ . Definiamo un'operazione di "addizione":

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

Si verificano le seguenti proprietà:

- a) (associativa)  $(a, b) + ((a', b') + (a'', b'')) = ((a, b) + (a', b')) + (a'', b'')$ ;
- b) esiste un "elemento neutro"  $(0, 0)$ : si ha  $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$ ;
- c) ogni elemento  $(a, b)$  ha un "opposto"  $-(a, b) = (-a, -b)$ : si ha

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0);$$

- d) (commutativa)  $(a, b) + (a', b') = (a', b') + (a, b)$ ;

Definiamo un'operazione di "moltiplicazione":

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

Si può verificare che valgono le seguenti proprietà:

- a) (associativa)  $(a, b) \cdot ((a', b') \cdot (a'', b'')) = ((a, b) \cdot (a', b')) \cdot (a'', b'')$ ;
- b) esiste un "elemento neutro"  $(1, 0)$ : si ha  $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$ ;
- c) ogni elemento  $(a, b) \neq (0, 0)$  ha un "reciproco"  $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ : si ha

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1, 0);$$

- d) (commutativa)  $(a, b) \cdot (a', b') = (a', b') \cdot (a, b)$ ;
- e) (distributiva)  $(a, b) \cdot ((a', b') + (a'', b'')) = ((a, b) \cdot (a', b')) + ((a, b) \cdot (a'', b''))$ .

(Nel seguito, ometteremo spesso di scrivere il “ $\cdot$ ”). In questo modo,  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  risulta essere un campo, che verrà indicato con  $\mathbb{C}$  e si dirà il “campo complesso”. I suoi elementi si chiameranno “numeri complessi”.

Si può pensare  $\mathbb{C}$  come un’estensione di  $\mathbb{R}$  in questo modo: si identificano tutti gli elementi della forma  $(a, 0)$  con il corrispondente numero reale  $a$ . Le operazioni di somma e moltiplicazione indotte su  $\mathbb{R}$  sono effettivamente quelle preesistenti:

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0), \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0).\end{aligned}$$

Notiamo che vale la seguente uguaglianza:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0).$$

È allora conveniente introdurre un nuovo simbolo per indicare l’elemento  $(0, 1)$ . Scriveremo

$$(0, 1) = i.$$

In questo modo, avendo identificato  $(a, 0)$  con  $a$  e  $(b, 0)$  con  $b$ , possiamo scrivere

$$(a, b) = a + ib.$$

Posto  $z = a + ib$ , il numero  $a$  si dice “parte reale” di  $z$  e si scrive  $a = \operatorname{Re}(z)$ . Il numero  $b$  si dice “parte immaginaria” di  $z$  e si scrive  $b = \operatorname{Im}(z)$ .

Osserviamo ora che si ha

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Usando questa semplice informazione, possiamo verificare che valgono le usuali proprietà simboliche formali: ad esempio,

$$\begin{aligned}(a + ib) + (a' + ib') &= (a + a') + i(b + b'), \\ (a + ib)(a' + ib') &= (aa' - bb') + i(ab' + ba').\end{aligned}$$

## Lezione 6 del 17/10/2016:

### Il campo dei numeri complessi – continuazione

Se  $z = a + ib$ , si introduce il “modulo” di  $z$ :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

Dati due numeri complessi  $z$  e  $z'$ , si può verificare che

$$|zz'| = |z||z'|.$$

In particolare, se  $z = z'$ , si ha

$$|z^2| = |z|^2.$$

Ne segue per induzione che, per  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|z^n| = |z|^n.$$

Inoltre, se  $z \neq 0$ , essendo  $|z^{-1}z| = 1$ , si ha

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}.$$

Dato un numero complesso  $z = a + ib$ , si introduce il numero  $z^* = a - ib$ , detto il “complesso coniugato” di  $z$ . Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2)^* &= z_1^* + z_2^*; \\ (z_1 z_2)^* &= z_1^* z_2^*; \\ z^{**} &= z; \\ z z^* &= |z|^2; \\ \operatorname{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + z^*); \\ \operatorname{Im}(z) &= \frac{1}{2i}(z - z^*).\end{aligned}$$

Se  $z \neq 0$ , è

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}.$$

Sia  $z = a + ib$  un numero complesso fissato. Cerchiamo le soluzioni in  $\mathbb{C}$  dell'equazione

$$u^2 = z.$$

Queste verranno dette “radici quadrate” di  $z$ . Se  $b = 0$ , ho

$$u = \begin{cases} \pm\sqrt{a} & \text{se } a \geq 0, \\ \pm i\sqrt{a} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Se invece  $b \neq 0$ , scriviamo  $u = x + iy$ . Allora

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b.$$

Essendo  $b \neq 0$ , si ha  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ . Posso quindi scrivere  $y = \frac{b}{2x}$ , e ottengo

$$x^4 - ax^2 - \frac{b^2}{4} = 0,$$

da cui

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Determinati così  $x$  e  $y$ , abbiamo due soluzioni della nostra equazione:

$$u = \pm \left[ \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + i \frac{b}{\sqrt{2(a + \sqrt{a^2 + b^2})}} \right].$$

Possiamo ora considerare un'equazione del secondo grado

$$Au^2 + Bu + C = 0,$$

dove  $A, B, C$  sono numeri complessi fissati, con  $A \neq 0$ . Come facilmente si vede, l'equazione è equivalente a

$$\left(u + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}.$$

Ponendo  $v = u + \frac{B}{2A}$  e  $z = \frac{B^2 - 4AC}{(2A)^2}$ , ci si riconduce al problema delle radici quadrate che abbiamo già risolto.

Per concludere, consideriamo l'equazione polinomiale più generale

$$A_n u^n + A_{n-1} u^{n-1} + \dots + A_1 u + A_0 = 0,$$

dove  $A_0, A_1, \dots, A_n$  sono numeri complessi fissati, con  $A_n \neq 0$ . In altri termini, vogliamo trovare le radici di un polinomio a coefficienti complessi. Il seguente teorema, che enunciamo senza dimostrazione, è noto come **teorema fondamentale dell'algebra**.

**Teorema.** *Ogni equazione polinomiale ha, nel campo complesso, almeno una soluzione.*

Il problema di trovare una formula generale che fornisca le soluzioni è però tutt'altro che facile. Lo abbiamo affrontato nel caso  $n = 2$  e si può risolvere anche se  $n = 3$  o  $4$ . Se  $n \geq 5$ , però, è stato dimostrato che non esiste alcuna formula algebrica generale che fornisca una radice del polinomio.

## Lezione 7 del 19/10/2016:

### Lo spazio $\mathbb{R}^N$

Consideriamo l'insieme  $\mathbb{R}^N$ , costituito dalle  $N$ -uple  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , dove  $x_1, x_2, \dots, x_N$  sono numeri reali. Indicheremo i suoi elementi con i simboli

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots$$

Cominciamo con l'introdurre un'operazione di addizione in  $\mathbb{R}^N$ : dati due elementi  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ , si definisce  $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$  in questo modo:

$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_N + x'_N).$$



Valgono le seguenti proprietà:

- a) (associativa)  $(\mathbf{x} + \mathbf{x}') + \mathbf{x}'' = \mathbf{x} + (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')$ ;
- b) esiste un “elemento neutro”  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ : si ha  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x}$ ;
- c) ogni elemento  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  ha un “opposto”  
 $(-\mathbf{x}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_N)$ : si ha  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x}$ ;
- d) (commutativa)  $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x}$ .

Pertanto,  $(\mathbb{R}^N, +)$  è un “gruppo abeliano”. Normalmente, si usa scrivere  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  per indicare  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}')$ .

Definiamo ora la moltiplicazione di un elemento di  $\mathbb{R}^N$  per un numero reale: considerati  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  e un numero reale  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si definisce  $\alpha\mathbf{x}$  in questo modo:

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_N).$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a)  $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ ;
- b)  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{x}) + (\beta\mathbf{x})$ ;
- c)  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = (\alpha\mathbf{x}) + (\alpha\mathbf{x}')$ ;
- d)  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

Pertanto, con le operazioni introdotte,  $\mathbb{R}^N$  è uno “spazio vettoriale”. Chiameremo i suoi elementi “vettori”; i numeri reali, in questo ambito, verranno chiamati “scalari”.

È utile introdurre il “prodotto scalare” tra due vettori: dati  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ , si definisce il numero reale  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'$  in questo modo:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \sum_{k=1}^N x_k x'_k.$$

Il prodotto scalare è spesso indicato con simboli diversi, quali ad esempio

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle, \quad (\mathbf{x} | \mathbf{x}'), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ ;
- b)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- c)  $(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}'' = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'') + (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'')$ ;
- d)  $(\alpha\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}' = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')$ ;
- e)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}$ ;

A partire dal prodotto scalare, possiamo definire la “norma” di un vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ;
- b)  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- c)  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ ;
- d)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}'\|$ .

Per dimostrare la d), abbiamo bisogno della seguente **disuguaglianza di Schwarz**.

**Teorema.** *Presi due vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ , si ha*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\|.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza è sicuramente verificata se  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ , essendo in tal caso  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = 0$  e  $\|\mathbf{x}'\| = 0$ . Supponiamo quindi  $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ . Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si ha

$$0 \leq \|\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}'\|^2 = (\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}') = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + \alpha^2\|\mathbf{x}'\|^2.$$

Prendendo  $\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'$ , si ottiene

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|^2 - 2\frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 + \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^4}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2\|\mathbf{x}'\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^2}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2,$$

da cui la tesi. ■

Dimostriamo ora la proprietà d) della norma, usando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + \|\mathbf{x}'\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}'\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}'\|)^2, \end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza cercata.

Notiamo ancora la seguente **identità del parallelogramma**, di semplice verifica:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2).$$

Definiamo ora, a partire dalla norma, la “distanza euclidea” tra due vettori  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N (x_k - x'_k)^2}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \geq 0$ ;
- b)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ ;

- c)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = d(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ ;
- d)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ .

Quest'ultima viene spesso chiamata “disuguaglianza triangolare”; la dimostriamo:

$$\begin{aligned}
 d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}''\| \\
 &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')\| \\
 &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| \\
 &= d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'').
 \end{aligned}$$

## Lezione 8 del 20/10/2016:

### Spazi metrici

Dato un insieme non vuoto  $E$ , una funzione  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  si chiama “distanza” (su  $E$ ) se soddisfa alle seguenti proprietà:

- a)  $d(x, x') \geq 0$ ;
- b)  $d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$ ;
- c)  $d(x, x') = d(x', x)$ ;
- d)  $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$

(la disuguaglianza triangolare). L'insieme  $E$ , dotato della distanza  $d$ , si dice “spazio metrico”. I suoi elementi verranno spesso chiamati “punti”.

Abbiamo visto che  $\mathbb{R}^N$ , dotato della distanza euclidea, è uno spazio metrico (nel seguito, parlando dello spazio metrico  $\mathbb{R}^N$ , se non altrimenti specificato sottintenderemo che la distanza sia sempre quella euclidea). Nel caso  $N = 1$ , abbiamo la distanza usuale su  $\mathbb{R}$ :  $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ .

È però possibile considerare diverse distanze su uno stesso insieme. Ad esempio, presi due vettori  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ , la funzione

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{k=1}^N |x_k - x'_k|$$

rappresenta anch'essa una distanza in  $\mathbb{R}^N$ . Lo stesso dicasi per la funzione

$$d_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \max\{|x_k - x'_k| : k = 1, 2, \dots, N\}.$$

Oppure, si può definire la seguente:

$$\hat{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}', \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'. \end{cases}$$

Anche questa è una distanza, per quanto strana possa sembrare.

Dati  $x_0 \in E$  e un numero  $\rho > 0$ , definiamo la palla aperta di centro  $x_0$  e raggio  $\rho$ :

$$B(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) < \rho\};$$

analogamente definiamo la palla chiusa

$$\overline{B}(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq \rho\}$$

e la sfera

$$S(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) = \rho\}.$$

In  $\mathbb{R}$ , ogni intervallo aperto e limitato è una palla aperta e ogni intervallo chiuso e limitato è una palla chiusa: si ha

$$]a, b[ = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right), \quad [a, b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Una sfera in  $\mathbb{R}$  è quindi costituita da due soli punti.

In  $\mathbb{R}^2$ , con la distanza euclidea, una palla è un cerchio: la palla aperta non comprende i punti della circonferenza esterna, la palla chiusa sì. Una sfera è semplicemente una circonferenza.

Se in  $\mathbb{R}^2$  consideriamo la distanza  $d_1$  definita in precedenza, una palla sarà un quadrato, con i lati inclinati di 45 gradi, avente  $x_0$  come punto centrale. Una sfera sarà il perimetro di tale quadrato. Se invece consideriamo la distanza  $d_0$ , la palla sarà ancora un quadrato, ma con i lati paralleli agli assi cartesiani.

Se invece prendiamo la distanza  $\hat{d}$ , su un qualsiasi insieme  $E$ , allora

$$B(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho \leq 1, \\ E & \text{se } \rho > 1, \end{cases} \quad \overline{B}(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho < 1, \\ E & \text{se } \rho \geq 1, \end{cases}$$

per cui

$$S(x_0, \rho) = \begin{cases} E \setminus \{x_0\} & \text{se } \rho = 1, \\ \emptyset & \text{se } \rho \neq 1. \end{cases}$$

Un insieme  $U \subseteq E$  si dice “intorno” di un punto  $x_0$  se esiste un  $\rho > 0$  tale che  $B(x_0, \rho) \subseteq U$ ; in tal caso, il punto  $x_0$  si dice “interno” ad  $U$ . L’insieme dei punti interni ad  $U$  si chiama “l’interno” di  $U$  e si denota con  $\overset{\circ}{U}$ . Chiaramente, si ha sempre  $\overset{\circ}{U} \subseteq U$ . Si dice che  $U$  è un “insieme aperto” se coincide con il suo interno, ossia se  $\overset{\circ}{U} = U$ .

**Teorema.** *Una palla aperta è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Sia  $B(x_0, \rho)$  la palla in questione; prendiamo un  $x_1 \in B(x_0, \rho)$ . Scelto  $r > 0$  tale che  $r \leq \rho - d(x_0, x_1)$ , si ha che  $B(x_1, r) \subseteq B(x_0, \rho)$ ; infatti, se  $x \in B(x_1, r)$ , allora

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < r + d(x_1, x_0) \leq \rho,$$

per cui  $x \in B(x_0, \rho)$ . Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto  $x_1$  di  $B(x_0, \rho)$  è interno a  $B(x_0, \rho)$ . ■

## Lezione 9 del 24/10/2016:

### Spazi metrici - continuazione

Diremo che il punto  $x_0$  è “aderente” all’insieme  $U$  se per ogni  $\rho > 0$  si ha che  $B(x_0, \rho) \cap U \neq \emptyset$ . L’insieme dei punti aderenti ad  $U$  si chiama “la chiusura” di  $U$  e si denota con  $\overline{U}$ . Chiaramente, si ha sempre  $U \subseteq \overline{U}$ . Si dice che  $U$  è un “insieme chiuso” se coincide con la sua chiusura, ossia se  $U = \overline{U}$ .

**Teorema.** *Una palla chiusa è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia  $\overline{B}(x_0, \rho)$  la palla in questione; prendiamo un  $x_1 \notin \overline{B}(x_0, \rho)$ . Scelto  $r > 0$  tale che  $r \leq d(x_0, x_1) - \rho$ , si ha che  $B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho) = \emptyset$ ; infatti, se per assurdo esistesse un  $x \in B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho)$ , allora si avrebbe

$$d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x) + d(x, x_1) < r + \rho,$$

in contrasto con la scelta fatta per  $r$ . Quindi, nessun punto  $x_1$  al di fuori di  $\overline{B}(x_0, \rho)$  può essere aderente a  $\overline{B}(x_0, \rho)$ . In altri termini,  $\overline{B}(x_0, \rho)$  contiene tutti i punti ad essa aderenti. ■

Consideriamo ora tre esempi particolari: nel primo, l’insieme  $U$  coincide con  $E$ ; nel secondo,  $U$  è l’insieme vuoto; nel terzo, esso è costituito da un unico punto.

Ogni punto di  $E$  è interno all’insieme  $E$  stesso, in quanto ogni palla è per definizione contenuta in  $E$ . Quindi, l’interno di  $E$  coincide con tutto  $E$ , ossia  $\overset{\circ}{E} = E$ . Questo significa che  $E$  è un insieme aperto. Inoltre, essendo  $E$  il nostro insieme universo, ogni punto aderente ad  $E$  deve comunque appartenere ad  $E$  stesso. Quindi, la chiusura di  $E$  coincide con  $E$ , ossia  $\overline{E} = E$ . Questo significa che  $E$  è un insieme chiuso.

L’insieme vuoto non può avere punti interni. Quindi, l’interno di  $\emptyset$ , non avendo elementi, è vuoto. In altri termini,  $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$ , il che significa che  $\emptyset$  è anch’esso un insieme aperto. Notiamo inoltre che non esiste alcun punto aderente all’insieme  $\emptyset$ . Infatti, qualsiasi sia il punto  $x_0$ , per ogni  $\rho > 0$  si ha che  $B(x_0, \rho) \cap \emptyset = \emptyset$ . Quindi, la chiusura di  $\emptyset$ , non avendo elementi, è vuota. In altri termini,  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ , il che significa che  $\emptyset$  è un insieme chiuso.

L’insieme  $U = \{x_0\}$ , costituito da un unico punto, è sempre un insieme chiuso. Infatti, preso un  $x_1 \notin U$ , scegliendo  $\rho > 0$  tale che  $\rho < d(x_0, x_1)$  si ha che  $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$ , per cui  $x_1$  non è aderente ad  $U$ . In generale  $U$  non è un insieme aperto (ad esempio in  $\mathbb{R}^N$  con la distanza euclidea), ma può esserlo in casi particolari (ad esempio, se si considera la distanza  $\hat{d}$ , ossia quando  $x_0$  è un punto isolato di  $E$ ).

**Teorema.** *L’interno di un insieme è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Se  $\overset{\circ}{U}$  è vuoto, la tesi è sicuramente vera. Supponiamo allora che  $\overset{\circ}{U}$  sia non vuoto. Sia  $x_1 \in \overset{\circ}{U}$ . Allora esiste un  $\rho > 0$  tale che  $B(x_1, \rho) \subseteq U$ . Vogliamo vedere che  $B(x_1, \rho) \subseteq \overset{\circ}{U}$ . Preso  $x \in B(x_1, \rho)$ , essendo  $B(x_1, \rho)$  un insieme aperto, esso è un intorno di  $x$ ; siccome  $U$  contiene  $B(x_1, \rho)$ , anche  $U$  è un intorno di  $x$ , per cui  $x \in \overset{\circ}{U}$ . Ciò dimostra che  $B(x_1, \rho) \subseteq \overset{\circ}{U}$  e pertanto ogni punto  $x_1$  di  $\overset{\circ}{U}$  è interno a  $\overset{\circ}{U}$ . ■

**Teorema.** *La chiusura di un insieme è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Se  $\overline{U} = E$ , la tesi è verificata. Supponiamo quindi che sia  $\overline{U} \neq E$ . Sia  $x_1 \notin \overline{U}$ . Allora esiste un  $\rho > 0$  tale che  $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$ . Vediamo che anche  $B(x_1, \rho) \cap \overline{U} = \emptyset$ . Infatti, se per assurdo ci fosse un  $x \in B(x_1, \rho) \cap \overline{U}$ , essendo  $B(x_1, \rho)$  un insieme aperto, esisterebbe un  $r > 0$  tale che  $B(x, r) \subseteq B(x_1, \rho)$ . Siccome  $x \in \overline{U}$ , dovrebbe essere  $B(x, r) \cap U \neq \emptyset$  e quindi anche  $B(x_1, \rho) \cap U \neq \emptyset$ , in contraddizione con quanto sopra. Quindi, nessun punto  $x_1$  al di fuori di  $\overline{U}$  può essere aderente a  $\overline{U}$ . In altri termini,  $\overline{U}$  contiene tutti i punti ad esso aderenti. ■

Si può dimostrare la seguente implicazione:

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{U}_1 \subseteq \overset{\circ}{U}_2.$$

Da essa segue che  $\overset{\circ}{U}$  è il più grande insieme aperto contenuto in  $U$ : se  $A$  è un aperto e  $A \subseteq U$ , allora  $A \subseteq \overset{\circ}{U}$ .

Analogamente, si ha:

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_2.$$

Da questa segue che  $\overline{U}$  è il più piccolo insieme chiuso che contiene  $U$ : se  $C$  è un chiuso e  $C \supseteq U$ , allora  $C \supseteq \overline{U}$ .

Cercheremo ora di capire le analogie incontrate tra le nozioni di interno e chiusura di un insieme, e quelle di insieme aperto e chiuso.

