Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito A - Trieste, 21 gennaio 2010

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n (n+1)^n - n^{n+1}, \qquad \lim_n \sqrt{n}\,(\sin(n+\frac{1}{n}) - \sin n),$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(\arccos x)^2}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}.$$

Esercizio 2.

i) Si studi la funzione $f(x) = (1+\frac{1}{x})e^{-x^{-2}}$.

ii) Si dica se esiste ed eventualmente si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

sia continua.

iii) Si dica, motivando la risposta, se e dove $\tilde{f}$ è derivabile e si calcoli $\tilde{f}'$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile.

i) Si provi che se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

ii) Si provi che se $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ esiste e vale $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ allora $L = 0$.

iii) Si provi che se f è convessa allora esistono $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$.

Esercizio 4. (LT in Fisica) Si determini il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\sin(\frac{1}{n})\tan(\frac{1}{n})}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\binom{2n}{n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\pi)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$. Motivando le risposte, dire se:

i) esiste una successione di punti di A che converge ad un punto di $\mathcal{C}A$?

ii) Esiste una successione di punti di $\mathcal{C}(\bar{A})$ che converge ad un punto di $\bar{A}$?

iii) Esiste una successione di punti di A che che non ammette sottosuccessioni convergenti ad un punto di $\bar{A}$?

Università di Trieste, Facoltà di Scienze M. F. N.

Esame di Analisi Matematica 1 (LT in Fisica e LT in Matematica)

Compito B - Trieste, 21 gennaio 2010

Esercizio 1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n (n+1)^{n-1} - n^n, \qquad \lim_n n\left(\cos(n+\frac{1}{n^2}) - \cos n\right),$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arcsin x}{\sqrt{-\log(\cos x)}}.$$

Esercizio 2.

i) Si studi la funzione $f(x) = (1-\frac{1}{x})e^{-x^{-2}}$.

ii) Si dica se esiste ed eventualmente si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

sia continua.

iii) Si dica, motivando la risposta, se e dove $\tilde{f}$ è derivabile e si calcoli $\tilde{f}'$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile.

i) Si provi che se $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = -1$ allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

ii) Si provi che se $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ esiste e vale $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$ allora $L = 0$.

iii) Si provi che se f è convessa allora esistono $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$.

Esercizio 4. (LT in Fisica) Si determini il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\tan(\frac{1}{n})\arctan(\frac{1}{n})}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}^2 4^{-n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{2}+n\pi)(\sqrt{n^2+1}-n).$$

Esercizio 4. (LT in Matematica) Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0,\ y < 0,\ x^2+y^2 \in [1,+\infty[\cap \mathbb{Q}\}$. Motivando le risposte, dire se:

i) esiste una successione di punti di A che converge ad un punto di $\mathcal{C}A$?

ii) Esiste una successione di punti di $\mathcal{C}(\bar{A})$ che converge ad un punto di $\bar{A}$?

iii) Esiste una successione di punti di A che che non ammette sottosuccessioni convergenti ad un punto di $\bar{A}$?