

**Università di Trieste, Dipartimento di Matematica e Geoscienze**  
**Esame di Analisi 3 mod. A (6 CFU - LT in Matematica)**  
**Trieste, 22 gennaio 2015**

**Esercizio 1.** Si consideri, per  $n \geq 1$  e  $x \geq 0$

$$f_n(x) = \frac{xn}{n + x\sqrt{n}}.$$

- i) Si provi che la successione  $(f_n)_n$  converge puntualmente e se ne calcoli la funzione limite.
- ii) Si provi che per ogni  $a > 0$ , la convergenza è uniforme su  $[0, a]$ .
- iii) Si calcoli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\sqrt{n}} \frac{x}{x+n} dx.$$

**Esercizio 2.** Sia  $f(x, y, z) = xy + 3xz + 2yz$ .

- i) Si determinino il gradiente e l'hessiana di  $f$ .
- ii) Si determini la natura dei punti critici di  $f$ .
- iii) Si determini  $\inf f$  e  $\sup f$  sull'insieme  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y + z = 1\}$ .

**Esercizio 3.** Sia l'ellisse di equazione  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ . Tra tutti i rettangoli che hanno i lati paralleli agli assi dell'ellisse e i vertici sull'ellisse, si determini quello di area massima.

**Esercizio 4.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 - t^2 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

- i) Si dica se esiste e se unica la soluzione locale.
- ii) Si determini il dominio della soluzione massimale.
- iii) Detto  $] \alpha, \beta [$  il dominio della soluzione massimale, si calcoli  $\lim_{t \rightarrow \beta^-} u(t)$ .
- iv) La soluzione massimale ha un asintoto? se sì qual è tale asintoto?