**Teorema.** *Valgono le seguenti relazioni:* <sup>5</sup>

$$\overline{\overline{U}} = \overline{\overset{\circ}{U}}, \quad (\overset{\circ}{\overline{U}}) = \overline{\overset{\circ}{U}}.$$

Dimostrazione. Vediamo la prima uguaglianza. Se  $U = E$ , allora  $\overline{U} = \overset{\circ}{U} = E$ , per cui  $\overline{\overline{U}} = \overline{E} = E$  e  $\overline{\overset{\circ}{U}} = \overline{E} = E$ ; d'altra parte,  $\overline{\overline{U}} = \overline{E} = E$ , per cui  $\overline{\overline{U}} = \overline{E} = E$  e  $\overline{\overset{\circ}{U}} = \overline{E} = E$ . L'uguaglianza è così verificata in questo caso. Supponiamo ora che sia  $U \neq E$ , per cui  $\overline{U} \neq E$ . Si ha:

$$\begin{aligned} x \in \overline{\overline{U}} &\Leftrightarrow \forall \rho > 0 \quad B(x, \rho) \cap \overline{U} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall \rho > 0 \quad B(x, \rho) \not\subseteq U \\ &\Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{U} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{\overset{\circ}{U}}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Denotiamo con  $\overline{U}$  il complementare di  $U$  in  $E$ , ossia l'insieme  $E \setminus U$ .

Questo dimostra la prima uguaglianza. Possiamo ora usarla per dedurre la seguente:

$$\mathcal{C}(\mathring{C}U) = \overline{\mathcal{C}(CU)} = \overline{U}.$$

Passando ai complementari, si ottiene la seconda uguaglianza. ■

Abbiamo quindi che

$$\overline{U} = \mathcal{C}(\mathcal{C}\overline{U}) = \mathcal{C}(\mathring{C}U), \quad \mathring{U} = \mathcal{C}(\mathring{C}U) = \mathcal{C}(\overline{CU}).$$

Come immediato corollario, abbiamo il seguente.

**Teorema.** *Un insieme è aperto [chiuso] se e solo se il suo complementare è chiuso [aperto].*

Si definisce la “frontiera” di un insieme  $U$  come differenza tra la sua chiusura e il suo interno:

$$\partial U = \overline{U} \setminus \mathring{U}.$$

È bene essere prudenti su alcune conclusioni che possono esserci suggerite dalla nostra intuizione basata sulla distanza euclidea. Ad esempio, le uguaglianze

$$\overline{B(\mathbf{x}_0, \rho)} = \overline{B}(\mathbf{x}_0, \rho), \quad \partial B(\mathbf{x}_0, \rho) = S(\mathbf{x}_0, \rho).$$

valgono sicuramente in  $\mathbb{R}^N$  con la distanza euclidea, ma possono non valere in altri casi. Prendiamo ad esempio la distanza  $\hat{d}$  considerata sopra. Allora  $\overline{B(\mathbf{x}_0, 1)} = \{\mathbf{x}_0\}$ , che è un insieme chiuso, e  $\overline{B}(\mathbf{x}_0, 1) = E$  per cui  $\overline{B(\mathbf{x}_0, 1)} \neq \overline{B}(\mathbf{x}_0, 1)$ . Inoltre,  $\partial B(\mathbf{x}_0, 1) = \emptyset$ , mentre  $S(\mathbf{x}_0, 1) = E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ , per cui  $\partial B(\mathbf{x}_0, 1) \neq S(\mathbf{x}_0, 1)$ .

## Lezione 10 del 26/10/2016:

### Funzioni continue - I

Intuitivamente, una funzione  $f : A \rightarrow B$  è “continua” se  $f(x)$  varia gradualmente al variare di  $x$  nel dominio, cioè quando non si verificano variazioni brusche nei valori della funzione. Per rendere rigorosa questa idea intuitiva, sarà conveniente focalizzare la nostra attenzione fissando un  $x_0$  nel dominio  $A$  e provando a precisare cosa intendiamo per

$$f \text{ è “continua” in } x_0.$$

Procederemo per gradi.

**Primo tentativo.** *Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  quando si verifica la cosa seguente:*

$$\text{se } x \text{ è vicino a } x_0, \text{ allora } f(x) \text{ è vicino a } f(x_0).$$

Osserviamo subito che, sebbene l'idea di continuità vi sia già abbastanza ben formulata, la proposizione precedente non è una definizione accettabile, perché la parola “vicino”, che vi compare due volte, non ha un significato preciso. Innanzitutto, per poter misurare quanto vicino sia  $x$  a  $x_0$  e quanto vicino sia  $f(x)$  a  $f(x_0)$ , abbiamo bisogno di introdurre delle distanze. Più precisamente, dovremo supporre che il dominio e il codominio della funzione siano due spazi metrici.

Siano quindi  $E$  ed  $E'$  due spazi metrici, con le loro distanze  $d$  e  $d'$ , rispettivamente. Sia  $x_0$  un punto di  $E$  e  $f : E \rightarrow E'$  una funzione. Possiamo riformulare il tentativo di definizione precedente come segue.

**Secondo tentativo.** Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  quando si verifica la cosa seguente:

se la distanza  $d(x, x_0)$  è piccola, allora la distanza  $d'(f(x), f(x_0))$  è piccola.

Ci rendiamo subito conto che il problema riscontrato nel primo tentativo non è stato affatto risolto con questo secondo tentativo, in quanto vi compare ora per due volte la parola “piccola”, che non ha un significato preciso. Ci chiediamo allora: *quanto piccola* vogliamo che sia la distanza  $d'(f(x), f(x_0))$ ? L'idea che abbiamo in mente è che questa distanza possa essere resa piccola quanto si voglia (purché la distanza  $d(x, x_0)$  sia sufficientemente piccola, s'intende). Per poterla misurare, introdurremo quindi un numero reale positivo, che chiameremo  $\varepsilon$ , e chiederemo che sia  $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ , qualora  $d(x, x_0)$  sia sufficientemente piccola. L'arbitrarietà di tale  $\varepsilon$  ci permetterà di prenderlo piccolo quanto si voglia.

**Terzo tentativo.** Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero  $\varepsilon > 0$ ,

se la distanza  $d(x, x_0)$  è piccola, allora  $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

Adesso la parola “piccola” compare una sola volta, mentre la distanza  $d'(f(x), f(x_0))$  viene semplicemente controllata dal numero  $\varepsilon$ . Quindi, almeno la seconda parte della proposizione ha ora un significato ben preciso. Potremmo allora cercare di fare altrettanto con la distanza  $d(x, x_0)$ , introducendo un nuovo numero reale positivo, che chiameremo  $\delta$ , che la controlli.

**Quarto tentativo (quello buono!).** Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero  $\varepsilon > 0$ , è possibile trovare un numero  $\delta > 0$  per cui,

se  $d(x, x_0) < \delta$ , allora  $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .

Quest'ultima proposizione, a differenza delle precedenti, non presenta alcun termine impreciso. Le distanze  $d(x, x_0)$  e  $d'(f(x), f(x_0))$  sono semplicemente controllate da due numeri positivi  $\delta$  e  $\varepsilon$ , rispettivamente. Riscriviamola quindi in modo formale.

**Definizione.** Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  se, comunque preso un numero positivo  $\varepsilon$ , è possibile trovare un numero positivo  $\delta$  tale che, se  $x$  è un qualsiasi



elemento del dominio  $E$  che dista da  $x_0$  per meno di  $\delta$ , allora  $f(x)$  dista da  $f(x_0)$  per meno di  $\varepsilon$ . In simboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

In questa formulazione, spesso la scrittura “ $\forall x \in E$ ” verrà sottintesa.

Si può osservare che una o entrambe le disuguaglianze  $d(x, x_0) < \delta$  e  $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  possono essere sostituite da  $d(x, x_0) \leq \delta$  e  $d'(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$ , ottenendo definizioni che sono tutte tra loro equivalenti. Questo è dovuto al fatto, da un lato, che  $\varepsilon$  è un *qualunque* numero positivo e, dall'altro lato, che se l'implicazione della definizione vale per un certo numero positivo  $\delta$ , essa vale a maggior ragione prendendo al posto di quel  $\delta$  un qualsiasi numero positivo più piccolo.

Una rilettura della definizione di continuità ci mostra che  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

Inoltre, è del tutto equivalente considerare una palla chiusa al posto di una palla aperta; risulta inoltre utile la seguente formulazione equivalente, per cui  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se:

per ogni intorno  $V$  di  $f(x_0)$  esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che  $f(U) \subseteq V$ .

## Lezione 11 del 27/10/2016:

### Funzioni continue - II

Nel caso in cui la funzione  $f$  sia continua in ogni punto  $x_0$  del dominio  $E$ , diremo che “ $f$  è continua su  $E$ ”, o semplicemente “ $f$  è continua”.

Vediamo ora alcuni esempi.

1) La funzione costante: per un certo  $\bar{y} \in E'$ , si ha che  $f(x) = \bar{y}$ , per ogni  $x \in E$ . Essendo  $d'(f(x), f(x_0)) = 0$  per ogni  $x \in E$ , tale funzione è chiaramente continua (ogni scelta di  $\delta > 0$  va bene).

2) Supponiamo che  $x_0$  sia un “punto isolato” di  $E$ : esiste cioè un  $\rho > 0$  per cui non ci sono punti di  $E$  che distino da  $x_0$  per meno di  $\rho$ , tranne  $x_0$  stesso. Vediamo che, in questo caso, qualsiasi funzione  $f : E \rightarrow E'$  risulta continua in  $x_0$ . Infatti, dato  $\varepsilon > 0$  qualsiasi, prendendo  $\delta = \rho$ , avremo che  $B(x_0, \delta) = \{x_0\}$ , per cui  $f(B(x_0, \delta)) = \{f(x_0)\} \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ .

3) Siano  $E = \mathbb{R}^N$  ed  $E' = \mathbb{R}^N$ . Fissato un numero  $\alpha \in \mathbb{R}$ , consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita da  $f(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x}$ . Vediamo che è continua. Infatti, se  $\alpha = 0$ , si tratta della funzione costante con valore  $\mathbf{0}$ , e sappiamo che tale funzione è continua. Sia ora  $\alpha \neq 0$ . Allora, fissato  $\varepsilon > 0$ , essendo

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \|\alpha \mathbf{x} - \alpha \mathbf{x}_0\| = \|\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| = |\alpha| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|,$$

basta prendere  $\delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$  per avere l'implicazione

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

4) Siano  $E = \mathbb{R}^N$  ed  $E' = \mathbb{R}$ . Vediamo che la funzione  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$  è continua su  $\mathbb{R}^N$ . Questo seguirà facilmente dalla disuguaglianza

$$\left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}'\| \right| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|,$$

che ora dimostriamo. Si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}'\|, \\ \|\mathbf{x}'\| &= \|(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Essendo  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$ , si ha che

$$\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}'\| - \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|,$$

da cui la disuguaglianza cercata. A questo punto, considerato un  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$  e fissato un  $\varepsilon > 0$ , basta prendere  $\delta = \varepsilon$  per avere che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\| \right| < \varepsilon.$$

Enunciamo ora alcune proprietà delle funzioni continue.

**Teorema.** Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue in  $x_0$ , anche  $f + g$  lo è.

Dimostrazione. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Per la continuità di  $f$  e  $g$  esistono  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tali che

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \\ d(x, x_0) < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi, se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , si ha

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , ciò dimostra che  $f + g$  è continua in  $x_0$ . ■

**Teorema.** Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue in  $x_0$ , anche  $f \cdot g$  lo è.

Dimostrazione. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Non è restrittivo supporre  $\varepsilon \leq 1$ , in quanto possiamo sempre porre  $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, 1\}$  e procedere con  $\varepsilon'$  al posto di  $\varepsilon$ . Per la continuità di  $f$  e  $g$  esistono  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tali che

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \\ d(x, x_0) < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Notiamo che, essendo  $\varepsilon \leq 1$ , da  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  segue che  $|f(x)| < |f(x_0)| + 1$ . Quindi, se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , si ha

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta &\Rightarrow |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| = \\ &= |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ &\leq (|f(x_0)| + 1) \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ &< (|f(x_0)| + |g(x_0)| + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Data l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , ciò dimostra che  $f \cdot g$  è continua in  $x_0$ . ■

**Teorema.** Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue in  $x_0$ , anche  $f - g$  lo è.

Dimostrazione. Segue immediatamente dai due teoremi precedenti e dal fatto che ogni funzione costante è continua, in quanto  $f - g = f + (-1) \cdot g$ . ■

**Teorema (della permanenza del segno).** Se  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $x_0$  e  $g(x_0) > 0$ , allora esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > 0.$$

Dimostrazione. Fissiamo  $\varepsilon = g(x_0)$ . Per la continuità, esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon \Rightarrow 0 < g(x) < 2g(x_0).$$

■

Naturalmente, un analogo enunciato vale se  $g(x_0) < 0$ .

**Teorema.** Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue in  $x_0$  e  $g(x_0) \neq 0$ , anche  $\frac{f}{g}$  è continua in  $x_0$ .

Dimostrazione. Si noti che, per la proprietà di permanenza del segno, esiste un  $\rho > 0$  tale che il rapporto  $\frac{f(x)}{g(x)}$  è definito almeno per tutti gli  $x$  di  $E$  che distano da  $x_0$  per meno di  $\rho$ . Essendo  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ , basterà dimostrare che  $\frac{1}{g}$  è continua in  $x_0$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ ; possiamo supporre senza perdita di generalità che  $\varepsilon < \frac{|g(x_0)|}{2}$ . Per la continuità di  $g$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Ma allora, essendo  $\varepsilon < \frac{|g(x_0)|}{2}$ , anche

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |g(x)| > |g(x_0)| - \varepsilon > \frac{|g(x_0)|}{2}.$$

Ne segue che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0) \right| = \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)g(x_0)|} < \frac{2}{|g(x_0)|^2} \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , questo dimostra che  $\frac{1}{g}$  è continua in  $x_0$ . ■

Consideriamo il caso in cui  $E = \mathbb{R}$  ed  $E' = \mathbb{R}$ . Sappiamo da quanto sopra che le funzioni costanti sono continue, così come la funzione  $f(x) = x$ . Usando i teoremi precedenti, abbiamo quindi che tutte le funzioni polinomiali sono continue, così come le funzioni razionali, definite dal rapporto di due polinomi. Più precisamente, esse sono continue sul loro dominio, ossia sull'insieme dei punti in cui il denominatore non si annulla.

Vediamo ora come si comporta una funzione composta di due funzioni continue.

**Teorema.** *Siano  $f : E \rightarrow E'$  continua in  $x_0$  e  $g : E' \rightarrow E''$  continua in  $f(x_0)$ ; allora  $g \circ f$  è continua in  $x_0$ .*

Dimostrazione. Fissato un intorno  $W$  di  $[g \circ f](x_0) = g(f(x_0))$ , per la continuità di  $g$  in  $f(x_0)$  esiste un intorno  $V$  di  $f(x_0)$  tale che  $g(V) \subseteq W$ . Allora, per la continuità di  $f$  in  $x_0$ , esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che  $f(U) \subseteq V$ . Ne segue che  $[g \circ f](U) \subseteq W$ . ■

## Lezione 12 del 07/11/2016:

### Funzioni continue - III

È molto importante la seguente proprietà delle funzioni continue.

**Teorema (degli zeri).** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua tale che*

$$f(a) < 0 < f(b) \quad \text{oppure} \quad f(a) > 0 > f(b),$$

*allora esiste un  $c \in ]a, b[$  tale che  $f(c) = 0$ .*

Dimostrazione. Considereremo il caso  $f(a) < 0 < f(b)$ , essendo l'altro del tutto analogo. Scriviamo  $I_0 = [a, b]$  e consideriamo il punto medio  $\frac{a+b}{2}$  dell'intervallo  $I_0$ . Se  $f$  si annulla in esso, abbiamo trovato il punto  $c$  cercato. Altrimenti,  $f(\frac{a+b}{2}) < 0$  o  $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ . Se  $f(\frac{a+b}{2}) < 0$ , chiamiamo  $I_1$  l'intervallo  $[\frac{a+b}{2}, b]$ ; se  $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ , chiamiamo invece  $I_1$  l'intervallo  $[a, \frac{a+b}{2}]$ . Prendendo ora il punto medio di  $I_1$  e ripetendo il ragionamento, possiamo definire un intervallo  $I_2$  e, per ricorrenza, una successione di intervalli  $I_n = [a_n, b_n]$  tali che

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

e, per ogni  $n$ ,  $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ . Per il teorema di Cantor, esiste un  $c \in \mathbb{R}$  appartenente a tutti gli intervalli. Dimostriamo che  $f(c) = 0$ . Per assurdo, se  $f(c) < 0$ , per la permanenza del segno esiste un  $\delta > 0$  tale che  $f(x) < 0$  per ogni  $x \in ]c - \delta, c + \delta[$ . Ma siccome  $b_n - c \leq b_n - a_n$  e, per  $n \geq 1$ ,  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n}$ , prendendo  $n > \frac{b-a}{\delta}$  si ha che  $b_n \in ]c - \delta, c + \delta[$ . Ma allora dovrebbe essere  $f(b_n) < 0$ , in contraddizione con quanto sopra. Un ragionamento analogo porta a una contraddizione supponendo  $f(c) > 0$ . ■

Come conseguenza del teorema degli zeri, abbiamo che una funzione continua “manda intervalli in intervalli”:

**Corollario.** Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Se  $I \subseteq E$  è un intervallo, allora anche  $f(I)$  è un intervallo.

Dimostrazione. Escludendo i casi banali in cui  $I$  o  $f(I)$  consistono di un unico punto, prendiamo  $\alpha, \beta \in f(I)$ , con  $\alpha < \beta$  e sia  $\gamma$  tale che  $\alpha < \gamma < \beta$ . Vogliamo vedere che  $\gamma \in f(I)$ . Consideriamo la funzione  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(x) = f(x) - \gamma.$$

Siano  $a, b$  in  $I$  tali che  $f(a) = \alpha$  e  $f(b) = \beta$ . Essendo  $I$  un intervallo, la funzione  $g$  è definita su  $[a, b]$  (o  $[b, a]$ , nel caso in cui  $b < a$ ) ed è ivi continua. Inoltre,  $g(a) < 0 < g(b)$  e quindi, per il teorema degli zeri, esiste un  $c \in ]a, b[$  tale che  $g(c) = 0$ , ossia  $f(c) = \gamma$ . ■

Consideriamo ora, per ogni  $k = 1, 2, \dots, N$ , la funzione “ $k$ -esima proiezione”  $p_k : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_N) = x_k.$$

**Teorema.** Le funzioni  $p_k$  sono continue.

Dimostrazione. Consideriamo un punto  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \in \mathbb{R}^N$  e fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Notiamo che si ha

$$|x_k - x_k^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^N (x_j - x_j^0)^2} = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0),$$

per cui, prendendo  $\delta = \varepsilon$ , si ha:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow |p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{x}_0)| = |x_k - x_k^0| < \varepsilon.$$

■

Supponiamo ora  $f : E \rightarrow E'$  con  $E' = \mathbb{R}^M$ . Consideriamo le “componenti” della funzione  $f$  definite da  $f_k = p_k \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $k = 1, 2, \dots, M$ , per cui si ha

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)).$$

**Teorema.** La funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se lo sono tutte le sue componenti.

Dimostrazione. Se  $f$  è continua in  $x_0$ , lo sono anche le  $f_k$  in quanto composte di funzioni continue. Viceversa, supponiamo che le componenti di  $f$  siano tutte continue in  $x_0$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , per ogni  $k = 1, 2, \dots, M$  esiste un  $\delta_k > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon.$$

Posto  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M\}$ , si ha

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^M (f_j(x) - f_j(x_0))^2} < \sqrt{M}\varepsilon,$$

il che, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , completa la dimostrazione. ■

**Teorema.** Ogni applicazione lineare  $\ell : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  è continua.

Dimostrazione. Osserviamo che, essendo le proiezioni  $p_k$  lineari, le componenti  $\ell_k = p_k \circ \ell$  dell'applicazione lineare  $\ell$  sono anch'esse lineari. Consideriamo la base canonica  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N)$  di  $\mathbb{R}^N$ , con

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_N &= (0, 0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

Ogni vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  si può scrivere come

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_N\mathbf{e}_N = p_1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + p_2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + \dots + p_N(\mathbf{x})\mathbf{e}_N.$$

Quindi, per ogni  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ ,

$$\ell_k(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x})\ell_k(\mathbf{e}_1) + p_2(\mathbf{x})\ell_k(\mathbf{e}_2) + \dots + p_N(\mathbf{x})\ell_k(\mathbf{e}_N),$$

per cui  $\ell_k$  risulta essere combinazione lineare delle proiezioni  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Essendo queste ultime continue, anche  $\ell_k$  è continua. Avendo tutte le componenti continue,  $\ell$  è pertanto continua. ■

## Lezione 13 del 09/11/2016:

### La funzione esponenziale

Indichiamo con  $\mathbb{R}_P$  l'insieme dei numeri reali positivi:

$$\mathbb{R}_P = ]0, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Enunciamo senza dimostrare il seguente risultato.

