

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Trieste, 20 giugno 2011

**Esercizio 1.** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 - \cos x}, \quad \lim_n (1 + \sin \frac{1}{n})^{\sqrt{n}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x+1}} - \sqrt{e^{x+1}}.$$

**Esercizio 2.**

- i) Si studi la funzione  $f(x) = \log(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$ .
- ii) Si dica dove è crescente e dove è decrescente la funzione  $g(x) = x(\log(1 + \frac{1}{x})) - 1$ .
- iii) Si determini il valore di  $f(x)$  in  $x = 9$  con un errore inferiore a  $10^{-5}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Si supponga che  $f(0) = -1$  e che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ . Si provi che:

- i) se  $f$  è continua allora l'equazione  $f(x) = 0$  ha almeno una soluzione;
- ii) se  $f$  è derivabile allora non è possibile che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ ;
- iii) se  $f$  è convessa allora  $f(1) \leq 0$ .

**Esercizio 4. (LT in Fisica)** Si determini il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{n})^2, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} x e^x dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\pi)(\sin \frac{1}{n}).$$

**Esercizio 4. (LT in Matematica)** Sia  $A = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ .

- i) Determinare la chiusura, l'interno la frontiera e il derivato di  $A$ ;
- ii) dire se esiste ed eventualmente dare un esempio di successione a valori in  $A$  che non ammette sottosuccessioni convergenti ad un punto di  $A$ ;
- iii) stessa domanda del punto precedente con il derivato di  $A$  al posto di  $A$ .