**Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.**

**Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)**

**Trieste, 29 giugno 2010**

**Esercizio 1.** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2 + \sin^2 x}, \qquad \lim_{x\to -\infty} x(\log\sqrt{1-x} - \log\sqrt{2-x}).$$

**Esercizio 2.**

i) Si studi la funzione $f(x) = -\dfrac{1}{x+1} + \log(1 + \dfrac{1}{x})$.

ii) Si dica dove è crescente e dove è decrescente la funzione $g(x) = x\log(1 + \dfrac{1}{x})$.

**Esercizio 3.** Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, continua. Si supponga che $f(0) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

i) Si provi che $f$ ha minimo assoluto.

ii) Si trovi un esempio di $f$ che non abbia massimo assoluto.

iii) Si provi che $f$ non può essere convessa.

**Esercizio 4. (LT in Fisica)** Si determini il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{n\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \int_n^{2n} xe^{-x^2}\, dx.$$

**Esercizio 4. (LT in Matematica)** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$, sia $x \in \mathbb{R}^2$ e si definisca

$$\delta_A(x) = \inf\{|x - y| \,:\, y \in A\}.$$

i) Si provi con un esempio che se $A$ non è chiuso allora $\delta_A(x) = 0$ non implica $x \in A$.

ii) Si provi che se $A$ è chiuso e $\delta_A(x) = 0$ allora $x \in A$.

iii) Si provi che se $A$ è chiuso e $\delta_A(x) = \rho > 0$ allora esiste $\bar{y} \in A$ tale che $\delta_A(x) = |x - \bar{y}|$.