**Teorema.** Dato  $a > 0$ , esiste un'unica funzione continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_P$  tale che, per ogni  $x_1, x_2$ ,

$$(i) f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2),$$

$$(ii) f(1) = a.$$

Se inoltre  $a \neq 1$ , tale funzione è invertibile.

La funzione  $f$  si chiama “esponenziale di base  $a$ ” e si denota con  $\exp_a$ . Se  $a \neq 1$ , la funzione inversa  $f^{-1} : \mathbb{R}_P \rightarrow \mathbb{R}$  si chiama “logaritmo di base  $a$ ” e si denota con  $\log_a$ . Si ha quindi, per  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}_P$ ,

$$\exp_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(y).$$

Dalle proprietà dell'esponenziale

$$(i) \exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1)\exp_a(x_2),$$

$$(ii) \exp_a(1) = a,$$

seguono le corrispondenti proprietà del logaritmo

$$(i') \log_a(y_1 y_2) = \log_a(y_1) + \log_a(y_2),$$

$$(ii') \log_a(a) = 1.$$

Siccome la funzione costante  $f(x) = 1$  verifica a) e b) con  $a = 1$ , si ha che  $f = \exp_1$ ; in altri termini,  $\exp_1(x) = 1$  per ogni  $x$ .

Vediamo ora alcune proprietà della funzione esponenziale. Notiamo che  $\exp_a(1) = a^1$ ,

$$\exp_a(2) = \exp_a(1 + 1) = \exp_a(1) \exp_a(1) = a \cdot a = a^2,$$

e, come si può vedere per induzione,

$$\exp_a(n) = a^n,$$

per ogni  $n \geq 1$ . Inoltre, siccome  $\exp_a(1) = \exp_a(1+0) = \exp_a(1) \exp_a(0)$ , si ha che  $\exp_a(0) = 1$ . Per queste analogie con le potenze, spesso si scrive  $a^x$  invece di  $\exp_a(x)$ .

Se scriviamo

$$a = \exp_a(1) = \exp_a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \exp_a\left(\frac{1}{2}\right) \exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2,$$

si vede che, essendo l'esponenziale positivo,

$$\exp_a\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{a}.$$

Si verifica poi per induzione che, per ogni  $n \geq 1$ ,

$$\exp_a(nx) = (\exp_a(x))^n,$$

e in particolare

$$a = \exp_a(1) = \exp_a\left(n \frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

Pertanto,  $\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)$  risolve l'equazione  $x^n = a$ . Tale  $x$  è la "radice  $n$ -esima di  $a$ " e si scrive  $x = \sqrt[n]{a}$ : si ha quindi

$$\exp_a\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a},$$

e pertanto, se  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \exp_a\left(m \frac{1}{n}\right) = \left(\exp_a\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Notiamo che, se  $b = \sqrt[n]{a}$ , si ha  $a^m = (b^n)^m = b^{nm} = (b^m)^n$ , da cui  $b^m = \sqrt[n]{a^m}$ . Possiamo quindi anche scrivere

$$\exp_a\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{a^m}.$$

Scrivendo

$$1 = \exp_a(0) = \exp_a(x - x) = \exp_a(x) \exp_a(-x),$$

vediamo che vale inoltre la formula

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}.$$

Enunciamo infine le seguenti tre proprietà dell'esponenziale:

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x}, \quad (a^y)^x = a^{yx}.$$

La prima segue dal fatto che la funzione  $f(x) = a^x b^x$  verifica la proprietà (i) e  $f(1) = ab$ , per cui  $f = \exp_{ab}$ . La seconda è analoga, prendendo  $f(x) = \frac{1}{a^x}$ ; per la terza, si prenda  $f(x) = a^{yx}$ .

Concludiamo con due utili proprietà del logaritmo:

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x), \quad \log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Verifichiamo la prima: poniamo  $u = \log_a(x^y)$  e  $v = \log_a(x)$ . Allora  $a^u = x^y$  e  $a^v = x$ , da cui  $a^u = (a^v)^y = a^{vy}$ . Ne segue che  $u = vy$ , che è quanto volevasi dimostrare. Un procedimento analogo permette di verificare anche la seconda.

Ci chiediamo ora se la funzione logaritmo è anch'essa continua. Per arrivare alla risposta, abbiamo dapprima bisogno di introdurre le seguenti nozioni.

Diremo che una funzione  $f$  è:

“crescente” se  $[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)]$ ;

“decrescente” se  $[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)]$ ;

“strettamente crescente” se  $[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$ ;

“strettamente decrescente” se  $[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$ .

Diremo che è “monotona” se è crescente o decrescente; “strettamente monotona” se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

**Esempio.** La funzione  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^n$  è strettamente crescente. Il caso  $n = 2$  è stato stabilito nel Lemma della Lezione 5. Il caso generale si vede per induzione.

**Teorema.** Siano  $I$  e  $J$  due intervalli e  $f : I \rightarrow J$  una funzione invertibile. Allora

$$f \text{ è continua} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ è strettamente monotona}.$$

In tal caso, anche  $f^{-1} : J \rightarrow I$  è strettamente monotona e continua.

Dimostrazione. Supponiamo  $f$  continua e, per assurdo, non strettamente monotona. Allora esistono  $x_1 < x_2 < x_3$  in  $I$  tali che

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) > f(x_3),$$



oppure

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) < f(x_3).$$

(Le uguaglianze non possono valere, essendo la funzione  $f$  iniettiva.) Consideriamo il primo caso, l'altro essendo analogo. Scegliendo  $\gamma \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$  e  $f(x_2) > \gamma > f(x_3)$ , per il corollario al teorema degli zeri si trova che esistono  $a \in ]x_1, x_2[$  e  $b \in ]x_2, x_3[$  tali che  $f(a) = \gamma = f(b)$ , in contraddizione con l'iniettività di  $f$ .

Supponiamo ora  $f$  strettamente monotona, ad esempio crescente: l'altro caso è del tutto analogo. Preso  $x_0 \in I$ , vogliamo dimostrare che  $f$  è continua in  $x_0$ . Considereremo due casi distinti.

Supponiamo dapprima che  $x_0$  non sia un estremo di  $I$ , e pertanto  $y_0 = f(x_0)$  non sia un estremo di  $J$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ ; possiamo supporre senza perdita di generalità che  $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subseteq J$ . Poniamo  $x_1 = f^{-1}(y_0 - \varepsilon)$  e  $x_2 = f^{-1}(y_0 + \varepsilon)$ , per cui  $x_1 < x_0 < x_2$ . Essendo  $f(x_1) = f(x_0) - \varepsilon$  e  $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$ , prendendo  $\delta = \min\{x_0 - x_1, x_2 - x_0\}$ , si ha

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow x_1 < x < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x) < f(x_2) \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

per cui  $f$  è continua in  $x_0$ .

Consideriamo ora l'eventualità che  $x_0 = \min I$  e quindi  $y_0 = \min J$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ ; possiamo supporre senza perdita di generalità che  $[y_0, y_0 + \varepsilon] \subseteq J$ . Poniamo come sopra  $x_2 = f^{-1}(y_0 + \varepsilon)$ . Essendo  $f(x_2) = f(x_0) + \varepsilon$ , prendendo  $\delta = x_2 - x_0$ , si ha (per ogni  $x \in I$ )

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow x_0 < x < x_2 \Rightarrow f(x_0) < f(x) < f(x_2) \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

per cui  $f$  è continua in  $x_0$ . Il caso eventuale in cui  $x_0 = \max I$  si tratta in modo analogo.

Infine, si può vedere che

$$\begin{aligned} f \text{ strettamente crescente} &\Rightarrow f^{-1} \text{ strettamente crescente,} \\ f \text{ strettamente decrescente} &\Rightarrow f^{-1} \text{ strettamente decrescente.} \end{aligned}$$

Quindi, se  $f$  è strettamente monotona, anche  $f^{-1}$  lo è, e pertanto è anche continua. ■

**Esempi.** 1) La funzione esponenziale  $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_P$ , con  $a \neq 1$ , essendo continua e invertibile, è strettamente monotona. Siccome  $\exp_a(0) = 1$  e  $\exp_a(1) = a$ , avremo che

$$\exp_a \text{ è : } \begin{cases} \text{strettamente crescente} & \text{se } a > 1; \\ \text{strettamente decrescente} & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Lo stesso dicasi per il logaritmo  $\log_a$ .

2) La funzione  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  definita da  $f(x) = x^n$  è invertibile. La sua inversa  $f^{-1} : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  è la radice  $n$ -esima,  $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$ . Per quanto visto sopra, essa è continua.

## Lezione 14 del 10/11/2016:

### Le funzioni trigonometriche

Vogliamo ora introdurre le funzioni trigonometriche, in un modo analogo a quanto fatto per la funzione esponenziale.

Dato  $T > 0$ , una funzione  $F : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  (qui  $\Omega$  è un insieme qualsiasi) si dice “periodica di periodo  $T$ ” se

$$F(x + T) = F(x),$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Chiaramente, se  $T$  è un periodo per la funzione  $F$ , anche  $2T, 3T, \dots$  lo sono. Diremo che  $T$  è il “periodo minimo” se non ci sono periodi più piccoli. Introduciamo l’insieme

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Si tratta della circonferenza centrata nell’origine, di raggio 1, pensata come sottoinsieme del campo complesso. Enunciamo senza dimostrare il seguente risultato.

**Teorema.** Dato  $T > 0$ , esiste un’unica funzione  $h_T : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , continua e periodica di periodo minimo  $T$ , tale che, per ogni  $x_1, x_2$ ,

$$(j) \quad h_T(x_1 + x_2) = h_T(x_1)h_T(x_2),$$

$$(jj) \quad h_T\left(\frac{T}{4}\right) = i.$$

La funzione  $h_T$  si chiama “funzione circolare di base  $T$ ”. Pensando al codominio  $S^1$  come sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , la funzione  $h_T$  ha due componenti, che denotiamo con  $\cos_T$  e  $\sin_T$ : sono il “coseno di base  $T$ ” e il “seno di base  $T$ ”, rispettivamente. Scriveremo quindi

$$h_T(x) = (\cos_T(x), \sin_T(x)), \quad \text{oppure} \quad h_T(x) = \cos_T(x) + i \sin_T(x),$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Tali funzioni sono continue e periodiche di periodo  $T$ , e dalle proprietà della funzione circolare ricaviamo le seguenti:

$$(a) \quad (\cos_T(x))^2 + (\sin_T(x))^2 = 1,$$

$$(b) \quad \cos_T(x_1 + x_2) = \cos_T(x_1)\cos_T(x_2) - \sin_T(x_1)\sin_T(x_2),$$

$$(c) \quad \sin_T(x_1 + x_2) = \sin_T(x_1)\cos_T(x_2) + \cos_T(x_1)\sin_T(x_2),$$

$$(d) \quad \cos_T\left(\frac{T}{4}\right) = 0, \quad \sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1.$$

Concentriamo ora l’attenzione sull’intervallo  $[0, T[$ . Scrivendo

$$i = h_T\left(\frac{T}{4}\right) = h_T\left(0 + \frac{T}{4}\right) = h_T(0)h_T\left(\frac{T}{4}\right) = h_T(0)i,$$

ne ricaviamo che  $h_T(0) = 1$ . Inoltre,

$$h_T\left(\frac{T}{2}\right) = h_T\left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) = h_T\left(\frac{T}{4}\right)h_T\left(\frac{T}{4}\right) = i^2 = -1,$$

mentre

$$h_T\left(\frac{3T}{4}\right) = h_T\left(\frac{T}{2} + \frac{T}{4}\right) = h_T\left(\frac{T}{2}\right)h_T\left(\frac{T}{4}\right) = (-1)i = -i,$$

Riassumendo:

$$\begin{aligned} \cos_T(0) &= 1, & \sin_T(0) &= 0, \\ \cos_T\left(\frac{T}{4}\right) &= 0, & \sin_T\left(\frac{T}{4}\right) &= 1, \\ \cos_T\left(\frac{T}{2}\right) &= -1, & \sin_T\left(\frac{T}{2}\right) &= 0, \\ \cos_T\left(\frac{3T}{4}\right) &= 0, & \sin_T\left(\frac{3T}{4}\right) &= -1. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, dalla

$$1 = h_T(0) = h_T(x - x) = h_T(x)h_T(-x),$$

abbiamo che  $h_T(-x) = h_T(x)^{-1} = h_T(x)^*$ , essendo  $|h_T(x)| = 1$ . Quindi,

$$\cos_T(-x) = \cos_T(x), \quad \sin_T(-x) = -\sin_T(x),$$

ossia la funzione  $\cos_T$  è pari, mentre  $\sin_T$  è dispari.

Dimostriamo ora che  $\tilde{h}_T : [0, T[ \rightarrow S^1$ , la restrizione della funzione circolare  $h_T$  all'intervallo  $[0, T[$ , è biiettiva. Vediamo dapprima l'iniettività. Siano  $\alpha < \beta$  in  $[0, T[$ . Se per assurdo fosse  $h_T(\alpha) = h_T(\beta)$ , si avrebbe che

$$h_T(\beta - \alpha) = h_T(\beta)h_T(-\alpha) = \frac{h_T(\beta)}{h_T(\alpha)} = 1.$$

Ma allora

$$h_T(x + (\beta - \alpha)) = h_T(x)h_T(\beta - \alpha) = h_T(x),$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , per cui  $\beta - \alpha$  sarebbe un periodo di  $h_T$  minore di  $T$ , mentre sappiamo che  $T$  è il periodo minimo.

Vediamo ora che

$$\cos_T(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{4} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{4} < x < \frac{3T}{4} \\ > 0 & \text{se } \frac{3T}{4} < x < T \end{cases}, \quad \sin_T(x) \begin{cases} > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{T}{2} \\ < 0 & \text{se } \frac{T}{2} < x < T \end{cases}.$$

Ad esempio, per  $x \in ]0, \frac{T}{2}[$ , non si può certamente avere  $\sin_T(x) = 0$ , perchè altrimenti i valori in  $x$  di  $\cos_T$ ,  $\sin_T$  coinciderebbero con i valori in 0 o in  $\frac{T}{2}$ , mentre abbiamo visto che, se per  $\alpha, \beta \in [0, T[$  si ha  $\cos_T(\alpha) = \cos_T(\beta)$  e  $\sin_T(\alpha) = \sin_T(\beta)$ , allora  $\alpha = \beta$ . Pertanto, per la continuità,  $\sin_T$  dovrà essere sempre positiva o sempre negativa in  $]0, \frac{T}{2}[$  (teorema degli zeri). Essendo  $\sin_T\left(\frac{T}{4}\right) = 1$ , deve essere sempre positiva.

Per concludere, dimostriamo che  $\tilde{h}_T$  è suriettiva (abbiamo già dimostrato prima che è iniettiva). Prendiamo un punto  $P = (X_1, X_2) \in S^1$ . Si ha che  $X_1 \in [-1, 1]$ . I due casi in cui  $X_1 = -1$  o  $X_1 = 1$  si trattano immediatamente, essendo  $h_T\left(\frac{T}{2}\right) = (-1, 0)$  e  $h_T(0) = (1, 0)$ . Supponiamo quindi che sia  $X_1 \in ]-1, 1[$ . Sappiamo che  $\cos_T\left(\frac{T}{2}\right) = -1$ ,  $\cos_T(0) = 1$  e che  $\cos_T$  è una funzione continua e  $T$ -periodica. Per il corollario al teorema degli zeri, esiste un  $\bar{x} \in ]0, \frac{T}{2}[$  tale che  $\cos_T(\bar{x}) = X_1$ . Allora

$$|\sin_T(\bar{x})| = \sqrt{1 - (\cos_T(\bar{x}))^2} = \sqrt{1 - X_1^2} = |X_2|.$$

Abbiamo due possibilità: o  $\sin_T(\bar{x}) = X_2$ , per cui  $h_T(\bar{x}) = P$ , oppure  $\sin_T(\bar{x}) = -X_2$ , nel qual caso

$$h_T(T - \bar{x}) = h_T(-\bar{x}) = h_T(\bar{x})^* = (X_1, X_2) = P.$$

Essendo  $T - \bar{x} \in ]\frac{T}{2}, T[$ , ciò mostra che  $\tilde{h}_T$  è suriettiva.

## Lezione 15 del 14/11/2016:

### Altri esempi di funzioni continue e non

Definiamo la funzione “tangente di base  $T$ ”:

$$\tan_T(x) = \frac{\sin_T(x)}{\cos_T(x)}.$$

Il suo dominio naturale è l'insieme  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{T}{4} + k\frac{T}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ . Essendo seno e coseno funzioni continue, anche la tangente lo è (sul suo dominio). Inoltre, essa è periodica: il suo periodo minimo è  $\frac{T}{2}$ .

Sono interessanti le “funzioni iperboliche”:

$$\cosh_a(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, \quad \sinh_a(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2},$$

con  $a > 0$  fissato. Esse soddisfano le seguenti proprietà, di facile verifica:

- a)  $(\cosh_a(x))^2 - (\sinh_a(x))^2 = 1$ ,
- b)  $\cosh_a(x_1 + x_2) = \cosh_a(x_1)\cosh_a(x_2) + \sinh_a(x_1)\sinh_a(x_2)$ ,
- c)  $\sinh_a(x_1 + x_2) = \sinh_a(x_1)\cosh_a(x_2) + \cosh_a(x_1)\sinh_a(x_2)$ .

Ricordiamo qui le analoghe proprietà delle funzioni trigonometriche:

- a)  $(\cos_T(x))^2 + (\sin_T(x))^2 = 1$ ,
- b)  $\cos_T(x_1 + x_2) = \cos_T(x_1)\cos_T(x_2) - \sin_T(x_1)\sin_T(x_2)$ ,
- c)  $\sin_T(x_1 + x_2) = \sin_T(x_1)\cos_T(x_2) + \cos_T(x_1)\sin_T(x_2)$ .

Queste analogie non sono affatto casuali. Per comprendere lo stretto legame che intercorre tra le funzioni iperboliche e le funzioni trigonometriche, bisogna addentrarsi nel mondo dei “numeri complessi”, e definire la cosiddetta funzione “esponenziale complessa”, cosa che verrà fatta in un corso successivo.

Analogamente a quanto visto sopra, si definisce la funzione “tangente iperbolica”:

$$\tanh_a(x) = \frac{\sinh_a(x)}{\cosh_a(x)}.$$

Essa è definita su tutto  $\mathbb{R}$ , ed è ivi continua.

Vediamo ancora alcuni esempi, di funzioni continue e non. Cominciamo con la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin_T\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Se  $x_0 \neq 0$ , la funzione  $f$  è continua in  $x_0$ , essendo composizione di funzioni continue. Se invece  $x_0 = 0$ , essa non è continua in  $x_0$ , perchè in ogni intorno di 0 ci sono valori di  $x$  per cui  $f(x) = 1$ , mentre  $f(0) = 0$ .

Modifichiamo ora la funzione precedente e consideriamo la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin_T\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Questa funzione è continua su tutto  $\mathbb{R}$ . Infatti, se  $x_0 \neq 0$  la situazione è simile alla precedente. Se invece  $x_0 = 0$ , è utile osservare che

$$|f(x)| \leq |x|, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Ecco allora che, fissato  $\varepsilon > 0$ , basta prendere  $\delta = \varepsilon$  per avere che

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

Per concludere, introduciamo una funzione davvero sorprendente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{se } x = \frac{m}{n}. \end{cases}$$

(Qui e in seguito la frazione  $\frac{m}{n}$  si suppone non semplificabile.) Dimostriamo che la funzione  $f$  è continua in tutti i punti  $x_0$  irrazionali, mentre non è continua se  $x_0$  è razionale.

Se  $x_0$  è razionale, allora  $f(x_0) > 0$ . Se per assurdo  $f$  fosse continua in  $x_0$ , per il teorema della permanenza del segno essa dovrebbe essere positiva su tutto un intorno di  $x_0$ , il che non è vero perchè in ogni intorno di  $x_0$  ci sono degli  $x$  irrazionali in cui  $f(x) = 0$ .

Se  $x_0$  è irrazionale, allora  $f(x_0) = 0$ . Fissiamo un  $\varepsilon > 0$  e troviamo un intero  $n_\varepsilon > 1/\varepsilon$ . Consideriamo ora tutti i numeri razionali aventi denominatore uguale a  $1, 2, \dots, n_\varepsilon - 1$ . Per ciascuno di questi denominatori, c'è un razionale che precede  $x_0$  e uno che lo segue. In altre parole, per ogni  $\bar{n} \in \{1, 2, \dots, n_\varepsilon - 1\}$  esiste un  $\bar{m}$  per cui  $\bar{m}/\bar{n} < x_0 < (\bar{m} + 1)/\bar{n}$ . Pertanto, per ciascuno di questi c'è una distanza minima da  $x_0$ , ossia

$$\min \left\{ x_0 - \frac{\bar{m}}{\bar{n}}, \frac{\bar{m} + 1}{\bar{n}} - x_0 \right\}.$$

Prendiamo  $\delta$  uguale alla più piccola di tutte queste distanze, che sono in numero finito. Se  $d(x, x_0) < \delta$ , allora o  $x$  è irrazionale, per cui  $f(x) = 0$ , oppure  $x$  è razionale, ossia  $x = m/n$ , e deve essere  $n \geq n_\varepsilon$ ; in ogni caso, si ha che

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Questo dimostra che  $f$  è continua in  $x_0$ .

