Tutorato di Analisi Matematica 1 – 2009/10 – N.3

Key words: prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, palle aperte e chiuse, intorni di un punto in uno spazio metrico, insiemi aperti e chiusi, chiusura di un insieme, punti di accumulazione, insieme derivato, punti interni, interno di un insieme, punti di frontiera.

es. 1) Si determinino sup, inf, chiusura, derivato, interno e frontiera dei seguenti insiemi

i)
$$A = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup \,]2,3[\ ;$$

ii)
$$E = \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\};$$

iii)
$$F = (\bigcup_{j=0}^{+\infty} [\sqrt{j}, \sqrt{j+1}]) \cap \mathbb{Q};$$

vi)
$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < |x| + |y| \leq 1\};$$

v)
$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \mathbb{Q}, \ y < 0, \ x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

es. 2) Si provi che dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e superiormente limitato, se $\sup A \notin A$ allora $\sup A$ è punto di accumulazione per A.

es. 3) Sia
$$E = \{\frac{mn}{m^2+n^2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \ : \ m,n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

i) Si determinino $\inf E$ e $\sup E$;
ii) si determini $\mathcal{D}E$.

es. 4) Si dimostri che l'unione di una qualunque famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto. Si provi con un esempio che la stessa cosa non vale per l'intersezione.

es. 5) Si provi che $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ e che in generale non vale $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

es. 6) Si dimostri che $\overline{\mathcal{D}A} = \mathcal{D}A$.

es. 7) Si dimostri che $\partial(\overline{A}) \subseteq \overline{\partial A}$ e che in generale non vale l'uguaglianza. Si dica qual è il rapporto tra $\partial(\mathcal{D}A)$ e $\mathcal{D}(\partial A)$.

es. 8) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 1 \leq |x| + |x-2| < 3\}$. Si determinino $\overline{A}$, A°, $\mathcal{D}A$, ∂A, $\overline{(A^\circ)}$, $(\,\overline{A}\,)^\circ$, $(\mathcal{D}A)^\circ$.

es. 9) Sia C sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Definiamo
$$\text{diam}\,(C) = \sup\{|x-y| \ : \ x, y \in C\}.$$

i) Si provi che se C non limitato allora diam $(C) = +\infty$;
ii) si dia un esempio di insieme C limitato tale che per ogni x, $y \in C$ si abbia diam $(C) > |x-y|$.

es. 10) Siano C, D sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$. Definiamo
$$d(C,D) = \inf\{|x-y| \ : \ x \in C, \ y \in D\}.$$
Si dia un esempio di C e D tali che $d(C,D) = 0$ e $C \cap D = \emptyset$.