

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Trieste, 11 luglio 2011

**Esercizio 1.** Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2 \sin x)}{\tan x}, \quad \lim_n \frac{n + \sin n + \sin(1/n)}{\sqrt{n^2 + n} + \tan(1/n)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\cos x} - e^{\sqrt{x^2+1}}}{x\sqrt{x}}.$$

**Esercizio 2.**

- i) Si studi la funzione  $f(x) = 2x - 3 \log(1 + x^2)$ .  
(Per disegnare il grafico di  $f$  può esser utile ricordare che  $\log 2 > 0,69$ ).
- ii) Si dica al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$  se e quante soluzioni ha l'equazione  $\lambda + 2x - 3 \log(1 + x^2) = 0$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Si supponga che  $f(0) = 0$  e che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

- i) Si provi che  $f$  ha minimo.
- ii) L'insieme dei punti di minimo può essere illimitato? Può essere infinito?

**Esercizio 4. (LT in Fisica)**

- i) Si calcoli l'area dell'ellisse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  (suggerimento: scrivere  $y$  in funzione di  $x$  nel primo quadrante).
- ii) Si trovi il max di  $f(x) = \int_0^{\sin x} e^t dt$  in  $[0, \pi]$ .
- iii) Si studi il carattere della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin(1/n) - \tan(1/n))$ .

**Esercizio 4. (LT in Matematica)**

- i) Si determini la chiusura, l'interno la frontiera e il derivato dell'insieme  $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} ([\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}[ \cup \{n\})$ .
- ii) Si dica se esiste ed eventualmente si dia un esempio di successione a valori in  $A$  che non ammette sottosuccessioni convergenti ad un punto della chiusura di  $A$ ;
- iii) Esiste una funzione continua da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  tale che l'immagine del derivato di  $A$  non sia un chiuso? Se sì, si dia un esempio, se no, si spieghi il perché.