## Lezione 16 del 16/11/2016:

### La nozione di limite

Consideriamo due spazi metrici  $E, E'$ , un punto  $x_0$  di  $E$  e una funzione

$$f : E \rightarrow E', \quad \text{oppure} \quad f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow E',$$

non necessariamente definita in  $x_0$ .

**Definizione.** Se esiste un  $l \in E'$  tale che la funzione  $\tilde{f} : E \rightarrow E'$ , definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ l & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

risulti continua in  $x_0$ , si dice che  $l$  è il “limite di  $f$  in  $x_0$ ”, o anche “limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$ ” e si scrive

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

In altri termini, si ha che  $l$  è il limite di  $f$  in  $x_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon,$$

o equivalentemente,

$$\forall V, \text{ intorno di } l \quad \exists U, \text{ intorno di } x_0 : f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V.$$

Talvolta si scrive anche  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow x_0$ .

Sappiamo che, se  $x_0$  è un punto isolato, ogni funzione risulterà continua in  $x_0$ . Il problema non presenta pertanto alcun interesse in questo caso. Supporremo quindi che  $x_0$  non sia un punto isolato, ossia che  $x_0$  sia un “punto di accumulazione” di  $E$ : ogni intorno di  $x_0$  contiene punti di  $E$  distinti da  $x_0$  stesso. Nel seguito, supporremo sempre che  $x_0$  sia un punto di accumulazione di  $E$ .

Per cominciare, verifichiamo l’unicità del limite.

**Teorema.** Se esiste, il limite di  $f$  in  $x_0$  è unico.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ce ne siano due diversi,  $l$  e  $l'$ . Prendiamo  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(l, l')$ . Allora esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon,$$

ed esiste un  $\delta' > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta' \Rightarrow d(f(x), l') < \varepsilon.$$

Sia  $x \neq x_0$  tale che  $d(x, x_0) < \delta$  e  $d(x, x_0) < \delta'$  (tale  $x$  esiste perché  $x_0$  è di accumulazione). Allora

$$d(l', l) \leq d(l, f(x)) + d(f(x), l') < 2\varepsilon = d(l', l),$$

una contraddizione. ■

Il seguente teorema è una riformulazione del legame stretto che intercorre tra i concetti di limite e di continuità.

**Teorema.** Considerata la funzione  $f : E \rightarrow E'$ , si ha che

$$f \text{ è continua in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dimostrazione. In questo caso, si ha che la funzione  $\tilde{f}$  coincide con  $f$ . ■

Iniziamo a vedere le proprietà dei limiti che vengono direttamente ereditate dalle funzioni continue. Nei due teoremi seguenti, con relativo corollario, le funzioni  $f$  e  $g$  sono definite su  $E$  o su  $E \setminus \{x_0\}$ , indifferentemente, e hanno valori in  $E' = \mathbb{R}$ .

**Teorema (della permanenza del segno).** Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0,$$

allora esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > 0.$$

**Corollario.** Se  $g(x) \leq 0$  per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ , allora, qualora il limite esista, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0.$$

Naturalmente, si hanno enunciati analoghi qualora  $g$  sia di segno opposto.

**Teorema.** Se

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = l_1 l_2;$$

se  $l_2 \neq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Consideriamo ora una funzione composta  $g \circ f$ . Abbiamo due possibili situazioni.

**Teorema 1.** Sia  $f : E \rightarrow E'$ , oppure  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow E'$ , tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Se  $g : E' \rightarrow E''$  è continua in  $l$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(l).$$

In altri termini,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)).$$

Dimostrazione. Riguardando la definizione di limite, si ha che  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$  ivi definita è continua in  $x_0$  e  $g$  è continua in  $l = \tilde{f}(x_0)$ . Pertanto,  $g \circ \tilde{f}$  è continua in  $x_0$ , da cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(x_0)) = g(l).$$

■

**Teorema 2.** Sia  $f : E \rightarrow E'$ , oppure  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow E'$ , tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Supponiamo che  $l$  sia un punto di accumulazione di  $E'$  e che la funzione

$$g : E' \rightarrow E'', \quad \text{oppure} \quad g : E' \setminus \{l\} \rightarrow E'',$$

non necessariamente definita in  $l$ , sia tale che

$$\lim_{y \rightarrow l} g(y) = L.$$



Se  $f(x) \neq l$  per ogni  $x \in E \setminus \{x_0\}$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L.$$

Dimostrazione. Consideriamo nuovamente la funzione  $\tilde{f} : E \rightarrow E'$ , continua in  $x_0$  con  $\tilde{f}(x_0) = l$ . Analogamente, consideriamo la funzione  $\tilde{g} : E' \rightarrow E''$  così definita:

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} g(y) & \text{se } y \neq l, \\ L & \text{se } y = l. \end{cases}$$

Essa è continua in  $l$  con  $\tilde{g}(l) = L$ . Consideriamo la funzione composta  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ , che per quanto sopra è continua in  $x_0$  con  $\tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = \tilde{g}(l) = L$ . Essendo  $f(x) \neq l$  per ogni  $x$ , si ha che, per  $x \in E \setminus \{x_0\}$ ,

$$g(f(x)) = \tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)),$$

e pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = L.$$

■

Alcune considerazioni sull'ultimo teorema dimostrato. Si noti che la sua conclusione si riassume con la formula

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} g(y).$$

Spesso si dice che si è operato il “cambio di variabile  $y = f(x)$ ”. Riguardando inoltre le ipotesi dello stesso teorema, si vede subito che è sufficiente richiedere che sia  $f(x) \neq l$  per gli  $x$  tali che  $0 < d(x, x_0) < \delta$ . Ciò è dovuto al fatto che la nozione di limite è, in un certo senso, di tipo “locale”. Questa osservazione vale in generale e verrà spesso usata in seguito.

**Esempi.** 1. Dimostriamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1.$$

In effetti, se  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da  $f(x) = x \sin(1/x)$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da  $g(y) = \cos(y)$ , sappiamo che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , e che  $g$  è continua. Per il Teorema 1,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x)\right) = g(0) = 1.$$

2. Sia ora  $f$  come nell'esempio precedente, e sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0, \\ 2 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Si può vedere che, in ogni intorno di  $x_0 = 0$ , la funzione  $g(f(x))$  assume infinite volte il valore 1 e infinite volte il valore 2. Pertanto, in questo caso,

*il limite  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$  non esiste.*

3. Sia ora  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x, y) = x^2 + y^2$  e  $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $g(z) = z \sin(1/z)$ . Il Teorema 2 qui può essere applicato per concludere che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(f(x, y)) = \lim_{\substack{z \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)}} g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0.$$

## Lezione 17 del 17/11/2016:

### Ancora sul limite

Finora abbiamo considerato due spazi metrici  $E, E'$ , un punto  $x_0$  di accumulazione per  $E$  e una funzione  $f : E \rightarrow E'$ , oppure  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow E'$ . Siccome l'eventuale valore di  $f$  in  $x_0$  è ininfluente ai fini dell'esistenza o meno del limite, nonché del suo effettivo valore, da ora in poi per semplicità considereremo solo il caso  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow E'$ .

Si può verificare che tutte le considerazioni fatte continuano a valere per una funzione  $f : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \rightarrow E'$ , con  $\widehat{E} \subseteq E$ , purché  $x_0$  sia di accumulazione per  $\widehat{E}$ : ogni intorno di  $x_0$  deve contenere infiniti punti di  $\widehat{E}$ .

Sia ora  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow E'$ , e sia  $\widehat{E} \subseteq E$ . Possiamo considerare la restrizione di  $f$  a  $\widehat{E} \setminus \{x_0\}$ : è la funzione  $\hat{f} : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \rightarrow E'$  i cui valori coincidono con quelli di  $f$ : si ha  $\hat{f}(x) = f(x)$  per ogni  $x \in \widehat{E} \setminus \{x_0\}$ . Talvolta si scrive  $\hat{f} = f|_{\widehat{E}}$ .

**Teorema.** *Se esiste il limite di  $f$  in  $x_0$  e  $x_0$  è di accumulazione anche per  $\widehat{E}$ , allora esiste anche il limite di  $\hat{f}$  in  $x_0$  e ha lo stesso valore:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \hat{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di  $\hat{f}$ . ■

Il teorema precedente viene spesso usato per stabilire la non esistenza del limite per la funzione  $f$ : a tal scopo, è sufficiente trovare due diverse restrizioni lungo le quali i valori del limite differiscono.

**Esempi.** 1. La funzione  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

non ha limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , come si vede considerando le restrizioni alle due rette  $\{(x, y) : x = 0\}$  e  $\{(x, y) : x = y\}$ .

2. Più sorprendente è la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2},$$

per la quale le restrizioni a tutte le rette passanti per  $(0, 0)$  hanno limite 0, ma la restrizione alla parabola  $\{(x, y) : y = x^2\}$  vale costantemente  $\frac{1}{2}$ .

3. Dimostriamo invece che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Fissiamo un  $\varepsilon > 0$ . Dopo aver verificato che

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2),$$

risulta naturale prendere  $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ , per avere che

$$d((x, y), (0, 0)) < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Sia ora  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Possiamo considerare le due restrizioni  $\hat{f}_1$  e  $\hat{f}_2$  agli insiemi  $\hat{E}_1 = E \cap ] - \infty, x_0]$  e  $\hat{E}_2 = E \cap [x_0 + \infty[$ . Se  $x_0$  è di accumulazione per  $\hat{E}_1$ , chiameremo “limite sinistro” di  $f$ , quando esiste, il limite di  $\hat{f}_1(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$ ; lo denoteremo con

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Analogamente, se  $x_0$  è di accumulazione per  $\hat{E}_2$ , chiameremo “limite destro” di  $f$ , quando esiste, il limite di  $\hat{f}_2(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$ ; lo denoteremo con

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

**Teorema.** *Se  $x_0$  è di accumulazione per  $\hat{E}_1$  e per  $\hat{E}_2$ , il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$  esiste se e solo se esistono sia il limite sinistro che il limite destro e hanno lo stesso valore.*

Dimostrazione. Sappiamo già che, se esiste il limite, tutte le restrizioni devono avere lo stesso limite. Viceversa, supponiamo che esistano e coincidano i limiti sinistro e destro, e sia  $\ell$  il loro valore. Fissiamo un  $\varepsilon > 0$ . Allora esistono  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tali che, se  $x \in E$ ,

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad d(f(x), \ell) < \varepsilon,$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta_2 \quad \Rightarrow \quad d(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Preso  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , abbiamo quindi che, se  $x \neq x_0$ ,

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad d(f(x), \ell) < \varepsilon,$$

per cui il limite di  $f$  in  $x_0$  esiste ed è uguale a  $\ell$ . ■

**Esempio.** La funzione “segno”, ossia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

non ha limite in  $x_0 = 0$ , essendo che  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ .

## Lezione 18 del 21/11/2016:

### La retta ampliata

Consideriamo la funzione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$ , definita da

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Si tratta di una funzione invertibile, con inversa  $\varphi^{-1} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$

Inoltre,  $\varphi$  è continua, quindi strettamente monotona (essa è strettamente crescente), e anche  $\varphi^{-1}$  è continua. Possiamo allora definire una nuova distanza su  $\mathbb{R}$ :

$$\tilde{d}(x, x') = |\varphi(x) - \varphi(x')|.$$

È importante notare che gli intorni di un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  rimangono gli stessi di quelli definiti dalla distanza usuale in  $\mathbb{R}$ . Infatti, per la nuova distanza, la palla aperta di centro  $x_0 \in \mathbb{R}$  e raggio  $\rho$  è data da

$$\tilde{B}(x_0, \rho) = \{x : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho\}.$$

Essendo  $\varphi$  continua in  $x_0$ , per ogni  $\delta_1 > 0$  esiste un  $\delta_2 > 0$  per cui

$$|x - x_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_1,$$

ossia

$$]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[ \subseteq \tilde{B}(x_0, \delta_1).$$

Viceversa, essendo  $\varphi^{-1}$  continua in  $y_0 = \varphi(x_0) \in ]-1, 1[$ , per ogni  $\delta_1 > 0$  esiste un  $\delta_2 > 0$  per cui

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \in ]-1, 1[ \quad \text{e} \quad |\varphi^{-1}(\varphi(x)) - \varphi^{-1}(\varphi(x_0))| < \delta_1,$$

ossia

$$\tilde{B}(x_0, \delta_2) \subseteq ]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[.$$

Da quanto visto, si deduce che ogni intorno per la nuova distanza è anche intorno per la vecchia distanza, e viceversa.

Introduciamo ora il nuovo insieme  $\tilde{\mathbb{R}}$ , definito come unione di  $\mathbb{R}$  e di due nuovi elementi, che indicheremo con  $-\infty$  e  $+\infty$ :

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

L'insieme  $\tilde{\mathbb{R}}$  risulta totalmente ordinato se si mantiene l'ordine esistente tra coppie di numeri reali e si pone inoltre, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$-\infty < x < +\infty.$$

Consideriamo la funzione  $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ , definita da

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = -\infty, \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{se } x = +\infty. \end{cases}$$

Essa è invertibile, con inversa  $\tilde{\varphi}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  definita da

$$\tilde{\varphi}^{-1}(y) = \begin{cases} -\infty & \text{se } y = -1, \\ \varphi^{-1}(y) & \text{se } y \in ]-1, 1[, \\ +\infty & \text{se } y = 1. \end{cases}$$

Definiamo, per  $x, x' \in \tilde{\mathbb{R}}$ ,

$$\tilde{d}(x, x') = |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x')|;$$

si verifica facilmente che  $\tilde{d}$  è una distanza su  $\tilde{\mathbb{R}}$ . In questo modo,  $\tilde{\mathbb{R}}$  risulta uno spazio metrico. Vediamo ad esempio cos'è una palla aperta centrata in  $+\infty$ :

$$B(+\infty, \rho) = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : |\tilde{\varphi}(x) - 1| < \rho\} = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : \tilde{\varphi}(x) > 1 - \rho\},$$

e quindi

$$B(+\infty, \rho) = \begin{cases} \tilde{\mathbb{R}} & \text{se } \rho > 2, \\ ]-\infty, +\infty] & \text{se } \rho = 2, \\ ]\varphi^{-1}(1 - \rho), +\infty] & \text{se } \rho < 2, \end{cases}$$

dove abbiamo usato le notazioni

$$]a, +\infty] = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : x > a\} = ]a, +\infty[ \cup \{+\infty\}.$$

Possiamo quindi affermare che un intorno di  $+\infty$  è un insieme che contiene, oltre al punto  $+\infty$ , un intervallo del tipo  $]a, +\infty[$ , per un certo  $a \in \mathbb{R}$ .

Analogamente, un intorno di  $-\infty$  è un insieme che contiene, oltre a  $-\infty$ , un intervallo del tipo  $] - \infty, \beta[$ , per un certo  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Vediamo ora come si traduce la definizione di limite in alcuni casi in cui compaiono gli elementi  $+\infty$  o  $-\infty$ . Ad esempio, sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $E'$  uno spazio metrico e  $f : E \rightarrow E'$  una funzione. Considerando  $E$  come sottoinsieme di  $\tilde{\mathbb{R}}$ , si ha che  $+\infty$  è punto di accumulazione per  $E$  se e solo se  $E$  non è limitato superiormente. In tal caso, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in E' &\Leftrightarrow \forall V \text{ intorno di } l \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha \in \mathbb{R} : x > \alpha \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Analogamente, se  $E$  non è limitato inferiormente, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in E' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \beta \in \mathbb{R} : x < \beta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon.$$

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = l.$$

Vediamo ora il caso in cui  $E$  sia uno spazio metrico ed  $E' = \mathbb{R}$ , considerato come sottoinsieme di  $\tilde{\mathbb{R}}$ . Supponiamo che  $x_0$  sia di accumulazione per  $E$  e consideriamo una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , o  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall V \text{ intorno di } +\infty \exists U \text{ intorno di } x_0 : \\ &f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha; \end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 : 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty.$$

Le situazioni considerate in precedenza possono talvolta presentarsi assieme. Ad esempio, se  $E \subseteq \mathbb{R}$  non è limitato superiormente ed  $E' = \mathbb{R}$ , si avrà

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall V \text{ intorno di } +\infty \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \alpha' \in \mathbb{R} : x > \alpha' \Rightarrow f(x) > \alpha; \end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R} \exists \alpha \in \mathbb{R} : x > \alpha \Rightarrow f(x) < \beta.$$

Se invece  $E \subseteq \mathbb{R}$  non è limitato inferiormente ed  $E' = \mathbb{R}$ , si avrà

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \exists \beta \in \mathbb{R} : x < \beta \Rightarrow f(x) > \alpha;$$

analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \exists \beta' \in \mathbb{R} : x < \beta' \Rightarrow f(x) < \beta.$$

## Lezione 19 del 22/11/2016:

### Operazioni con i limiti $+\infty$ e $-\infty$

Qualora i limiti siano  $+\infty$  o  $-\infty$ , non si possono usare i teoremi sulle operazioni con i limiti. A titolo illustrativo, enunciamo alcuni teoremi validi in questi casi. Nel seguito, tutte le funzioni saranno definite in uno spazio metrico  $E$ , oppure in  $E \setminus \{x_0\}$ , con  $x_0$  di accumulazione. Iniziamo con l'addizione:

**Teorema.** Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

ed esiste un  $\gamma \in \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ ,

$$g(x) \geq \gamma,$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Dimostrazione. Fissiamo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Considerato  $\alpha' = \alpha - \gamma$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha'.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > \alpha' + \gamma = \alpha.$$

■

**Corollario.** Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R} \quad (o \quad +\infty),$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Dimostrazione. Se il limite di  $g$  è  $l \in \mathbb{R}$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > l - 1.$$

Se invece il limite è  $+\infty$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > 0.$$

In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere. ■

Come regola mnemonica, scriveremo brevemente

$$\begin{aligned} (+\infty) + l &= +\infty, \text{ se } l \text{ è un numero reale;} \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty. \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo, si possono enunciare un teorema e il relativo corollario nel caso in cui il limite di  $f$  sia  $-\infty$ . Come regola mnemonica, scriveremo allora

$$\begin{aligned} (-\infty) + l &= -\infty, \text{ se } l \text{ è un numero reale;} \\ (-\infty) + (-\infty) &= -\infty. \end{aligned}$$

Similmente per quanto riguarda il prodotto:

**Teorema.** Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

ed esiste un  $\gamma > 0$  tale che, per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ ,

$$g(x) \geq \gamma,$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = +\infty.$$

Dimostrazione. Fissiamo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Possiamo supporre che sia  $\alpha > 0$ . Posto  $\alpha' = \frac{\alpha}{\gamma}$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha'.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x)g(x) > \alpha'\gamma = \alpha.$$

■

**Corollario.** Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l > 0 \quad (\text{o } +\infty),$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = +\infty.$$

Dimostrazione. Se il limite di  $g$  è un numero reale  $l > 0$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > \frac{l}{2}.$$

Se invece il limite è  $+\infty$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > 1.$$

In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere.

■



Come sopra, scriveremo brevemente

$$\begin{aligned} (+\infty) \cdot l &= +\infty, \text{ se } l > 0 \text{ è un numero reale;} \\ (+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty, \end{aligned}$$

con tutte le varianti del caso:

$$\begin{aligned} (+\infty) \cdot l &= -\infty, \text{ se } l < 0 \text{ è un numero reale;} \\ (-\infty) \cdot l &= -\infty, \text{ se } l > 0 \text{ è un numero reale;} \\ (-\infty) \cdot l &= +\infty, \text{ se } l < 0 \text{ è un numero reale;} \\ (+\infty) \cdot (-\infty) &= -\infty; \\ (-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty. \end{aligned}$$

Passiamo ora a un altro tipo di risultati.

**Teorema.** Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty,$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Dimostrazione. Fissiamo un  $\varepsilon > 0$ . Posto  $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x)| > \alpha.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{\alpha} = \varepsilon.$$

■

**Teorema.** Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

e  $f(x) > 0$  per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Se invece  $f(x) < 0$  per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Dimostrazione. Vediamo solo il primo caso, essendo il secondo analogo. Fissiamo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; possiamo supporre  $\alpha > 0$ . Posto  $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow 0 < f(x) < \varepsilon.$$

Allora,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon} = \alpha.$$

■

Consideriamo ora il caso in cui  $E$  è uno spazio metrico qualunque ed  $E' = \mathbb{R}$ . Risulterà talvolta utile il seguente “teorema dei due carabinieri”.

