Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Trieste, 1 settembre 2010

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \left(e^{\sqrt{n}} - \sqrt{e^n}\right), \qquad \lim_{x\to 1} \frac{xe^x - e}{\log x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} x^2(x - \sqrt[3]{x^3 - 1}).$$

Esercizio 2.

i) Si studi la funzione $f(x) = \log x + \dfrac{x}{x-1}$.

ii) Si usi il punto precedente per determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$x \log x + \frac{x^2}{x-1} = 0.$$

iii) Detta $g(x) = x \log x + \dfrac{x^2}{x-1}$, si usino eventualmente i punti precedenti per dire se, dato un qualunque $\gamma \in \mathbb{R}$ contenuto nell'intervallo di estremi $g(1/2)$ e $g(3/2)$, esista un $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tale che

$$g(\bar{x}) = \gamma.$$

Esercizio 3. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, continua.

i) Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(2n) = n$, è vero che $f([0, +\infty[) = \mathbb{R}$?

ii) Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \dfrac{(-1)^n n}{2}$, è vero che $f([0, +\infty[) = \mathbb{R}$?

iii) Se $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$ e f è convessa, è vero che $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$?

N.B. Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Esercizio 4. (LT in Fisica) Si determini il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (\log(n+1) - \log n)^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} xe^{-x}\, dx.$$

Esercizio 4. (LT in Matematica)

i) Supponendo che valga la seguente affermazione: per ogni x, y, $z \in [0, +\infty[$ si ha

$$x \leq y + z \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z},$$

si provi che se $\delta(a, b)$ è una distanza su un insieme E, anche $\delta'(a, b) = \dfrac{\delta(a, b)}{1 + \delta(a, b)}$ lo è.

ii) Si provi che una palla con raggio maggiore o uguale a 1 rispetto alla distanza δ' coincide con tutto E.

iii) Si provi che dato $a_0 \in E$, gli intorni di a_0 sono gli stessi sia rispetto alla distanza δ che rispetto alla distanza δ'.