Tutorato di Analisi Matematica 1 – 2009/10 – N.7

Key words: proprietà dei limiti, unicità, permanenza del segno, confronto e 2 carabinieri, operazioni e forme indeterminate, limite delle restrizioni, limite delle funzioni monotone, limite delle funzioni composte, funzioni continue in un punto, funzioni continue tra spazi metrici, caratterizzazione delle funzioni continue tramite le successioni, prime proprietà delle funzioni continue, punti di discontinuità, teorema degli zeri, teorema dei valori intermedi, teorema di compattezza, teorema di Weierstrass.

es. 1 Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}-e^{-x-1}}{x^2+1}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^3 - \log x^2}{\sqrt{x}},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[4]{\sin x}\log(1-\cos x), \qquad \lim_{x\to+\infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2}),$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\arctan x} - e^{\frac{\pi}{2}}}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\log\sqrt{x+1} - \log\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{\arctan(x+1) - \arctan x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{\log x} - (\log x)^x,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} (\sin x)^{\tan x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x}-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{\log(x+1)},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt[3]{x^3+1} - x)$$

es. 2 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua. Sia $f(0)=1$ e $f(1)=0$. Si provi che per ogni numero reale $\lambda\geq 0$ esiste $x\in[0,1]$ tale che

$$f(x)=\lambda x.$$

es. 3 Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continua. Si Supponga che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ e che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. Si dimostri che esiste almeno un valore $\xi\in\mathbb{R}$ tale che $f(\xi)=0$.

es. 4 Sia $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$, continua. Si supponga che esistano due successioni $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ in $[0,\infty[$ tali che $\lim_n x_n = \lim_n y_n = +\infty$ e tali che per ogni $n\in\mathbb{N}$ si abbia $x_n\leq y_n\leq x_{n+1}$. Si supponga inoltre che

$$\lim_n f(x_n) = -\infty, \qquad \lim_n f(y_n) = +\infty.$$

Si provi che per ogni $\lambda\in\mathbb{R}$ esiste una successione $(z_n)_n$ in $[0,\infty[$ tale che $\lim_n z_n = +\infty$ e

$$\lim_n f(z_n) = \lambda.$$

es. 5 Sia $f:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$, continua. Si supponga che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \sin x = 0.$$

Si provi che l'equazione $f(x)=0$ ha infinite soluzioni.

es. 6 Siano $f,\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continue. Si supponga che f sia crescente e che g sia decrescente. Sia $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Si dimostri che esiste $\xi\in\mathbb{R}$ tale che $f(\xi)=g(\xi)$. Si provi che se una delle due funzioni è strettamente monotona allora tale ξ è unico. Si usi questo risultato per provare che se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è continua e monotona allora l'equazione $[f(x)]^2 = x^2$ ha sempre soluzione in $\mathbb{R}$.

es. 7 Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali. Dimostrare che l'equazione

$$e^x \sin x = P(x)$$

ammette sempre infinite soluzioni.

es. 8

i) Si costruisca una funzione $g :]0,1[\to [0,1]$ che sia continua e suriettiva.
ii) Si dimostri che non esiste una funzione $h : [0,1] \to]0,1[$ che sia continua e suriettiva.

es. 9 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua. Si supponga che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

Si provi che f ha massimo o minimo assoluti.

es. 10 Sia $f : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ continua. Sia $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Si dimostri che f ha massimo e minimo assoluti.