**Teorema.** *Supponiamo di avere due funzioni  $f_1, f_2$  per cui*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l.$$

Se  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che, per ogni  $x$ ,

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x),$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Dimostrazione. Fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tali che

$$0 < d(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow l - \varepsilon < f_1(x) < l + \varepsilon,$$

$$0 < d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow l - \varepsilon < f_2(x) < l + \varepsilon.$$

Se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , allora

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < l + \varepsilon,$$

il che dimostra la tesi. ■

**Corollario.** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$$

ed esiste un  $C > 0$  tale che  $|g(x)| \leq C$  per ogni  $x$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$-C|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq C|f(x)|,$$

e il risultato segue dal teorema precedente. ■

Presentiamo due varianti del teorema dei due carabinieri: nel caso in cui il limite vale  $+\infty$ , si ha il seguente

**Teorema.** *Sia  $f_1$  tale che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = +\infty.$$

Se  $f$  è tale che, per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ ,

$$f_1(x) \leq f(x),$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

Dimostrazione. Ponendo  $g(x) = f(x) - f_1(x)$ , si ha che  $g(x) \geq 0$  per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$  e  $f(x) = f_1(x) + g(x)$ . Il risultato segue quindi direttamente dal primo teorema visto a lezione. ■

Nel caso in cui il limite sia  $-\infty$ , si ha l'analogo

**Teorema.** *Sia  $f_2$  tale che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = -\infty.$$

*Se  $f$  è tale che, per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ ,*

$$f(x) \leq f_2(x),$$

*allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

Calcoleremo ora alcuni limiti elementari per  $x$  che tende a  $+\infty$  o  $-\infty$ . Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^n,$$

dove  $n$  è un numero intero. Si può verificare per induzione che, se  $n \geq 1$ ,

$$x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x^n \geq x.$$

Siccome chiaramente  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ , ne segue che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \geq 1, \\ 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \leq -1. \end{cases}$$

Tenendo poi conto che

$$(-x)^n = x^n \text{ se } n \text{ è pari,} \quad (-x)^n = -x^n \text{ se } n \text{ è dispari,}$$

si vede che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \geq 1 \text{ è pari,} \\ -\infty & \text{se } n \geq 1 \text{ è dispari,} \\ 1 & \text{se } n = 0, \\ 0 & \text{se } n \leq -1. \end{cases}$$

Consideriamo ora la funzione polinomiale

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

dove  $n \geq 1$  e  $a_n \neq 0$ . Scrivendo

$$f(x) = x^n \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$$

e usando il fatto che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n,$$

si vede che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n > 0, \\ -\infty & \text{se } a_n < 0, \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } [n \text{ è pari e } a_n > 0], \text{ oppure } [n \text{ è dispari e } a_n < 0], \\ -\infty & \text{se } [n \text{ è pari e } a_n < 0], \text{ oppure } [n \text{ è dispari e } a_n > 0]. \end{cases}$$

Consideriamo ora una funzione razionale

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0},$$

dove  $n, m \geq 1$  e  $a_n, b_m \neq 0$ . Similmente a quanto sopra, scrivendo

$$f(x) = x^{n-m} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_2}{x^{n-2}} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \dots + \frac{b_2}{x^{m-2}} + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}},$$

possiamo concludere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } n > m \text{ e } a_n, b_m \text{ hanno lo stesso segno,} \\ -\infty & \text{se } n > m \text{ e } a_n, b_m \text{ hanno segno opposto,} \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m, \\ 0 & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Può risultare utile osservare che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

In modo analogo si vede che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m},$$

con tutta la casistica che ne consegue.

## Lezione 20 del 23/11/2016:

### Il numero di Nepero

Vedremo ora che la monotonia di una funzione  $f$  permette di stabilire l'esistenza del limite sinistro e del limite destro. Vediamo dapprima il caso di una funzione crescente. Qui  $E$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ .

**Teorema.** *Sia  $f : E \cap ] - \infty, x_0[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione crescente e  $x_0$  un punto di accumulazione per  $E \cap ] - \infty, x_0[$ . Allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup f(E \cap ] - \infty, x_0[).$$

Dimostrazione. Sia  $s = \sup f(E \cap ] - \infty, x_0])$ . Se  $s \in \mathbb{R}$ , fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Per le proprietà dell'estremo superiore, esiste un  $\bar{y} \in f(E \cap ] - \infty, x_0])$  tale che  $\bar{y} > s - \varepsilon$ . Quindi, preso  $\bar{x} \in E \cap ] - \infty, x_0[$  tale che  $f(\bar{x}) = \bar{y}$ , per la crescenza di  $f$  abbiamo

$$\bar{x} < x < x_0 \Rightarrow s - \varepsilon < f(x) \leq s,$$

il che completa la dimostrazione in questo caso.

Se invece  $s = +\infty$ , fissiamo un  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Allora esiste un  $\bar{x} \in E \cap ] - \infty, x_0[$  tale che  $f(\bar{x}) > \alpha$ . Per la crescenza di  $f$ ,

$$\bar{x} < x < x_0 \Rightarrow f(x) > \alpha,$$

per cui  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$ . ■

Si osservi che il teorema precedente include anche il caso in cui  $x_0 = +\infty$ . Se  $f$  è decrescente, si ha un teorema analogo in cui “sup” viene sostituito da “inf”. Analoghi enunciati si hanno per il limite destro, includendo anche il caso in cui  $x_0 = -\infty$ .

Sia  $E'$  uno spazio metrico e  $(a_n)_n$  una successione in  $E'$ . Abbiamo quindi una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow E'$  definita da  $f(n) = a_n$ . Considerando  $\mathbb{N}$  come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , si vede che l'unico punto di accumulazione è  $+\infty$ . Pertanto, spesso il limite di una successione si denota semplicemente con  $\lim_n a_n$ , sottintendendo che  $n \rightarrow +\infty$ .

Per quanto riguarda le successioni di numeri reali, possiamo enunciare il seguente

**Teorema.** *Ogni successione monotona di numeri reali ha limite.*

Dimostrazione. Se  $(a_n)_n$  è crescente, allora

$$\lim_n a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

e questo limite può essere un numero reale o  $+\infty$ . Similmente, se  $(a_n)_n$  è decrescente, il limite sarà un numero reale o  $-\infty$ . ■

Consideriamo ora la successione  $(a_n)_n$ , così definita per  $n \geq 1$ :

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Vediamo che è crescente:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} \\ &= \left(\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} \\ &= \left(1 + \frac{-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n}, \end{aligned}$$

quindi, per la disuguaglianza di Bernoulli,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \left(1 + (n+1) \frac{-1}{(n+1)^2}\right) \frac{n+1}{n} = 1.$$

Analogamente, consideriamo la successione

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Si ha che  $a_n < b_n$ , per ogni  $n \geq 1$ . Vediamo che  $(b_n)_n$  è decrescente:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}\right)^{n+2} \\ &= \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \\ &\geq \frac{n}{n+1} \left(1 + (n+2) \frac{1}{n^2+2n}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pertanto, le successioni  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  hanno entrambe limite finito. Essendo

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

possiamo concludere che le due successioni hanno lo stesso limite, un numero reale. Esso si chiama “numero di Nepero” e si denota con  $e$ . Scriveremo

$$e = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Si può dimostrare che è un numero irrazionale:

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999595 \dots$$

Dimostriamo ora che, al variare di  $x$  in  $\mathbb{R}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Consideriamo, per  $x \geq 0$ , il numero naturale  $n(x)$  tale che

$$n(x) \leq x < n(x) + 1$$

(detto “parte intera di  $x$ ”). Allora, per  $x \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)} &< \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n(x)} \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \\ &< \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n(x)+1} \leq \left(1 + \frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1}. \end{aligned}$$

Notiamo che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} n(x) = +\infty$ , quindi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n(x)}\right)^{n(x)+1} &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \\ &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n(x)+1}\right)^{n(x)} &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\ &= e \cdot 1 = e \end{aligned}$$

Per il “teorema dei due carabinieri”, si ha che anche il limite cercato vale  $e$ .

Dimostriamo ora che si ha anche

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Infatti, usando la formula  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$ , abbiamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \left(1 + \frac{1}{y}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Possiamo ora enunciare il seguente importante

**Teorema.** *Si ha*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(e), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{1}{\log_a(e)}.$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y \log_a \left(1 + \frac{1}{y}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \log_a(e),$$

e lo stesso vale per il limite sinistro. Inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\log_a(e)}.$$

■

Si noti che la scelta della base  $a = e$  semplifica le espressioni: si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

È per questo motivo che, da ora in poi, sceglieremo come base dell'esponenziale e del logaritmo il numero di Nepero  $e$ , che viene anche chiamato la "base naturale". Scriveremo  $\exp(x)$  (o anche  $\exp x$ ) invece di  $\exp_e(x)$  e  $\ln(x)$  (o anche  $\ln x$ ) invece di  $\log_e(x)$ . Potrebbero essere utili le formule seguenti:

$$a^x = e^{x \ln(a)}, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Anche le funzioni iperboliche verrà sempre scelta la base  $e$ , e scriveremo  $\cosh(x)$  (o anche  $\cosh x$ ) invece di  $\cosh_e(x)$  e  $\sinh(x)$  (o anche  $\sinh x$ ) invece di  $\sinh_e(x)$ .

## **Lezione 21 del 24/11/2016:**

### **Il numero $\pi$**

Definiamo la successione  $(\ell_n)_n$  in questo modo:

$$\ell_1 = 2, \quad \ell_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}.$$

(Geometricamente, si può vedere che  $\ell_n$  corrisponde alla lunghezza del lato di un poligono regolare di  $2^n$  lati inscritto ad una circonferenza di lato 1.) Si ha:

$$\begin{aligned} \ell_2 &= \sqrt{2} \\ \ell_3 &= \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \ell_4 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ \ell_5 &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Poniamo

$$a_n = 2^{n-1} \ell_n.$$



(Geometricamente,  $a_n$  corrisponde al semiperimetro di tale poligono.) In modo analogo, definiamo, per  $n \geq 2$ ,

$$b_n = 2^n \frac{\ell_n}{\sqrt{4 - \ell_n^2}}.$$

(Geometricamente, si può vedere che  $b_n$  corrisponde al semiperimetro di un poligono regolare di  $2^n$  lati circoscritto alla circonferenza di lato 1.) Si ha che  $a_n < b_n$  per ogni  $n \geq 2$ . Ecco come si sviluppano le due successioni:

$$\begin{array}{ll} a_2 = 2\sqrt{2} & b_2 = 4 \\ a_3 = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} & b_3 = 8 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ a_4 = 8\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} & b_4 = 16 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \\ a_5 = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} & b_5 = 32 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \\ \dots & \dots \end{array}$$

Vediamo che la successione  $(a_n)_n$  è strettamente crescente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 2 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}}{\ell_n} = \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - \ell_n^2}}} > \frac{2}{\sqrt{2 + 2}} = 1.$$

Inoltre, la successione  $(b_n)_n$  è strettamente decrescente:

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{1}{2} \frac{\ell_n}{\sqrt{4 - \ell_n^2}} \frac{\sqrt{4 - \ell_{n+1}^2}}{\ell_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\ell_n}{\sqrt{4 - \ell_n^2}} \frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 - \ell_n^2}}}{\sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 + \sqrt{4 - \ell_n^2}}{\sqrt{4 - \ell_n^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{4 - \ell_n^2}} + 1 \right) \\ &> \frac{1}{2}(1 + 1) = 1. \end{aligned}$$

Pertanto, le successioni  $(a_n)_n$  e  $(b_n)_n$  hanno entrambe limite finito. Essendo quindi

$$\lim_n \ell_n = \lim_n \frac{a_n}{2^{n-1}} = 0,$$

si ha

$$\lim_n \frac{b_n}{a_n} = \lim_n \frac{2}{\sqrt{4 - \ell_n^2}} = 1,$$

per cui possiamo concludere che le due successioni hanno lo stesso limite, un numero reale, che chiameremo “pi greco” e denoteremo con  $\pi$ . Si può dimostrare che è un numero irrazionale:

$$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751 \dots$$

Torniamo ora a considerare la funzione circolare  $h_T : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Ricordiamo che  $S^1$  può essere considerato come sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  o, equivalentemente, di  $\mathbb{R}^2$ , e che  $h_T(x) = \cos_T(x) + i \sin_T(x)$ , ossia

$$h_T(x) = (\cos_T(x), \sin_T(x)).$$

Poniamo  $x_n = \frac{T}{2^n}$  e  $\sigma_n = h_T(x_n)$ . Dimostriamo per induzione che, per  $n \geq 1$ ,

$$\ell_n = d(\sigma_n, \mathbf{1}),$$

dove abbiamo scritto  $\mathbf{1}$  per indicare il punto  $(1, 0)$ . Verifichiamo che vale per  $n = 1$ : si ha  $\ell_1 = 2$  e

$$d(\sigma_1, \mathbf{1}) = d\left(h_T\left(\frac{T}{2}\right), (1, 0)\right) = d((-1, 0), (1, 0)) = 2.$$

Supponiamo ora che  $\ell_n = d(\sigma_n, \mathbf{1})$ , per un certo  $n \geq 1$ , ossia

$$\ell_n = \sqrt{(\cos_T(x_n) - 1)^2 + (\sin_T(x_n) - 0)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos_T(x_n)},$$

da cui

$$\cos_T(x_n) = \frac{2 - \ell_n^2}{2}.$$

Essendo  $x_n = 2x_{n+1}$ , dalla

$$\begin{aligned} \cos_T(x_n) &= \cos_T(x_{n+1} + x_{n+1}) \\ &= \cos_T(x_{n+1}) \cos_T(x_{n+1}) - \sin_T(x_{n+1}) \sin_T(x_{n+1}) \\ &= (\cos_T(x_{n+1}))^2 - (\sin_T(x_{n+1}))^2 \\ &= 2(\cos_T(x_{n+1}))^2 - 1, \end{aligned}$$

abbiamo

$$\cos_T(x_{n+1}) = \sqrt{\frac{1 + \cos_T(x_n)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{2 - \ell_n^2}{2}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \ell_n^2}.$$

Quindi,

$$d(\sigma_{n+1}, \mathbf{1}) = \sqrt{2 - 2 \cos_T(x_{n+1})} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}} = \ell_{n+1},$$

il che completa la dimostrazione.

Essendo  $\lim_n 2^{n-1} \ell_n = \pi$ , possiamo scrivere

$$\lim_n \frac{\sqrt{2 - 2 \cos_T(x_n)}}{x_n} = \lim_n \frac{2^n}{T} \ell_n = \frac{2\pi}{T}.$$

Inoltre,

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{\sin_T(x_n)}{x_n} &= \lim_n \frac{\sqrt{1 - (\cos_T(x_n))^2}}{x_n} \\ &= \lim_n \frac{\sqrt{1 - \cos_T(x_n)}}{x_n} \sqrt{1 + \cos_T(x_n)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_n \frac{\sqrt{2 - 2 \cos_T(x_n)}}{x_n} \lim_n \sqrt{1 + \cos_T(x_n)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{T} \sqrt{2} = \frac{2\pi}{T}. \end{aligned}$$

Questi fatti ci portano a congetturare il seguente

**Teorema.** *Si ha*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos_T(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin_T(x)}{x} = \frac{2\pi}{T}.$$

La sua dimostrazione risulta piuttosto complicata a questo livello e viene pertanto omessa. Si noti che la scelta della base  $T = 2\pi$  semplifica le espressioni dei limiti: si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos_{2\pi}(x)}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin_{2\pi}(x)}{x} = 1.$$

È per questo motivo che, da ora in poi, sceglieremo come base delle funzioni trigonometriche il numero  $2\pi$ : scriveremo  $\cos(x)$  (o anche  $\cos x$ ) invece di  $\cos_{2\pi}(x)$  e  $\sin(x)$  (o anche  $\sin x$ ) invece di  $\sin_{2\pi}(x)$ .

Potranno essere utili le seguenti formule:

$$\cos_T(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right), \quad \sin_T(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}x\right).$$

## Lezione 22 del 28/11/2016:

### Alcuni limiti che possono risultare utili

1. Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

e che la funzione coseno è continua in 0, abbiamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\cos(0)} \cdot 1 = 1.$$

**Nota.** Le funzioni iperboliche presentano proprietà simili a quelle trigonometriche anche per quanto riguarda i limiti. Si possono dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = 1.$$

Tutte queste analogie si possono spiegare introducendo la funzione “esponenziale complessa”  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , definita da

$$\exp(a + ib) = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Si può verificare che, se  $z_1$  e  $z_2$  sono due numeri complessi, allora

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2).$$

Spesso si scrive  $e^z$  invece di  $\exp(z)$ . Si possono ricavare le seguenti uguaglianze: per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Queste formule possono essere utilizzate, ad esempio, per estendere anche le funzioni trigonometriche al campo complesso. Anche le funzioni iperboliche, definite da

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

si possono estendere con le stesse formule al campo complesso. Si noti che

$$\cos t = \cosh(it), \quad \sin t = -i \sinh(it).$$

A questo punto risulteranno finalmente spiegate le similitudini incontrate tra le funzioni trigonometriche e quelle iperboliche.

2. Usando le proprietà della funzione esponenziale, vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 1 & \text{se } a = 1, \\ 0 & \text{se } a < 1, \end{cases}$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ -\infty & \text{se } a < 1. \end{cases}$$

Scrivendo  $x^\alpha = \exp(\ln x^\alpha) = \exp(\alpha \ln x)$ , si vede che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0, \\ 1 & \text{se } \alpha = 0, \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

3. Vogliamo ora calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha},$$

con  $a > 0$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Ci interessa dapprima il caso indeterminato  $a > 1$  e  $\alpha > 0$ . Cominciamo con il dimostrare che

$$\lim_n \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Infatti, scrivendo  $a = 1 + b$ , con  $b > 0$ , si ha che

$$a^n = (1 + b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2} b^2 + \dots + b^n > \frac{n(n-1)}{2} b^2.$$

Quindi,

$$\frac{a^n}{n} > \frac{n-1}{2} b^2,$$

da cui segue il risultato.

Vediamo ora che, per ogni numero intero  $k \geq 1$ , si ha che

$$\lim_n \frac{a^n}{n^k} = +\infty.$$

Infatti, scrivendo

$$\frac{a^n}{n^k} = \left( \frac{a^{n/k}}{n} \right)^k = \left( \frac{(\sqrt[k]{a})^n}{n} \right)^k,$$

si può usare il fatto che  $\lim_n \frac{(\sqrt[k]{a})^n}{n} = +\infty$  e concludere.

Siccome siamo interessati a calcolare un limite per  $x \rightarrow +\infty$ , supporremo ora  $x \geq 1$ . Siano  $n(x)$  e  $n(\alpha)$  i numeri naturali tali che

$$n(x) \leq x < n(x) + 1, \quad n(\alpha) \leq \alpha < n(\alpha) + 1.$$

Ponendo  $k = n(\alpha) + 1$ , per  $x \geq 1$  si ha

$$\frac{a^x}{x^\alpha} \geq \frac{a^x}{x^{n(\alpha)+1}} = \frac{a^x}{x^k} \geq \frac{a^{n(x)}}{(n(x) + 1)^k}.$$

Inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{n(x)}}{(n(x) + 1)^k} = \lim_n \frac{a^n}{(n + 1)^k} = \frac{1}{a} \lim_n \frac{a^{n+1}}{(n + 1)^k} = \frac{1}{a} \lim_m \frac{a^m}{m^k} = +\infty.$$

Ne segue che, se  $a > 1$  e  $\alpha > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty.$$

A maggior ragione, il risultato continua a valere anche per  $\alpha \leq 0$ . In particolare,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty, \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lasciando ora da parte il caso semplice in cui  $a = 1$ , notiamo che, se  $a < 1$ , ponendo  $\hat{a} = \frac{1}{a}$  e  $\hat{\alpha} = -\alpha$ , si ha che  $\hat{a} > 1$ , per cui  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\hat{a}^x}{x^{\hat{\alpha}}} = +\infty$ , e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\hat{\alpha}}}{\hat{a}^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\hat{a}^x}{x^{\hat{\alpha}}} \right)^{-1} = 0.$$

4. Dimostriamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \text{per ogni } \alpha > 0.$$

(Se  $\alpha \leq 0$ , tale limite vale  $+\infty$ , in quanto il numeratore tende a  $+\infty$ .) Con il cambio di variabile “ $y = \ln x$ ”, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{(e^y)^\alpha} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{y^{1/\alpha}}{e^y} \right)^\alpha = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^y}{y^{1/\alpha}} \right)^{-\alpha} = 0.$$

5. Dimostriamo ora che

$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Possiamo assumere  $n > n(a)$  e scrivere

$$\begin{aligned} 0 < \frac{a^n}{n!} &= \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{n(a)} \cdot \frac{a}{(n(a)+1)} \cdot \frac{a}{(n(a)+2)} \cdots \frac{a}{n} \\ &= C \cdot \frac{a}{(n(a)+1)} \cdot \frac{a}{(n(a)+2)} \cdots \frac{a}{n} \\ &\leq C \cdot \frac{a}{n}, \end{aligned}$$

da cui segue il risultato, usando il “teorema dei due carabinieri”.

