

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Trieste, 16 settembre 2010

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n n(\log(n+2) - \log(n-2)), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - x}{\tan x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}).$$

Esercizio 2.

- i) Si studi la funzione $f(x) = x^2 e^x$.
- ii) Per la f del punto precedente si scriva l'approssimante lineare nel punto $x_0 = 1$.
- iii) Per la f del punto *i*) si scriva la formula di Taylor con il resto di Lagrange, fino all'ordine 3, nel punto $x_0 = 0$.

Esercizio 3. Sia $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, continua. Si supponga che, per ogni $x \in [1, +\infty[$ si abbia

$$|f(x) - \sin x| \leq \frac{1}{x}.$$

- i) Si provi che f è limitata.
- ii) Si provi che non esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- iii) Si provi che l'equazione $f(x) = 0$ ha infinite soluzioni.

Esercizio 4. (LT in Fisica) Si determini il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$d(x, y) = \sqrt{2|x-y|} \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$

- i) Stabilire se d è una distanza su \mathbb{R} .
- ii) Stabilire se esistono due costanti positive A e B tali che

$$A|x-y| \leq d(x, y) \leq B|x-y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}.$$