Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Esame di Analisi 3 mod. A (6 CFU - LT in Matematica)

Trieste, 9 luglio 2015

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = -x^3 + x^2 + y^2 - xy^2 + 4x - 4.$$

i) Si determinino i punti critici e la loro natura.

ii) Si calcoli $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1, 1)$, dove $\underline{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

iii) Si scriva la formula di Taylor per f, fino al secondo ordine, relativamente al punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

iv) Si determini il minimo e il massimo di f sul vincolo $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio 2.

i) Sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Si supponga che la successione $(f_n)_n$ converga uniformemente a 0. Si provi che esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq \bar{n}$, f_n è una funzione limitata.

ii) Si determini l'insieme $E \subseteq [0, +\infty[$ su cui è convergente puntualmente la successione $(g_n)_n$, con $g_n(x) = e^x - (1 + \frac{x}{n})^n$.

iii) Eventualmente utilizzando il punto i), si dica se la successione del punto ii) converge uniformemente sull'insieme E.

vi) Si dica se sull'insieme $F = [0, 1]$, la successione del punto ii) converge uniformemente (potrebbe essere utile ricordare che per $x \in [0, +\infty[$ vale

$$(1 + \frac{x}{n})^n \leq (1 + \frac{x}{n+1})^{n+1} \leq e^x.)$$

Esercizio 3. Si consideri il seguente problema

$$\begin{cases} u' - tu = 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

i) Si dica per quali valori $(t_0, u_0) \in \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0\}$ la soluzione esiste ed è unica.

ii) Si calcoli esplicitamente la soluzione nel caso $(t_0, u_0) = (0, 1)$ e $(t_0, u_0) = (1, 0)$.