6. Vediamo infine che

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0.$$

A tal scopo dimostriamo per induzione che, per ogni  $n \geq 1$ , si ha

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n},$$

dopodichè il risultato segue di nuovo usando il “teorema dei due carabinieri”. Se  $n = 1$ , la proposizione è sicuramente vera. Supponiamola ora vera per un certo  $n \geq 1$ . Allora

$$\begin{aligned} 0 < \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} &= \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n!}{n^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ &\leq \frac{1}{n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-1} = \frac{1}{n+1} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-1} \leq \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

per cui la proposizione risulta vera anche per  $n+1$ .

## Lezione 23 del 30/11/2016:

### Successioni e sottosuccessioni

Sia ora  $U$  un sottoinsieme dello spazio metrico  $E$ . Possiamo caratterizzare la nozione di punto aderente a  $U$  facendo uso delle successioni.

**Teorema.** *Un punto  $x \in E$  è aderente a  $U$  se e solo se esiste una successione  $(a_n)_n$  in  $U$  tale che  $\lim_n a_n = x$ .*

Dimostrazione. Se  $x$  è aderente a  $U$ , allora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , l'intersezione  $B(x, \frac{1}{n+1}) \cap U$  è non vuota, per cui posso sceglierne un elemento, che chiamo  $a_n$ . In questo modo, ho costruito una successione  $(a_n)_n$  in  $U$ , ed è facile vedere che essa ha limite  $x$ . Una delle due implicazioni è così dimostrata.

Supponiamo ora che esista una successione  $(a_n)_n$  in  $U$  tale che  $\lim_n a_n = x$ . Allora, fissato  $\rho > 0$ , esiste un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow d(a_n, x) < \rho,$$

ossia  $a_n \in B(x, \rho)$ . Quindi,  $B(x, \rho) \cap U$  è non vuoto, e questo dimostra che  $x$  è aderente a  $U$ . ■

Data che sia una successione  $(a_n)_n$ , una sua “sottosuccessione” si ottiene selezionando una successione strettamente crescente di indici  $(n_k)_k$  e considerando la funzione composta

$$k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}.$$

**Teorema.** *Se una successione ha limite, allora tutte le sue sottosuccessioni hanno lo stesso limite.*

Dimostrazione. Essendo gli indici  $n_k$  in  $\mathbb{N}$ , dalla  $n_{k+1} > n_k$  si deduce che  $n_{k+1} \geq n_k + 1$  e, per induzione, che  $n_k \geq k$ , per ogni  $k$ . Ne segue che  $\lim_k n_k = +\infty$ . Pertanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

Ricordiamo ora che, se  $U$  è sottoinsieme di uno spazio metrico  $E$ , si dice che  $x_0 \in E$  è un punto di accumulazione per  $U$  se ogni intorno di  $x_0$  contiene infiniti elementi di  $U$ . Dimostriamo una importante proprietà nell'ambito della retta reale  $\mathbb{R}$ .

**Teorema.** *Sia  $U$  un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}$ . Se  $U$  ha infiniti elementi, allora esiste almeno un punto di accumulazione per  $U$ .*

Dimostrazione. Sia  $I_0 = [a, b]$  un intervallo che contiene  $U$ . Consideriamo il punto medio  $\frac{a+b}{2}$  di  $I_0$ . Chiamiamo  $I_1$  uno dei due intervalli  $[a, \frac{a+b}{2}]$  e  $[\frac{a+b}{2}, b]$  che contenga infiniti punti di  $U$ . Consideriamo ora il punto medio di  $I_1$ , procediamo in modo analogo per definire  $I_2$ , e così via, per ricorrenza. Abbiamo così una successione di intervalli  $I_k = [a_k, b_k]$  tali che

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$$

e, per ogni  $k$ , l'intervallo  $I_k$  contiene infiniti punti di  $U$ . Per il teorema di Cantor, esiste un  $c \in \mathbb{R}$  appartenente a tutti gli intervalli. Dimostriamo che  $c$  è di accumulazione per  $U$ . Fissiamo un  $\rho > 0$ . Siccome  $\lim_k (b_k - a_k) = 0$  e  $a_k \leq c \leq b_k$  per ogni  $k$ , esiste un  $\bar{k}$  tale che, se  $k \geq \bar{k}$ , allora  $I_k \subseteq ]c - \rho, c + \rho[$ . Quindi ci sono infiniti punti di  $U$  in  $]c - \rho, c + \rho[$ . ■

Enunciamo ora la seguente proprietà degli intervalli chiusi e limitati di  $\mathbb{R}$ .

**Teorema (di Bolzano–Weierstrass).** *Ogni successione  $(a_n)_n$  in  $[a, b]$  possiede una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha limite in  $[a, b]$ .*

Dimostrazione. Se la successione  $(a_n)_n$  assume uno stesso valore  $\bar{x}$  infinite volte, basta prendere la sottosuccessione costantemente uguale a  $\bar{x}$ . Altrimenti, l'insieme  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , contenuto in  $[a, b]$ , ha infiniti elementi ed è limitato, per cui ha un punto di accumulazione  $c \in \mathbb{R}$ : esso è un punto aderente ad  $[a, b]$ , che è un insieme chiuso. Quindi,  $c \in [a, b]$ . Ora pongo  $n_0 = 0$  e, per induzione, supponendo di aver scelto  $n_k$ , per un certo  $k \in \mathbb{N}$ , scelgo  $n_{k+1}$  in modo che  $n_{k+1} > n_k$  e  $a_{n_{k+1}} \in ]c - \frac{1}{k+1}, c + \frac{1}{k+1}[$ . Ciò è possibile in quanto, essendo  $c$  di accumulazione, per ogni  $k$  l'insieme  $]c - \frac{1}{k+1}, c + \frac{1}{k+1}[$  contiene infiniti elementi di  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Chiaramente, si ha che  $\lim_k a_{n_k} = c$ , e la proprietà di Bolzano–Weierstrass è così dimostrata. ■

In uno spazio metrico  $E$ , diremo che un sottoinsieme  $U$  è “compatto” se ogni successione  $(a_n)_n$  in  $U$  possiede una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha limite in  $U$ . La proprietà di Bolzano–Weierstrass afferma quindi che, se  $E = \mathbb{R}$ , gli intervalli del tipo  $U = [a, b]$  sono compatti.

## Lezione 24 del 01/12/2016:

### Compattezza e continuità

Nel seguito, diremo che una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  è “limitata superiormente” se lo è la sua immagine  $f(E)$ . Analogamente dicasi per espressioni del tipo “ $f$  è limitata inferiormente”, “ $f$  è limitata”, “ $f$  ha massimo”, “ $f$  ha minimo”. Nel caso in cui  $f$  abbia massimo, chiameremo “punto di massimo” ogni  $\bar{x}$  per cui  $f(\bar{x}) = \max f(E)$ ; analoga definizione per “punto di minimo”.

**Teorema (di Weierstrass).** *Sia  $E$  uno spazio metrico, e  $U$  un suo sottoinsieme compatto. Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora  $f$  ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia  $s = \sup f(U)$ . Dimostreremo che esiste un punto di massimo, ossia un  $\bar{x} \in U$  tale che  $f(\bar{x}) = s$ .

Notiamo che è possibile trovare una successione  $(y_n)_n$  in  $f(U)$  tale che  $\lim_n y_n = s$ : se  $s \in \mathbb{R}$ , per ogni  $n \geq 1$  possiamo trovare un  $y_n \in f(U)$  per cui  $s - \frac{1}{n} < y_n \leq s$ ; se invece  $s = +\infty$ , per ogni  $n$  esiste un  $y_n \in f(U)$  tale che  $y_n > n$ .



In corrispondenza, possiamo trovare una successione  $(x_n)_n$  in  $U$  tale che  $f(x_n) = y_n$ . Essendo  $U$  compatto, esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k$  che ha un limite  $\bar{x} \in U$ . Siccome  $\lim_n y_n = s$  e  $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ , la sottosuccessione  $(y_{n_k})_k$  ha anch'essa limite  $s$  e, per la continuità di  $f$ ,

$$f(\bar{x}) = f(\lim_k x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = s.$$

Il teorema è così dimostrato, per quanto riguarda l'esistenza del massimo. Per il minimo, si procede in modo analogo (oppure, si considera la funzione continua  $g = -f$  e si usa il fatto che  $g$  ha massimo). ■

Come immediata conseguenza del teorema, ricordando che un intervallo  $[a, b]$  è compatto in  $\mathbb{R}$ , abbiamo il seguente

**Corollario.** *Ogni funzione continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ha massimo e minimo.*

Vogliamo ora cercare di capire meglio come sono fatti gli insiemi compatti. Per cominciare, abbiamo l'informazione seguente. Precisiamo che un sottoinsieme  $U$  di uno spazio metrico è "limitato" se esiste una palla che lo contiene.

**Teorema.** *Ogni insieme compatto di uno spazio metrico  $E$  è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che  $U$  sia compatto. Preso un  $x \in \bar{U}$ , esiste una successione  $(a_n)_n$  in  $U$  tale che  $\lim_n a_n = x$ . Essendo  $U$  compatto, esiste una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha limite in  $U$ . Ma, essendo una sottosuccessione, deve essere  $\lim_k a_{n_k} = x$ , per cui  $x \in U$ . Quindi, ogni punto aderente di  $U$  appartiene ad  $U$ , per cui  $U$  è chiuso.

Fissiamo ora un  $x_0 \in U$  qualsiasi e dimostriamo che, se  $n \in \mathbb{N}$  è sufficientemente grande, allora  $U \subseteq B(x_0, n)$ . Per assurdo, se così non fosse, potrei trovare una successione  $(a_n)_n$  in  $U$  tale che  $d(a_n, x_0) \geq n$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Ma, essendo  $U$  compatto, esiste una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha un certo limite  $\bar{x} \in U$ . Usando la disuguaglianza triangolare, si ha che

$$|d(a_{n_k}, x_0) - d(\bar{x}, x_0)| \leq d(a_{n_k}, \bar{x}),$$

da cui segue che  $\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = d(\bar{x}, x_0)$ , mentre dovrebbe essere

$$\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = +\infty,$$

una contraddizione. Pertanto,  $U$  deve essere limitato. ■

Ora vorremmo focalizzare la nostra attenzione sui sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^M$ . Iniziamo con alcune considerazioni sui limiti di funzioni a valori vettoriali.

Siamo interessati a studiare il limite di una funzione  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$ , dove  $x_0$  è un punto di accumulazione di uno spazio metrico  $E$ . Consideriamo le sue componenti  $f_k : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  di  $f$ , con  $k = 1, 2, \dots, M$ , per cui si ha:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)).$$

**Teorema.** Il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$  esiste se e solo se esistono i limiti  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = l_k \in \mathbb{R}$ , per ogni  $k = 1, 2, \dots, M$ . In tal caso, si ha  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_M)$ . Vale quindi la formula

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x \rightarrow x_0} f_M(x) \right).$$

Dimostrazione. Segue direttamente dal teorema sulla continuità delle componenti di una funzione continua. ■

Come caso particolare, sia  $(\mathbf{a}_n)_n$  una successione in  $\mathbb{R}^M$ . Essa ha pertanto  $M$  componenti:

$$\mathbf{a}_n = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^M) \in \mathbb{R}^M.$$

(abbiamo messo gli indici  $1, 2, \dots, M$  in apice per non avere doppi indici in basso).

**Corollario.** La successione  $(\mathbf{a}_n)_n$  ha limite in  $\mathbb{R}^M$  se e solo se tutte le sue componenti hanno limite in  $\mathbb{R}$ . In tal caso, si ha

$$\lim_n \mathbf{a}_n = \left( \lim_n a_n^1, \lim_n a_n^2, \dots, \lim_n a_n^M \right).$$

Possiamo ora enunciare la seguente caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di uno spazio di dimensione finita.

**Teorema.** Un sottoinsieme  $\mathbb{R}^M$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dimostrazione. Sappiamo già che ogni compatto è chiuso e limitato. Supponiamo ora che  $U$  sia un sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^M$ . Supporremo per semplicità  $M = 2$ . Allora  $U$  è contenuto in un rettangolo

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

Sia  $(\mathbf{a}_n)_n$  una successione in  $U$ . Si ha  $\mathbf{a}_n = (a_n^1, a_n^2)$ , con  $a_n^1 \in [a_1, b_1]$  e  $a_n^2 \in [a_2, b_2]$ . Per la proprietà di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione  $(a_{n_k}^1)_k$  che ha un limite  $l_1 \in [a_1, b_1]$ . Consideriamo la sottosuccessione  $(a_{n_k}^2)_k$ , con gli stessi indici di quella appena trovata. Per la proprietà di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione  $(a_{n_{k_j}}^2)_j$  che ha un limite  $l_2 \in [a_2, b_2]$ . Osservando che

$$d(\mathbf{a}_{n_{k_j}}, (l_1, l_2)) = \sqrt{(a_{n_{k_j}}^1 - l_1)^2 + (a_{n_{k_j}}^2 - l_2)^2},$$

se ne deduce che

$$\lim_j \mathbf{a}_{n_{k_j}} = (l_1, l_2).$$

Il punto  $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$  è aderente ad  $U$ . Essendo  $U$  chiuso,  $\mathbf{l}$  appartiene ad  $U$ . ■

È ora facile immaginare diversi esempi di compatti in  $\mathbb{R}^M$ : ad esempio, ogni palla chiusa è un insieme compatto.

Considereremo ora brevemente un esempio di “spazio vettoriale normato di dimensione infinita”, che indicheremo con  $\ell_2$ , costruito in analogia con  $\mathbb{R}^N$ , i cui elementi sono, lo ricordiamo, del tipo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Si tratta di considerare un insieme formato da elementi del tipo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ , o meglio da successioni  $(x_k)_{k \geq 1}$  di numeri reali. Possiamo definire, in analogia con quanto fatto per  $\mathbb{R}^N$ , la somma di due elementi  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3, \dots)$ , in questo modo:

$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3, \dots).$$

La moltiplicazione per un numero reale  $\alpha$  è definita da

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots).$$

Per definire la norma, però, dovremo imporre una condizione sugli elementi del nostro insieme: per ogni elemento  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  di  $\ell_2$  deve esistere una costante  $C_{\mathbf{x}}$  tale che

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 \leq C_{\mathbf{x}}, \quad \text{per ogni } N \geq 1.$$

Ecco allora che la norma si può definire come

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\lim_{N \rightarrow +\infty} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2)}.$$

Una volta verificate le proprietà della norma, si può definire la distanza

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|,$$

e abbiamo che  $\ell_2$  è uno spazio metrico.

Vedremo ora che, in questo spazio, una palla chiusa, pur essendo un insieme chiuso e limitato, non è un insieme compatto. Consideriamo ad esempio la palla  $\overline{B}(\mathbf{0}, 1)$ . Sia  $(\mathbf{a}_n)_{n \geq 1}$  la successione così definita:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

...

Si tratta di una successione in  $\overline{B}(\mathbf{0}, 1)$  che non può avere alcuna sottosuccessione che abbia limite in  $\ell_2$ : lo si deduce dal fatto che due elementi qualsiasi della successione hanno una distanza tra loro uguale a  $\sqrt{2}$ .

Lo spazio  $\ell_2$  così definito è il prototipo di un certo tipo di “spazi di dimensione infinita” che si usano in diverse teorie della matematica e della fisica: ad esempio, nella Meccanica Quantistica.

## Lezione 25 del 05/12/2016:

### Completezza di $\mathbb{R}^N$ - La nozione di derivata

Introduciamo ora il concetto di “completezza” per uno spazio metrico  $E$ . Diremo che  $(a_n)_n$  è una “successione di Cauchy” in  $E$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \quad [m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}] \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Lo spazio metrico  $E$  si dirà “completo” se ogni successione di Cauchy ha un limite in  $E$ .

Si vede facilmente che, se  $(a_n)_n$  ha un limite  $l \in E$ , allora è di Cauchy. Infatti, fissato  $\varepsilon > 0$ , per  $m$  e  $n$  grandi si avrà che

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, l) + d(l, a_n) < 2\varepsilon.$$

Il viceversa non è sempre vero (ad esempio,  $\mathbb{Q}$  non è completo). Abbiamo però il seguente

**Teorema.**  $\mathbb{R}$  è completo.

Dimostrazione. Sia  $(a_n)_n$  una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . Prendendo nella definizione  $\varepsilon = 1$ , si ha che esiste un  $\bar{n}_1$  tale che, scegliendo  $m = \bar{n}_1$ , per ogni  $n \geq \bar{n}_1$  si ha

$$d(a_n, a_{\bar{n}_1}) < 1.$$

Se ne deduce che la successione  $(a_n)_n$  è limitata (gli indici che precedono  $\bar{n}_1$  sono in numero finito). Quindi  $(a_n)_n$  è contenuta in un intervallo del tipo  $[a, b]$ . Per la proprietà di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha un limite  $c \in [a, b]$ . Vogliamo dimostrare che

$$\lim_n a_n = c.$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Essendo la successione  $(a_n)_n$  di Cauchy,

$$\exists \bar{n} : \quad m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n} \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Inoltre, essendo  $\lim_k a_{n_k} = c$  e  $\lim_k n_k = +\infty$ ,

$$\exists \bar{k} : \quad k \geq \bar{k} \Rightarrow d(a_{n_k}, c) < \varepsilon \text{ e } n_k \geq \bar{n}.$$

Allora, per  $n \geq \bar{n}$ , si ha

$$d(a_n, c) \leq d(a_n, a_{n_{\bar{k}}}) + d(a_{n_{\bar{k}}}, c) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

il che pone fine alla dimostrazione. ■

Possiamo ora dimostrare il risultato seguente.

**Teorema.**  $\mathbb{R}^M$  è completo, per ogni  $M \geq 1$ .

Dimostrazione. Sia  $(\mathbf{a}_n)_n$  una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^M$ . Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : [m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}] \Rightarrow d(\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_n) < \varepsilon.$$

Essendo

$$d(\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_n) = \sqrt{\sum_{k=1}^M (a_m^k - a_n^k)^2},$$

si ha che, per ogni  $k = 1, 2, \dots, M$ ,

$$|a_m^k - a_n^k| \leq d(\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_n),$$

e da quanto sopra si deduce che le successioni  $(a_n^k)_n$  sono di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . Essendo  $\mathbb{R}$  completo, ciascuna di esse possiede limite in  $\mathbb{R}$ . Avremo pertanto

$$\lim_n a_n^1 = l_1, \quad \lim_n a_n^2 = l_2, \quad \dots, \quad \lim_n a_n^M = l_M.$$

Ponendo  $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_M)$ , abbiamo che  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^M$  e

$$\lim_n \mathbf{a}_n = \mathbf{l}. \quad \blacksquare$$

Si può dimostrare che lo spazio  $\ell_2$  introdotto alla fine dell'ultima lezione è anch'esso completo. La dimostrazione non verrà però affrontata in questo corso.

Introdurremo ora il concetto di “derivata” di una funzione definita su un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , a valori in  $\mathbb{R}$ .

Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , dominio di una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , e  $x_0 \in E$  un punto di accumulazione per  $E$ . Se  $x$  è un punto di  $E$  diverso da  $x_0$ , possiamo considerare il “rapporto incrementale”

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

si tratta del coefficiente angolare della retta nel piano passante per i punti  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x, f(x))$ .

**Definizione.** Qualora esso esista, chiameremo il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

“derivata” di  $f$  nel punto  $x_0$ , e lo denoteremo con uno dei seguenti simboli:

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Si dice invece che  $f$  è “derivabile” in  $x_0$  qualora la derivata sia un numero reale (e non  $+\infty$  o  $-\infty$ ). In tal caso, la retta nel piano passante per il punto  $(x_0, f(x_0))$  con coefficiente angolare  $f'(x_0)$ , di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

si chiama “retta tangente” al grafico di  $f$  nel punto  $(x_0, f(x_0))$ .

Si noti che, in alcuni casi, la derivata di  $f$  in  $x_0$  potrebbe essere solo un limite destro o un limite sinistro. Questo si verifica tipicamente quando  $E$  è un intervallo e  $x_0$  coincide con uno degli estremi.

Osserviamo inoltre che si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Esempi.** 1) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = mx + q$ . Allora

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(mx + q) - (mx_0 + q)}{x - x_0} = m.$$

La retta tangente, in questo caso, coincide con il grafico della funzione. Il caso particolare in cui  $m = 0$  ci mostra che la derivata di una funzione costante è sempre nulla.

2) Sia  $f(x) = x^n$ . Allora

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} \right) = nx_0^{n-1}.$$

Lo vediamo anche in un altro modo:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^k - x_0^n \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x_0^{n-k} h^{k-1} \right) \\ &= nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

3) Sia  $f(x) = e^x$ . Allora

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}.$$

4) Sia  $f(x) = \cos x$ . Allora

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0) \cos(h) - \sin(x_0) \sin(h) - \cos(x_0)}{h} \\ &= -\cos(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{1 - \cos(h)}{h^2} - \sin(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\ &= -\sin(x_0). \end{aligned}$$

5) Sia  $g(x) = \sin x$ . Allora

$$\begin{aligned}g'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cos(h) + \cos(x_0) \sin(h) - \sin(x_0)}{h} \\&= -\sin(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h^2} + \cos(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\&= \cos(x_0).\end{aligned}$$

## Lezione 26 del 06/12/2016:

### Alcune formule di derivazione

Il seguente teorema ci fornisce una caratterizzazione della derivabilità.

