Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Geoscienze

Esame di Analisi 3 mod. A (6 CFU - LT in Matematica)

Trieste, 10 febbraio 2015

Esercizio 1. Si consideri, per $n \geq 1$ e $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = (1 - x^2)^n x.$$

i) Si dica se e dove la successione $(f_n)_n$ converge puntualmente e se ne calcoli la funzione limite.

ii) Si dica se la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente sul dominio di convergenza puntuale.

iii) Si determini il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è puntualmente convergente.

iv) Si dica se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è totalmente convergente.

iv) Si dica se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente.

Esercizio 2.

i) Si determini il massimo della funzione $f(x, y, z) = (xyz)^{1/3}$ sull'insieme

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ , \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ x + y + z = k\}, \ (k > 0).$$

ii) Si provi che se $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$ allora

$$(xyz)^{1/3} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

Esercizio 3. Si determinino tutte la soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' + 2u' + u = te^{-t} + t.$$

Esercizio 4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \dfrac{tu}{t + u} \\ u(1) = a \end{cases}$$

i) Si dica per quali valori di a vi è esistenza e unicità locale della soluzione.

ii) Si determini la soluzione nel caso $a = 0$.

iii) Detta $u :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}$ la soluzione massimale nel caso $a = 1$, si determini β (può essere utile ricordare che se f è crescente e di classe $\mathcal{C}^1$ su $]\alpha, \beta[$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $\lim_{t \to \beta^-} f(t) = +\infty$, allora $\lim_{t \to \beta^-} f'(t) = +\infty$).

iv) Per la u del punto iii) si determini α.