Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Trieste, 14 giugno 2010

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-1})\log x, \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x-\arcsin x}}{x+\arcsin x}, \qquad \lim_n (1-\sin\frac{1}{n})^n.$$

Esercizio 2.

i) Si studi la funzione $f(x)=(x^2+x)e^{-x}$.

ii) Detta, per ogni $n\geq 1$, x_n la soluzione dell'equazione $(x^2+x)e^{-x}=1/n$ tale che $0<x_n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, si provi che $\lim_n x_n=0$.

Esercizio 3. Sia $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$. Si supponga che $\lim_n f(2n)=1$ e che $\lim_n f(2n+1)=-1$. Si provi che

i) se f è continua allora esiste una successione (z_k) tale che $\lim_k z_k=+\infty$ e per ogni k, $f(z_k)=0$;

ii) se f è derivabile allora esiste una successione (ξ_k) tale che $\lim_k \xi_k=+\infty$ e per ogni k, $f'(\xi_k)=0$;

iii) se f è derivabile fino all'ordine m allora esiste una successione (η_k) tale che $\lim_k \eta_k=+\infty$ e per ogni k, $f^{(m)}(\eta_k)=0$;.

Esercizio 4. (LT in Fisica) Determinare il comportamento delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt[3]{n^3+1}-n, \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{x^2-1}\,dx, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\sqrt[n]{n}}{(\log n)^n}.$$

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $A=\{\frac{k+1}{k}+\frac{n}{3^k}\ :\ n,k\in\mathbb{N},\ k\geq 1 \text{ e } 0\leq n\leq 2^k\}$.

i) Determinare $\bar{A}$, A°, ∂A e $\mathcal{D}A$.

ii) Esistono successioni a valori in A che non hanno sottosuccessioni convergenti?

iii) Esistono successioni a valori in A che non hanno sottosuccessioni convergenti ad un punto di A?