**Teorema.** *La funzione  $f$  è derivabile in  $x_0$  se e solo se esiste un numero reale  $\ell$  per cui si possa scrivere*

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + r(x),$$

dove  $r$  è una funzione tale che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

In tal caso, si ha  $\ell = f'(x_0)$ .

Dimostrazione. Supponiamo che  $f$  sia derivabile in  $x_0$ . Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Quindi, ponendo  $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ , essa verifica le proprietà richieste, con  $\ell = f'(x_0)$ .

Viceversa, supponiamo che  $f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + r(x)$ , con

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \ell(x - x_0)}{x - x_0} = 0,$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell.$$

■

Vediamo ora che la derivabilità implica la continuità.

**Teorema.** Se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora  $f$  è continua in  $x_0$ .

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right] \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 = f(x_0),\end{aligned}$$

il che è equivalente a dire che  $f$  è continua in  $x_0$ . ■

Vediamo ora alcune regole di derivazione che si usano abitualmente.

**Teorema.** Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono derivabili in  $x_0$ , anche  $f + g$  lo è, e si ha

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.\end{aligned}$$

**Teorema.** Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono derivabili in  $x_0$ , anche  $f \cdot g$  lo è, e si ha

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0},\end{aligned}$$

e si conclude, ricordando che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , essendo  $f$  continua in  $x_0$ . ■

Il caso particolare in cui  $g$  è costante con valore  $\alpha \in \mathbb{R}$  ci fornisce la formula seguente:

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0).$$

Inoltre, scrivendo  $f - g = f + (-1)g$ , si ha:

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

**Teorema.** Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono derivabili in  $x_0$  e  $g(x_0) \neq 0$ , anche  $\frac{f}{g}$  lo è, e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$



Dimostrazione. Si ha che  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ , per cui dimostreremo dapprima che  $\frac{1}{g}$  è derivabile in  $x_0$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x_0) - g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} = -\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Quindi,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g}(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} - f(x_0)\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2},$$

da cui la tesi. ■

**Esempi.** 1) Consideriamo la funzione “tangente”:

$$F(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Prendendo  $f(x) = \sin x$  e  $g(x) = \cos x$ , si ha:<sup>6</sup>

$$F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{1}{\cos^2(x_0)}.$$

2) Calcoliamo la derivata delle funzioni iperboliche. Sia

$$F(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left( e^x + \frac{1}{e^x} \right),$$

allora

$$F'(x_0) = \frac{1}{2} \left( e^{x_0} - \frac{1}{e^{x_0}} \right) = \frac{e^{x_0} - e^{-x_0}}{2} = \sinh(x_0).$$

Analogamente si vede che, se  $F(x) = \sinh(x)$ , allora  $F'(x_0) = \cosh(x_0)$ . Inoltre, se  $F(x) = \tanh(x)$ , allora, essendo  $F(x) = f(x)/g(x)$ , si ha

$$F'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2} = \frac{\cosh^2(x_0) - \sinh^2(x_0)}{\cosh^2(x_0)} = \frac{1}{\cosh^2(x_0)}.$$

3) Sono derivabili tutte le funzioni polinomiali

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

con derivata

$$F'(x_0) = n a_n x_0^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x_0^{n-2} + \dots + 2 a_2 x_0 + a_1.$$

---

<sup>6</sup>Qui e nel seguito scriveremo  $\cos^2(x)$  e  $\sin^2(x)$  per indicare  $(\cos(x))^2$  e  $(\sin(x))^2$ , rispettivamente. Anche in questo caso, si può scrivere  $\cos^2 x$  e  $\sin^2 x$ .

Ne segue che sono derivabili anche tutte le funzioni razionali, del tipo

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

dove  $p(x)$  e  $q(x)$  sono polinomi, con l'accortezza di scegliere un punto  $x_0$  in cui  $q(x_0) \neq 0$ .

## Lezione 27 del 07/12/2016:

### Ancora sulla derivata

Vediamo ora come si calcola la derivata di una funzione composta.

**Teorema.** Se  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $x_0$ , e  $g : E' \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile in  $f(x_0)$ , dove  $E'$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , contenente  $f(E)$ , per cui  $f(x_0)$  è di accumulazione, allora  $g \circ f$  è derivabile in  $x_0$ , e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dimostrazione. Ponendo  $y_0 = f(x_0)$ , si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x), \quad g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + r_2(y),$$

con

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_1(x)}{x - x_0} = 0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{r_2(y)}{y - y_0} = 0.$$

Introduciamo la funzione  $R_2 : E' \rightarrow \mathbb{R}$  così definita:

$$R_2(y) = \begin{cases} \frac{r_2(y)}{y - y_0} & \text{se } y \neq y_0, \\ 0 & \text{se } y = y_0. \end{cases}$$

Si noti che  $R_2$  è continua in  $y_0$ . Allora

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))[f(x) - f(x_0)] + r_2(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))[f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x)] + r_2(f(x)) \\ &= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)(x - x_0) + r_3(x), \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} r_3(x) &= g'(f(x_0))r_1(x) + r_2(f(x)) \\ &= g'(f(x_0))r_1(x) + R_2(f(x))(f(x) - f(x_0)). \end{aligned}$$

Quindi, essendo  $f$  continua in  $x_0$  e  $R_2$  continua in  $y_0 = f(x_0)$  con  $R_2(y_0) = 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_3(x)}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r_1(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} R_2(f(x)) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Ne segue che  $g \circ f$  è derivabile in  $x_0$  con derivata  $g'(f(x_0))f'(x_0)$ . ■

**Esempi.** 1) Sia  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $h(x) = \cos(e^x)$ . Si ha che  $h = g \circ f$ , con  $f(x) = e^x$  e  $g(y) = \cos y$ . Fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$ , si ha che  $f'(x_0) = e^{x_0}$ . Se  $y_0 = f(x_0)$ , abbiamo che  $g'(y_0) = -\sin y_0$ . Pertanto, la derivata di  $h$  in  $x_0$  è

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = -\sin(e^{x_0})e^{x_0}.$$

2) Sia ora  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $h(x) = e^{\cos x}$ . Allora  $h = g \circ f$ , con  $f(x) = \cos x$  e  $g(y) = e^y$ . Fissato  $x_0 \in \mathbb{R}$ , si ha che  $f'(x_0) = -\sin x_0$ . Se  $y_0 = f(x_0)$ , abbiamo che  $g'(y_0) = e^{y_0}$ . Pertanto, la derivata di  $h$  in  $x_0$  è

$$h'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = e^{\cos x_0}(-\sin x_0).$$

Vedremo ora come calcolare la derivata dell'inversa di una funzione invertibile.

**Teorema.** Siano  $I, J$  due intervalli e  $f : I \rightarrow J$  una funzione invertibile strettamente monotona. Se  $f$  è derivabile in  $x_0$  e  $f'(x_0) \neq 0$ , allora  $f^{-1}$  è derivabile in  $y_0 = f(x_0)$  e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dimostrazione. Applicando il teorema del limite di una funzione composta, abbiamo

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow \lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)};$$

Essendo  $f^{-1}$  continua, si ha che  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$ , da cui la tesi. ■

**Esempio.** Se  $f(x) = e^x$ , si ha che  $f^{-1}(y) = \ln y$ , per cui, essendo  $y_0 = e^{x_0}$ ,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}.$$

Sia ora  $\alpha$  un numero reale e  $h : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $h(x) = x^\alpha$ . Essendo

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x},$$

si ha che  $h = g \circ f$ , con  $f(x) = \alpha \ln x$  e  $g(y) = e^y$ . Allora

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^{\alpha \ln x} \alpha \frac{1}{x} = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Quindi, la stessa formula trovata per un esponente  $n$  naturale continua a valere anche per un esponente  $\alpha$  non intero.

Supponiamo ora che  $E$  sia un intervallo<sup>7</sup> e che  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  sia derivabile in ogni punto di  $E$  (diremo semplicemente che “ $f$  è derivabile”). Ad ogni

<sup>7</sup>Nel seguito considereremo solo intervalli non degeneri, ossia non ridotti ad un solo punto.

$x \in E$ , resta associato il numero reale  $f'(x)$ , per cui è ben definita una funzione  $f' : E \rightarrow \mathbb{R}$ , detta “funzione derivata”. Abbiamo la seguente tabella:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\dots$	$\dots$

Ci si può ora chiedere se la funzione derivata sia a sua volta derivabile in qualche punto di  $E$ . Se  $f'$  è derivabile in un punto  $x_0$ , chiameremo la sua derivata  $(f')'(x_0)$  “derivata seconda” di  $f$  in  $x_0$  e la denoteremo con uno dei seguenti simboli:

$$f''(x_0), \quad D^2 f(x_0), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Si può procedere per induzione e definire, in generale, la derivata  $n$ -esima di  $f$  in  $x_0$ , che denoteremo con uno dei seguenti simboli:

$$f^{(n)}(x_0), \quad D^n f(x_0), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x_0);$$

si ha  $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$ .

Se una funzione  $f$  possiede derivata  $n$ -esima in un punto  $x_0$  per ogni  $n \geq 1$ , si dice che essa è “derivabile infinite volte” in  $x_0$ . Ad esempio, la funzione esponenziale  $f(x) = e^x$  lo è, in ogni punto  $x_0 \in \mathbb{R}$ . In questo caso, si ha

$$D^n e^x = e^x, \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

## Lezione 28 del 12/12/2016:

### Alcuni esempi di calcolo delle derivate

Consideriamo ora, a titolo di esempio, la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e calcoliamone la derivata. Se  $x \neq 0$ , abbiamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= D \left[ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} \\ &= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

mentre, se  $x = 0$ ,

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

La funzione è quindi derivabile. Notiamo che non esiste il  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ , per cui la funzione  $f'$  non è continua (e pertanto nemmeno derivabile) in 0. La derivata seconda  $f''(0)$  quindi non esiste.

Passiamo ora alle funzioni iperboliche. La funzione  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente crescente e invertibile. Si vede infatti che

$$\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

La derivata si può calcolare direttamente, oppure usando la formula della funzione inversa: se  $y = \sinh(x)$ , si ha

$$D \sinh^{-1}(y) = \frac{1}{D \sinh(x)} = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

La funzione  $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  non è né iniettiva (è una funzione pari) né suriettiva: si ha  $\cosh x \geq 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . D'altra parte, la funzione  $F : [0, +\infty[ \rightarrow [1, +\infty[$ , definita da  $F(x) = \cosh x$ , è strettamente crescente, invertibile e la sua inversa  $F^{-1} : [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  è data da

$$F^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

Essa si denota spesso, impropriamente, con  $\cosh^{-1}$ . Calcoliamone la derivata: ponendo  $y = \cosh(x)$ , con  $x \geq 0$ , si ha

$$D \cosh^{-1}(y) = \frac{1}{D \cosh(x)} = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

La funzione  $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

non è suriettiva: si ha  $-1 < \tanh x < 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . D'altra parte, la funzione  $H : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$ , definita da  $H(x) = \tanh x$ , è strettamente crescente, invertibile e la sua inversa  $H^{-1} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  è data da

$$H^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+y}{1-y} \right).$$

Essa si denota spesso, impropriamente, con  $\tanh^{-1}$ . Ne calcoliamo la derivata: ponendo  $y = \tanh(x)$ , si ha

$$D \tanh^{-1}(y) = \frac{1}{D \tanh(x)} = \cosh^2(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(x)} = \frac{1}{1 - y^2}.$$

## Lezione 29 del 13/12/2016:

### La derivata delle funzioni monotone

Diremo che  $x_0 \in E$  è un “punto di massimo locale” per la funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  se esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  per cui  $x_0$  è punto di massimo della restrizione di  $f$  a  $U$ . Equivalentemente, se

$$\exists \delta > 0 : \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Analogamente per “punto di minimo locale”.

Supponiamo ora che  $E$  sia un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ , e calcoliamo la derivata nei punti  $x_0 \in E$  di massimo o di minimo locale, che siano di accumulazione sia da destra che da sinistra.<sup>8</sup>

**Teorema (di Fermat).** *Sia  $x_0 \in E$  un punto di accumulazione sia da destra che da sinistra, e sia  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile in  $x_0$ . Se inoltre  $x_0$  è un punto di massimo o di minimo locale per  $f$ , allora  $f'(x_0) = 0$ .*

Dimostrazione. Se  $x_0$  è punto di massimo locale, per  $x$  in un intorno di  $x_0$  contenuto in  $E$  si ha che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x < x_0, \\ \leq 0 & \text{se } x > x_0. \end{cases}$$

Siccome  $f$  è derivabile in  $x_0$ , abbiamo che esiste il limite del rapporto incrementale e coincide con i limiti destro e sinistro:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

<sup>8</sup>Questo significa che, per ogni  $\rho > 0$ , gli insiemi  $]x_0 - \rho, x_0] \cap E$  e  $[x_0, x_0 + \rho[ \cap E$  hanno entrambi infiniti elementi.

Da quanto sopra,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

e quindi deve essere  $f'(x_0) = 0$ . Nel caso in cui  $x_0$  sia un punto di minimo locale, si procede in modo analogo. ■

Supponiamo che  $I$  sia un intervallo non degenere contenuto in  $E$ . Diremo che la funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  è “derivabile su  $I$ ” se è derivabile in ogni punto  $x_0 \in I$ .

**Teorema (di Rolle).** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, derivabile su  $]a, b[$  e tale che*

$$f(a) = f(b),$$

*allora esiste un punto  $\xi \in ]a, b[$  tale che  $f'(\xi) = 0$ .*

Dimostrazione. Se la funzione è costante, allora la sua derivata si annulla in tutti i punti, e la conclusione è banalmente vera. Supponiamo ora che  $f$  non sia costante. Esiste quindi un  $\bar{x} \in ]a, b[$  tale che

$$f(\bar{x}) < f(a) = f(b), \quad \text{oppure} \quad f(\bar{x}) > f(a) = f(b).$$

Supponiamo valga il primo caso. Per il teorema di Weierstrass,  $f$  ha minimo in  $[a, b]$ , e nel caso considerato un punto di minimo deve necessariamente essere in  $]a, b[$ . Sia  $\xi \in ]a, b[$  un tale punto. Per il teorema di Fermat, avremo che  $f'(\xi) = 0$ .

La situazione è analoga nel secondo caso. Per il teorema di Weierstrass,  $f$  ha massimo in  $[a, b]$ , e in questo caso un punto di massimo deve necessariamente essere in  $]a, b[$ . Se  $\xi \in ]a, b[$  è un tale punto, per il teorema di Fermat avremo che  $f'(\xi) = 0$ . ■

Enunciamo ora una generalizzazione del teorema di Rolle.

**Teorema (di Lagrange).** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, derivabile su  $]a, b[$ , allora esiste un punto  $\xi \in ]a, b[$  tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a).$$

Si ha che  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, derivabile su  $]a, b[$  e tale che

$$g(a) = 0 = g(b).$$

Per il teorema di Rolle, esiste un punto  $\xi \in ]a, b[$  tale che

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

da cui la tesi. ■

**Corollario.** Sia  $I$  un intervallo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, derivabile su  $\overset{\circ}{I}$ . Si ha che:

- a) se  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è crescente;
- b) se  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è strettamente crescente;
- c) se  $f'(x) \leq 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è decrescente;
- d) se  $f'(x) < 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è strettamente decrescente;
- e) se  $f'(x) = 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è costante.

Dimostrazione. Dimostriamo a): siano  $x_1 < x_2$  in  $I$ . Per il teorema di Lagrange, esiste un  $\xi \in ]x_1, x_2[$  tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Quindi, essendo  $f'(\xi) \geq 0$ , si deve avere che  $f(x_1) \leq f(x_2)$ . Questo dimostra che  $f$  è crescente.

Le altre si dimostrano in modo analogo. ■

Si noti che, se  $f$  è crescente, allora ogni rapporto incrementale di  $f$  è sempre maggiore o uguale a zero e quindi  $f'(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ . Quindi in a), e così anche in c) ed e), vale anche l'implicazione opposta. Ma così non è per b) e d): se  $f$  è strettamente crescente, in generale non è vero che  $f'(x) > 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ : la derivata potrebbe annullarsi in qualche punto (vedi ad esempio  $f(x) = x^3$ ).

Tenuto conto della formula per la derivata e delle proprietà di segno delle funzioni trigonometriche, abbiamo che

$$\begin{aligned} \cos x \text{ è } & \begin{cases} \text{strettamente decrescente su } [0, \pi], \\ \text{strettamente crescente su } [\pi, 2\pi], \end{cases} \\ \sin x \text{ è } & \begin{cases} \text{strettamente crescente su } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \text{strettamente decrescente su } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases} \end{aligned}$$

Consideriamo le funzioni  $F : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  e  $G : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$  definite da  $F(x) = \cos x$  e  $G(x) = \sin x$ . Sono strettamente monotone, quindi iniettive. Inoltre, essendo continue, la loro immagine è un intervallo e, siccome  $F(\pi) = -1 = G(-\frac{\pi}{2})$  e  $F(0) = 1 = G(\frac{\pi}{2})$ , deve coincidere con  $[-1, 1]$ . Esse sono pertanto biiettive. Chiameremo le due funzioni  $F^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  e  $G^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  rispettivamente “arco coseno” e “arco seno” e scriveremo

$$F^{-1}(y) = \arccos y, \quad G^{-1}(y) = \arcsin y.$$

La prima è strettamente decrescente, la seconda strettamente crescente. Calcoliamone le derivate: ponendo  $y = F(x)$ , per  $x \in ]0, \pi[$  si ha

$$(F^{-1})'(y) = \frac{1}{F'(x)} = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$



mentre ponendo  $y = G(x)$ , per  $x \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  si ha

$$(G^{-1})'(y) = \frac{1}{G'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Si può notare che la funzione  $\arccos + \arcsin$  ha derivata nulla e pertanto è costante. Calcolandola in 0, si trova quindi che

$$\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}, \quad \text{per ogni } y \in [-1, 1].$$

Consideriamo ora la funzione  $H : ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $H(x) = \tan x$ . Per lo stesso tipo di considerazioni, essa risulta invertibile. Chiameremo la funzione  $H^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  “arco tangente” e scriveremo

$$H^{-1}(y) = \arctan y.$$

Essa è strettamente crescente e si ha:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \arctan y = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan y = \frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamone la derivata: ponendo  $y = H(x)$ , per  $x \in ] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  si ha

$$(H^{-1})'(y) = \frac{1}{H'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Riassumiamo nella tabella sottostante le derivate delle funzioni elementari fin qui trovate.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^x$	$e^x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\dots$	$\dots$
$\sinh x$	$\cosh x$		
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$		

## Lezione 30 del 14/12/2016:

### Una proprietà della funzione derivata

In questa lezione abbiamo principalmente svolto degli esercizi. Ne è risultato particolarmente utile un teorema in cui si afferma che la derivata di una funzione derivabile ha una proprietà analoga a quella vista, per le funzioni continue, nell'enunciato del teorema degli zeri.

**Teorema (di Darboux).** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione derivabile tale che*

$$f'(a) < 0 < f'(b) \quad \text{oppure} \quad f'(a) > 0 > f'(b),$$

*allora esiste un  $c \in ]a, b[$  tale che  $f'(c) = 0$ .*

Dimostrazione. Consideriamo il primo caso. Sia  $c$  un punto di minimo di  $f$ , la cui esistenza è garantita dal teorema di Weierstrass. Essendo  $f'(a) < 0 < f'(b)$ , si vede che il punto  $c$  deve essere interno a  $[a, b]$ , e il teorema di Fermat ci dice che  $f'(c) = 0$ . Se invece  $f'(a) > 0 > f'(b)$ , si ragiona in maniera analoga, considerando un punto di massimo anziché di minimo. ■

Come conseguenza del teorema di Darboux, abbiamo che la derivata di una funzione derivabile “manda intervalli in intervalli”.

