Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito A -Trieste, 16 febbraio 2011

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2 - \cos^2 x}{\log(\cos x)}, \qquad \lim_n n \sqrt[n]{\binom{4n}{n}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x(\log(x^2+1) - \log(x^2-1)).$$

Esercizio 2.

i) Si studi la funzione $f(x) = \log(1+x^2) + \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (n.b. gli zeri **non** possono essere determinati in modo esplicito).

ii) Si dica dove è crescente e dove è decrescente la funzione $g(x) = x(\log(1+x^2) - 1)$.

iii) Si determini il valore di $\dfrac{g(x)}{x} + 1$ in $x = \frac{1}{10}$ con un errore inferiore a 10^{-5}.

Esercizio 3. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, continua. Si supponga $\lim_n (-1)^n f(n) = -3$. Si provi che:

i) $]-3, 3[\subseteq f([0, +\infty[)$;

ii) esiste una successione $(y_n)_n$ tale che $\lim_n y_n = +\infty$ e per ogni n vale $f(y_n) = 0$;

iii) se f è derivabile allora esiste una successione $(z_n)_n$ tale che $\lim_n z_n = +\infty$ e per ogni n vale $f'(z_n) = 0$.

Esercizio 4. (LT in Fisica) Si determini il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\arcsin(\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}.$$

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su I intervallo. Si supponga che per ogni $x \in I$ si abbia $|f'(x)| \le 1/2$.

i) Provare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|f(x) - f(y)| \le \dfrac{|x-y|}{2}$.

ii) Provare che f manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.

iii) Provare che se f è suriettiva allora I è illimitato.

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito B - Trieste, 16 febbraio 2011

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\tan x - x}, \qquad \lim_n \frac{1}{n}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x\left(\log\left(\sqrt{x+\frac{1}{x}}\,\right)-\log(\sqrt{x})\right).$$

Esercizio 2.

i) Si studi la funzione $f(x)=\log(1+x^2)+\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ (n.b. gli zeri **non** possono essere determinati in modo esplicito).

ii) Si dica dove è crescente e dove è decrescente la funzione $g(x)=x(\log(1+x^2)-1)$.

iii) Si determini il valore di $\dfrac{g(x)}{x}+1$ in $x=\frac{1}{10}$ con un errore inferiore a 10^{-5}.

Esercizio 3. Sia $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, continua. Si supponga $\lim_n(-1)^n f(n)=2$. Si provi che:

i) $]-2,2[\subseteq f([0,+\infty[)$;

ii) esiste una successione $(y_n)_n$ tale che $\lim_n y_n=+\infty$ e per ogni n vale $f(y_n)=0$;

iii) se f è derivabile allora esiste una successione $(z_n)_n$ tale che $\lim_n z_n=+\infty$ e per ogni n vale $f'(z_n)=0$.

Esercizio 4. (LT in Fisica) Si determini il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\int_n^{n+\frac{1}{n}}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}-\arctan n}.$$

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $f:I\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile su I intervallo. Si supponga che per ogni $x\in I$ si abbia $|f'(x)|\le 1/2$.

i) Provare che per ogni $x,\,y\in\mathbb{R}$ si ha $|f(x)-f(y)|\le\dfrac{|x-y|}{2}$.

ii) Provare che f manda successioni di Cauchy in successioni di Cauchy.

iii) Provare che se f è suriettiva allora I è illimitato.