

## Tutorato di Analisi Matematica 1 – 2009/10 – N.4

**Key words:** intorno di un punto in uno spazio metrico, intorno di  $+\infty$ , intorno di  $-\infty$ , successione a valori in uno spazio metrico, limite di una successione a valori in uno spazio metrico, successione convergente, limite di una successione a valori in  $\mathbb{R}$ , successione convergente in  $\mathbb{R}$ , successione divergente, unicità del limite, limitatezza di una successione convergente, confronto di successioni, operazioni con i limiti, forme indeterminate.

**es. 1)** Provare che dato un qualunque insieme  $B$ , sottoinsieme di uno spazio metrico, si ha  $\overline{B} \cap \overline{CB} = \partial B$ . Dedurre che  $\partial B$  è chiuso.

**es. 2)** Provare che  $\partial B = \partial(CB)$ .

**es. 3)** Sia  $C$  un insieme chiuso. Provare che  $\partial C$  non può avere punti interni. Dare un esempio di insieme con frontiera che ha punti interni. Ci sono insiemi aperti con tale proprietà?

**es. 4)** Sia  $K$  un insieme chiuso in  $\mathbb{R}$ . Provare che esiste un insieme  $B$  tale che  $\partial B = K$ .

**es. 5)** Sia  $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 < 0, x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4\}$ .

i) Si determinino  $\bar{A}, A^\circ, \partial A, \mathcal{D}A$ .

ii) Si calcoli  $d = \sup_{x, y \in A} |x - y|$ .

iii) Si determinino due successioni  $(x_n)_n, (y_n)_n$  a valori in  $A$  tali che

$$\lim_n |x_n - y_n| = d.$$

**es. 6)** Sia  $E = (\bigcup_{n=1}^{\infty} ]\frac{1}{4n}, \frac{1}{4n-1}]) \cup \{0\}$ .

i) Determinare  $\bar{E}, \mathcal{D}E, E^\circ, \partial E$ .

ii) Provare che non esistono insiemi di  $\mathbb{R}$  limitati hanno frontiera illimitata.

iii) Provare che esistono insiemi di  $\mathbb{R}$  illimitati che hanno frontiera limitata.

**es. 7)** Si verifichi usando la definizione di limite che

$$\lim_n \frac{\sin n}{n} = 0, \quad \lim_n \frac{n+1}{2n+3} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_n \sqrt{n+1} = +\infty, \quad \lim_n \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 0.$$

**es. 8)** Calcolare

$$\lim_n 2^n - n, \quad \lim_n \sqrt{\frac{n^2+n}{2n^2-1}}, \quad \lim_n n - \sqrt{n^2+n},$$

$$\lim_n \frac{n+n^2+\sin n^4}{n+\sqrt{n}+\cos n^{12}}, \quad \lim_n \frac{\sqrt{n+n^2}-n}{\sqrt[3]{n+n^3}-n},$$

$$\lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n+2+\sin\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad \lim_n n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$