

Tutorato di Analisi Matematica 1 – 2009/10 – N.8

key words: rapporto incrementale, derivata, funzione derivabile, funzione derivata, derivate destre e sinistre, funzioni di classe C^m e C^∞ , derivata delle funzioni elementari, derivata della somma, del prodotto, del quoziente, derivata della funzione composta, derivata dell'inversa, massimi e minimi locali e assoluti, punti di massimo e minimo locale e assoluto, punti stazionari, teoremi di Fermat, Rolle, Cauchy, Lagrange.

es. 1 Si calcoli la derivata delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{lll}
 x^4 + 4x^3 + 12x + 1, & \frac{x^5 + 7x^2}{2x^2 + 1}, & 2^x + \log_{10} x^2 \\
 \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right), & \sin(x^2) - \sin^2 x, & \frac{\log(1 + x^3)}{x}, \\
 (x + \cos(\sqrt{x}))^{\frac{1}{3}}, & \frac{\sqrt{x^3 + x + \cos x}}{\arccos x}, & (\sin(x^2))^{\cos x}.
 \end{array}$$

es. 2 Si considerino le funzioni sotto elencate sul dominio a fianco indicato, si dica se hanno massimo o minimo assoluto ed eventualmente si determinino i valori dei massimi e minimi e i relativi punti (di massimo e minimo)

$$\begin{array}{ll}
 x + \frac{1}{x} &]0, +\infty[, \quad x^2 + \sin x \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\
 \frac{x}{1 + x^2} & [-1, 1], \quad (x^2 + x)e^{x^2} \quad [0, +\infty[, \\
 x - \log(x + 1) & [0, 1], \quad \arctan x + \frac{1}{x^2 + 1} \quad [0, +\infty[. \\
 |x^2 - x - 2| & [-3, 3], \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \mathbb{R}.
 \end{array}$$

es. 3 Si dica se è derivabile la funzione $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ così definita

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

ed eventualmente se ne calcoli la derivata.

es. 4 Si determini l'equazione della retta tangente alle funzioni sotto elencate nel punto del dominio a fianco indicato

$$\begin{array}{ll}
 x + 1 & \bar{x} = 1, \quad \sin x \quad \bar{x} = 0, \\
 x^2 + 1 & \bar{x} = 1, \quad x^2 e^x \quad \bar{x} = e, \\
 \log x & \bar{x} = 1, \quad \arccos x + x \quad \bar{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{array}$$

es. 5 Nel piano cartesiano si consideri il punto $P = (1, 1)$ e l'insieme $S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1\}$. Si dimostri che tra tutti i punti di S ne esiste uno e uno solo di distanza minima da P e lo si determini. Detto Q tale punto, si determini l'equazione della retta tangente a S per Q e si verifichi che tale retta è ortogonale al segmento PQ .

es. 6 Si determini, al variare di λ in \mathbb{R} , il numero delle soluzioni dell'equazione

$$\lambda x - \log(x + 1) = 0.$$

es. 7 Una palla è lanciata verso il basso dalla cima di una torre alta 30 m con velocità iniziale di 2 m/s. Quanto tempo impiega a raggiungere il suolo? (sugg.: la legge oraria è $f(t) = 30 - 2t - 4,9t^2$). Qual è la velocità media? In quale istante velocità media e velocità istantanea coincidono?

es. 8 Un faro è situato a 2 km dalla costa, che risulta essere rettilinea. La lampada del faro compie 3 giri al minuto. Immaginiamo che la luce del faro illumini la linea di costa con una "macchia di luce". Con quale velocità si muove la macchia di luce lungo la linea di costa, mentre passa per un punto che si trova a 4 km dal piede della perpendicolare alla costa che passa per il faro?

es. 9 Una scala a pioli è lunga 10 m ed è appoggiata in un suo punto intermedio a una staccionata verticale alta 3 m. La base della scala si trova a 4 m dalla base della staccionata e si muove strisciando sul terreno orizzontale, con velocità di 0,2 m/s. Trovare legge oraria e velocità dell'estremo libero della scala.

es. 10 Un venditore di automobili guadagna di 1000 Euro per ogni auto venduta. Un'inchiesta di mercato indica che scontando le auto di 100 Euro (e quindi accontentandosi, il venditore, di guadagnare 900 Euro per ogni auto) le vendite aumenterebbero del 5%, scontandole di 200 del 10% e così via. Supponendo che il venditore, senza praticare sconti, venderebbe 100 auto, qual è lo sconto che massimizza i guadagni? Cosa succederebbe se l'incremento delle vendite fosse proporzionale al quadrato della percentuale dello sconto?

es. 11 Un autobus nella sua corsa abituale fa $n + 1$ fermate, compresi i capolinea. Ad ogni fermata salgono sull'autobus tanti passeggeri quante sono le fermate successive e ne scendono tanti quante le fermate precedenti. Quanti passeggeri ci sono, al massimo, sull'autobus?

es. 12 Un rettangolo con gli assi paralleli agli assi coordinati è inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Si determini il rettangolo di area massima.