Tutorato di Analisi Matematica 1 – 2009/10 – N.2

Key words: funzioni potenza e radice, fattoriale, coefficienti binomiali, triangolo di Tartaglia, teorema del binomio, insiemi induttivi, numeri naturali, principio di induzione, assiomi di Peano, dimostrazioni per induzione, distanza, spazi metrici.

esercizio 1) Risolvere le seguenti diseguaglianze:

i)
$$\sqrt{x^2 - x + 1} \le x + 3;$$

ii)
$$\sqrt{x^2 - 2x + 4} \ge x - 3;$$

iii)
$$\frac{|x-3|}{|2x+1|} \ge \frac{1}{2}.$$

esercizio 2) Fissato $n \in \mathbb{N}$, provare le seguenti identità:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n, \qquad \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0, \qquad \sum_{\substack{k,j=0\\ k \ge j}}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-j)!j!} = 3^n.$$

esercizio 3) Dato un insieme A con n elementi, denotiamo con α uno di questi.

i) Quanti sono i sottoinsiemi di A con k elementi?
ii) Quanti sono i sottoinsiemi di A con k elementi, che contengono α?
iii) Quanti sono i sottoinsiemi di A con k elementi, che non contengono α?
iv) Dedurre dalle risposte precedenti la legge di Stiefel.

esercizio 4) Usando il principio di induzione provare che:

i) fissato $a \ge 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(1+a)^n \ge 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 \quad \text{(dis. di Bernoulli generalizzata)};$$

ii) per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale

$$1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (2+1) + \cdots = n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

iii) per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3};$$

iv) per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale

$$\binom{3n}{n} \ge 3^n; \qquad \binom{4n}{2n} \ge 4^n.$$

esercizio 5) Provare che le seguenti funzioni sono distanze in $\mathbb{R}^2$:

$$d_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \qquad d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{|x_1 - y_1|,\ |x_2 - y_2|\},$$

$$d_P((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{se} \quad x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{se} \quad x_1 \ne y_1, \end{cases}$$

$$d_M((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \begin{cases} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} & \text{se} \quad x_1 y_2 = x_2 y_1 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} & \text{se} \quad x_1 y_2 \ne x_2 y_1. \end{cases}$$