**Corollario.** *Sia  $E$  un intervallo in  $\mathbb{R}$  e  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile. Se  $I \subseteq E$  è un intervallo, allora anche  $f'(I)$  è un intervallo.*

Dimostrazione. Escludendo i casi banali in cui  $I$  o  $f'(I)$  consistono di un unico punto, prendiamo  $\alpha, \beta \in f'(I)$ , con  $\alpha < \beta$  e sia  $\gamma$  tale che  $\alpha < \gamma < \beta$ . Vogliamo vedere che  $\gamma \in f'(I)$ . Consideriamo la funzione  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(x) = f(x) - \gamma x.$$

Siano  $a, b$  in  $I$  tali che  $f'(a) = \alpha$  e  $f'(b) = \beta$ . Essendo  $I$  un intervallo, la funzione  $g$  è definita su  $[a, b]$  (o  $[b, a]$ , nel caso in cui  $b < a$ ) ed è ivi derivabile. Inoltre,  $g'(a) < 0 < g'(b)$  e quindi, per il teorema di Darboux, esiste un  $c \in ]a, b[$  tale che  $g'(c) = 0$ . Essendo  $g'(x) = f'(x) - \gamma$ , si ha che  $f'(c) = \gamma$ . ■

## Lezione 31 del 15/12/2016:

### Convessità e concavità

Sia  $I$  un intervallo non degenere e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

**Definizione.** *Diremo che  $f$  è “convessa” se, comunque presi tre punti  $x_1 < x_2 < x_3$  in  $I$ , si ha che*

$$(a) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Vediamo che sono equivalenti ad (a) le seguenti:

$$(b) \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

$$(c) \quad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_2) &\leq (f(x_3) - f(x_2))(x_2 - x_1) \\ \Leftrightarrow (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_1 + x_1 - x_2) &\leq (f(x_3) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2))(x_2 - x_1) \\ \Leftrightarrow (f(x_2) - f(x_1))(x_3 - x_1) &\leq (f(x_3) - f(x_1))(x_2 - x_1) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &\leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \end{aligned}$$

per cui (a)  $\Leftrightarrow$  (b); analogamente si vede che (a)  $\Leftrightarrow$  (c).

Osserviamo che  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa se e solo se, per ogni  $x_0$  in  $I$ , la funzione “rapporto incrementale”  $F : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

è crescente. Infatti, presi  $x, x'$  in  $I \setminus \{x_0\}$  tali che  $x < x'$ , si ha  $F(x) \leq F(x')$ , e questo accade in tutti e tre i casi possibili:  $x < x' < x_0$ , oppure  $x < x_0 < x'$ , oppure  $x_0 < x < x'$ . A questo punto, diventa naturale la seguente caratterizzazione della convessità.

**Teorema.** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, derivabile su  $\overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è convessa se e solo se  $f'$  è crescente su  $\overset{\circ}{I}$ .

Dimostrazione. Supponiamo che  $f$  sia convessa. Siano  $\alpha < \beta$  due punti in  $\overset{\circ}{I}$ . Se  $\alpha < x < \beta$ , per (b) si ha

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

da cui, essendo  $f$  derivabile in  $\alpha$ ,

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Analogamente, per (c) si ha

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \leq \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}.$$

da cui, essendo  $f$  derivabile in  $\beta$ ,

$$f'(\beta) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \geq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Ne segue che  $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$ , il che dimostra che  $f'$  è crescente.

Viceversa, supponiamo  $f'$  crescente. Presi  $x_1 < x_2 < x_3$ , per il teorema di Lagrange abbiamo che

$$\begin{aligned}\exists \xi_1 \in ]x_1, x_2[: f'(\xi_1) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ \exists \xi_2 \in ]x_2, x_3[: f'(\xi_2) &= \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.\end{aligned}$$

Essendo  $f'$  crescente, si ha che  $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ ; ne segue (a). ■

Diremo che  $f$  è “strettamente convessa” se, comunque presi tre punti  $x_1 < x_2 < x_3$  in  $I$ , si ha

$$(a') \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Equivalentemente, possiamo scrivere le analoghe

$$(b') \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1},$$

$$(c') \quad \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Vale la seguente caratterizzazione.

**Teorema.** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è continua, derivabile su  $\overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è strettamente convessa se e solo se  $f'$  è strettamente crescente su  $\overset{\circ}{I}$ .

Dimostrazione. Dovremo modificare un pochino la dimostrazione del teorema precedente. Supponiamo che  $f$  sia strettamente convessa e siano  $\alpha < \beta$  due punti in  $\overset{\circ}{I}$ . Se  $\alpha < x < \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ , per (b') si ha

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} < \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$

da cui

$$f'(\alpha) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \leq \frac{f(\frac{\alpha+\beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Analogamente, se  $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) < x < \beta$ , per (c') si ha

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} < \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x}.$$

da cui

$$f'(\beta) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(\beta) - f(x)}{\beta - x} \geq \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} > \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Ne segue che  $f'(\alpha) < f'(\beta)$ , il che dimostra che  $f'$  è strettamente crescente.

Viceversa, supponiamo  $f'$  crescente. Presi  $x_1 < x_2 < x_3$ , usando il teorema di Lagrange, esattamente come per il teorema precedente si dimostra che vale  $(a')$ . ■

Diremo che  $f$  è “concava” se la funzione  $(-f)$  è convessa o, equivalentemente, se vale  $(a)$  ma con il segno di disuguaglianza invertito. Diremo che  $f$  è “strettamente concava” se la funzione  $(-f)$  è strettamente convessa o, equivalentemente, se vale  $(a')$  ma con il segno di disuguaglianza invertito. Si possono scrivere, naturalmente, gli analoghi teoremi che caratterizzano la concavità (o la stretta concavità) di  $f$  con la decrescenza (o la stretta decrescenza) di  $f'$ .

Arriviamo quindi al seguente corollario, che trova spesso applicazione in situazioni pratiche.

**Corollario.** *Sia  $I$  un intervallo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua, derivabile due volte su  $\overset{\circ}{I}$ . Si ha che:*

- a) se  $f''(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è convessa;
- b) se  $f''(x) > 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è strettamente convessa;
- c) se  $f''(x) \leq 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è concava;
- d) se  $f''(x) < 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , allora  $f$  è strettamente concava.

Analogamente a quanto già osservato per le funzioni monotone, anche qui in a) e c) valgono anche le implicazioni opposte: se  $f$  è convessa, allora  $f''(x) \geq 0$  per ogni  $x \in \overset{\circ}{I}$ , e similmente se  $f$  è concava. Ma così non è per b) e d) (vedi ad esempio  $f(x) = x^4$ ).

**Esempi.** 1) La funzione esponenziale  $f(x) = e^x$  è strettamente convessa: si ha

$$f''(x) = e^x > 0,$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . La sua inversa  $\ln(x)$ , il logaritmo naturale, è una funzione strettamente concava.

2) Tenuto conto delle derivate delle funzioni trigonometriche, si ha che:

$$\cos x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \text{strettamente convessa su } \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \end{cases}$$

$$\sin x \text{ è } \begin{cases} \text{strettamente concava su } [0, \pi], \\ \text{strettamente convessa su } [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

I punti che separano un intervallo in cui si ha convessità da un altro in cui si ha concavità si chiamano “punti di flesso”.

Analoghe considerazioni si possono fare per le altre funzioni elementari fin qui studiate.

Sarà utile la seguente proprietà delle funzioni convesse derivabili: in breve, essa dice che il loro grafico sta sempre al di sopra delle rette ad esso tangenti.

**Teorema.** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  è convessa e derivabile in un punto  $x_0 \in I$ , allora

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

per ogni  $x \in I$ .

Dimostrazione. La disuguaglianza è sicuramente verificata se  $x = x_0$ . Se  $x > x_0$ , preso  $h > 0$  tale che  $h < x - x_0$ , per la convessità si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Passando al limite per  $h \rightarrow 0$ , si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0),$$

da cui la disuguaglianza cercata.

Se  $x < x_0$ , preso  $h < 0$  tale che  $|h| < x_0 - x$ , per la convessità si ha

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq \frac{f(x_0) - f(x_0 + h)}{-h},$$

e si conclude analogamente. ■

## Lezione 32 del 20/12/2016:

### Le regole di de l'Hôpital

Iniziamo con l'introdurre la seguente generalizzazione del teorema di Lagrange.

**Teorema (di Cauchy).** Se  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sono due funzioni continue, derivabili su  $]a, b[$ , con  $g'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in ]a, b[$ , allora esiste un punto  $\xi \in ]a, b[$  tale che

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x).$$

Si vede che essa è continua, derivabile su  $]a, b[$ , e  $h(a) = h(b)$ . Per il teorema di Rolle, esiste un punto  $\xi \in ]a, b[$  tale che  $h'(\xi) = 0$ . Ne segue la tesi. ■

Il seguente risultato è noto come “regola di de l'Hôpital” nel caso indeterminato del tipo  $\frac{0}{0}$ .

**Teorema.** Sia  $I$  un intervallo<sup>9</sup> contenente  $x_0$  e  $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili, con  $g'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I \setminus \{x_0\}$ , tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e i due coincidono.

Dimostrazione. Sia  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (possibilmente  $l = +\infty$  o  $-\infty$ ); estendiamo le due funzioni anche al punto  $x_0$  ponendo  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ . In questo modo  $f$  e  $g$  saranno continue su tutto  $I$ . Per il teorema di Cauchy, per ogni  $x \neq x_0$  esiste un punto  $\xi_x \in ]x_0, x[$  (che dipende da  $x$ )<sup>10</sup> tale che

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Se  $x \rightarrow x_0$ , si ha che anche  $\xi_x \rightarrow x_0$ , per cui, usando il teorema sul limite di una funzione composta,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l.$$

■

Il teorema precedente non esclude la possibilità che  $x_0$  sia un estremo dell'intervallo  $I$ , nel qual caso si parlerà di limite destro o limite sinistro.

La regola di de l'Hôpital si estende anche ai casi in cui  $x_0 = +\infty$  o  $-\infty$ . Vediamo qui il primo caso.

**Teorema.** Sia  $I$  un intervallo non limitato superiormente e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili, con  $g'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$ , tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e i due coincidono.

<sup>9</sup>Qui e in seguito si sottintende che l'intervallo  $I$  sia non degenere.

<sup>10</sup>Qui e nel seguito, nel caso in cui  $x$  sia minore di  $x_0$ , con il simbolo  $]x_0, x[$  si intende indicare l'intervallo  $]x, x_0[$ .

Dimostrazione. Sia  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ; definendo le due funzioni  $F(x) = f(x^{-1})$  e  $G(x) = g(x^{-1})$ , si ha che  $G'(x) \neq 0$  per ogni  $x$  e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 0.$$

Inoltre,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x^{-1})(-x^{-2})}{g'(x^{-1})(-x^{-2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x^{-1})}{g'(x^{-1})} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f'(y)}{g'(y)} = l.$$

Per il teorema precedente, si ha che anche  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{G(x)} = l$ ; pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u^{-1})}{g(u^{-1})} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{F(u)}{G(u)} = l. \quad \blacksquare$$

Risulta talvolta utile il seguente

**Teorema.** Sia  $I$  un intervallo contenente  $x_0$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione, continua in  $x_0$ , e derivabile in ogni  $x \neq x_0$ . Se esiste il limite

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x),$$

allora esiste anche la derivata di  $f$  in  $x_0$  e si ha  $f'(x_0) = l$ .

Dimostrazione. Siano  $F(x) = f(x) - f(x_0)$  e  $G(x) = x - x_0$ . Abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} G(x) = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l.$$

La regola di de l'Hôpital ci dice quindi che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = l,$$

ossia  $f'(x_0) = l$ . ■

Vediamo ora che le regole di de l'Hôpital continuano a valere anche nei casi indeterminati del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ , dove  $\infty$  può essere  $+\infty$  o  $-\infty$ . Ad esempio, nel caso in cui  $x_0$  sia un numero reale, si ha il seguente

**Teorema.** Sia  $I$  un intervallo contenente  $x_0$  e  $f, g : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili, con  $g'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I \setminus \{x_0\}$ , tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty.$$

Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e i due coincidono.



Dimostrazione. Sia  $l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Supponiamo dapprima  $l \in \mathbb{R}$ , e che  $x_0$  non sia l'estremo destro dell'intervallo  $I$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste un  $\delta_1 > 0$  tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per il teorema di Cauchy, per ogni  $x \in ]x_0, x_0 + \delta_1[$ , esiste un  $\xi_x \in ]x, x_0 + \delta_1[$  tale che

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x_0 + \delta_1) - f(x)}{g(x_0 + \delta_1) - g(x)},$$

per cui

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{f(x_0 + \delta_1) - f(x)}{g(x_0 + \delta_1) - g(x)} - l \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Possiamo inoltre supporre che  $\delta_1$  sia tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ e } g(x) \neq 0.$$

Scriviamo

$$\frac{f(x_0 + \delta_1) - f(x)}{g(x_0 + \delta_1) - g(x)} = \psi(x) \frac{f(x)}{g(x)},$$

e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1 - f(x_0 + \delta_1)/f(x)}{1 - g(x_0 + \delta_1)/g(x)} = 1.$$

Pertanto, esiste un  $\delta \in ]0, \delta_1[$  tale che, se  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , allora

$$\psi(x) > 0, \quad \psi(x)(l + \varepsilon) \geq l + \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } \psi(x)(l - \varepsilon) \leq l - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi, se  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , si ha

$$l - \varepsilon \leq \frac{1}{\psi(x)} \left( l - \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq \frac{1}{\psi(x)} \frac{f(x_0 + \delta_1) - f(x)}{g(x_0 + \delta_1) - g(x)} \leq \frac{1}{\psi(x)} \left( l + \frac{\varepsilon}{2} \right) \leq l + \varepsilon,$$

da cui

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| \leq \varepsilon.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

In modo del tutto analogo si dimostra che, se  $x_0$  non è l'estremo sinistro dell'intervallo  $I$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

per cui il teorema è dimostrato, nel caso in cui  $l \in \mathbb{R}$ .

Supponiamo ora  $l = +\infty$  e che  $x_0$  non sia l'estremo destro dell'intervallo  $I$ . Fissiamo  $\alpha > 0$ . Allora esiste un  $\delta_1 > 0$  tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \geq 2\alpha.$$

Procedendo come sopra, possiamo dedurre che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow \frac{f(x_0 + \delta_1) - f(x)}{g(x_0 + \delta_1) - g(x)} \geq 2\alpha.$$

Possiamo inoltre supporre che  $\delta_1$  sia tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ e } g(x) \neq 0.$$

Definiamo  $\psi(x)$  come sopra. Esiste un  $\delta \in ]0, \delta_1[$  tale che

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow \psi(x) \geq \frac{1}{2}.$$

Quindi, se  $x_0 < x < x_0 + \delta$ , si ha

$$\frac{1}{\psi(x)} \frac{f(x_0 + \delta_1) - f(x)}{g(x_0 + \delta_1) - g(x)} \geq \frac{1}{\psi(x)} 2\alpha \geq \alpha,$$

da cui

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \alpha.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

In modo del tutto analogo si dimostra che, se  $x_0$  non è l'estremo sinistro dell'intervallo  $I$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$

per cui il teorema è dimostrato, nel caso in cui  $l = +\infty$ . Il caso  $l = -\infty$  è del tutto analogo al precedente. ■

Anche nel caso indeterminato del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$  si possono scrivere gli analoghi teoremi se  $x_0 = +\infty$  o  $-\infty$ . Vediamo il primo caso.

**Teorema.** *Sia  $I$  un intervallo non limitato superiormente e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili, con  $g'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in I$ , tali che*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty.$$

*Se esiste il limite*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

*allora esiste anche il limite*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)},$$

*e i due coincidono.*

La dimostrazione è analoga a quella del caso  $\frac{0}{0}$ .

## Lezione 33 del 21/12/2016:

### La formula di Taylor

Il seguente teorema ci fornisce la cosiddetta “formula di Taylor con resto di Lagrange”.

**Teorema.** Siano  $x \neq x_0$  due punti di un intervallo  $I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione derivabile  $n + 1$  volte su  $I$ . Allora esiste un  $\xi \in ]x_0, x[$  tale che

$$f(x) = p_n(x) + r_n(x),$$

dove

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

è il “polinomio di Taylor di grado  $n$  associato alla funzione  $f$  nel punto  $x_0$ ” e

$$r_n(x) = \frac{1}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

è il “resto di Lagrange”.

Dimostrazione. Osserviamo che il polinomio  $p_n$  soddisfa alle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} p_n(x_0) = f(x_0), \\ p'_n(x_0) = f'(x_0), \\ p''_n(x_0) = f''(x_0), \\ \vdots \\ p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \end{cases}$$

Applicando il teorema di Cauchy, troviamo un  $\xi_1 \in ]x_0, x[$  tale che

$$\frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{(f(x) - p_n(x)) - (f(x_0) - p_n(x_0))}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi_1) - p'_n(\xi_1)}{(n + 1)(\xi_1 - x_0)^n}.$$

Applicando di nuovo il teorema di Cauchy, troviamo un  $\xi_2 \in ]x_0, \xi_1[$  tale che

$$\frac{f'(\xi_1) - p'_n(\xi_1)}{(n + 1)(\xi_1 - x_0)^n} = \frac{(f'(\xi_1) - p'_n(\xi_1)) - (f'(x_0) - p'_n(x_0))}{(n + 1)(\xi_1 - x_0)^n - (n + 1)(x_0 - x_0)^n} = \frac{f''(\xi_2) - p''_n(\xi_2)}{(n + 1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}}.$$

Procedendo per induzione, troviamo  $n + 1$  elementi  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}$  tali che

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} &= \frac{f'(\xi_1) - p'_n(\xi_1)}{(n + 1)(\xi_1 - x_0)^n} \\ &= \frac{f''(\xi_2) - p''_n(\xi_2)}{(n + 1)n(\xi_2 - x_0)^{n-1}} \\ &\vdots \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1}) - p_n^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n + 1)!(\xi_{n+1} - x_0)^0}. \end{aligned}$$

Se  $x > x_0$ , si ha

$$x_0 < \xi_{n+1} < \xi_n < \dots < \xi_2 < \xi_1 < x,$$

mentre se  $x < x_0$  si ha l'ordine opposto. Essendo la derivata  $(n+1)$ -esima di un polinomio di grado  $n$  sempre nulla, si ha che  $p_n^{(n+1)}(\xi_{n+1}) = 0$  e ponendo  $\xi = \xi_{n+1}$  si ottiene la tesi. ■

Si noti che il polinomio di Taylor  $p_n$  potrebbe in realtà avere un grado inferiore a  $n$ ; ci sono addirittura delle funzioni non costanti per cui esso risulta di grado 0 (cioè  $p_n$  è una funzione costante) per ogni scelta di  $n$ .

**Esempi.** Determiniamo il polinomio di Taylor di alcune funzioni considerando per semplicità il caso  $x_0 = 0$ .

1) Sia  $f(x) = e^x$ . Si ha:

$$p_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) Sia  $f(x) = \cos x$ . Allora, se  $n = 2m$  o  $n = 2m + 1$ ,

$$p_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

3) Sia  $f(x) = \sin x$ . Allora, se  $n = 2m + 1$  o  $n = 2m + 2$ ,

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

**Teorema.** Per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , si ha che

$$e^x = \lim_n \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

Dimostrazione. La formula è chiaramente vera se  $x = 0$ . Se  $x \neq 0$ , per la formula di Taylor con resto di Lagrange, esiste un  $\xi \in ]0, x[$  tale che  $f(x) = p_n(x) + r_n(x)$ , con

$$r_n(x) = e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Vogliamo dimostrare che  $\lim_n r_n(x) = 0$ . Osserviamo che

$$|r_n(x)| \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

e sappiamo che, per ogni  $a > 0$ , si ha  $\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0$ . Ne segue la tesi. ■

Scriveremo brevemente

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

la “serie di Taylor” associata alla funzione esponenziale nel punto  $x_0 = 0$ .

Con analoga dimostrazione, si ha pure il seguente

**Teorema.** Per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , si ha che

$$\begin{aligned}\cos x &= \lim_m \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \right), \\ \sin x &= \lim_m \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right).\end{aligned}$$

Scriveremo brevemente:

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

## Lezione 34 del 22/12/2016:

### Esempi di polinomi di Taylor

Calcoleremo i polinomi di Taylor associati ad alcune funzioni elementari, nel punto  $x_0 = 0$ . Iniziamo con la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Si dimostra per induzione che la sua derivata  $n$ -esima ha la seguente espressione:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Pertanto,  $f^{(n)}(0) = n!$  e il polinomio cercato è

$$p_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n.$$

Si procede similmente per la funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ , per la quale troviamo

$$p_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n.$$

Consideriamo ora la funzione  $f(x) = \ln(1+x)$ . La sua derivata coincide con la funzione precedente, per cui si ricava rapidamente

$$p_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Una altro esempio per cui è facile calcolare il polinomio di Taylor è la funzione  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , per cui si ha che, se  $n = 2m$  o  $n = 2m + 1$ ,

$$p_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^m x^{2m}.$$

A questo punto risulta agevole trattare la funzione  $f(x) = \arctan x$ , la cui derivata coincide con la funzione precedente, per cui si ha che, se  $n = 2m + 1$  o  $n = 2m + 2$ ,

$$p_n(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}.$$

Da quanto visto finora, non sarà difficile trovare le espressioni generali dei polinomi di Taylor delle funzioni iperboliche  $\cosh x$ ,  $\sinh x$ , nonchè di  $\tanh^{-1} x$ . Non risulta invece elementare la formula del polinomio di Taylor per le funzioni  $\tan x$  e  $\tanh x$ , di cui riporteremo solo i primi termini, nella seguente tabella riassuntiva.

$f(x)$	$p_n(x)$ nel punto $x_0 = 0$
$e^x$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!}$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
$\tan x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$
$\arctan x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$
$\cosh x$	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2m}}{(2m)!}$
$\sinh x$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
$\tanh x$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$
$\tanh^{-1} x$	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$