

# Compito Analisi 1

19/01/2009

## Gruppo A

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{a) } \lim_n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^3}; \quad \text{b) } \lim_n \frac{\sqrt[n]{n(2n)!}}{n^2}; \quad \text{c) } \lim_n n \log(n \sin(1/n))$$

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2 - \sin x^2}{\arcsin x - x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x - x + 1}{(\log x)^2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x - \cos x - \sin x}}{(\tan x)^2}$$

3. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = -1$$

- (a) provare che esiste  $\xi \in \mathbb{R}$  tale che  $f'(\xi) = 0$
- (b) provare che  $f'(\mathbb{R}) \supseteq (-1, 2)$
- (c) provare che se  $f$  è convessa allora vale anche  $f'(\mathbb{R}) \subseteq [-1, 2]$

4. **Solo per i fisici!!!**

Studiare il comportamento delle seguenti serie

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 + \sin(n^2)}{2n^3 + 3}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2)}{n^2}; \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \sin(n - \sqrt{n^2 - 1})$$

5. **Solo per i matematici!!!**

- (a) Determinare tutti e soli i sottoinsiemi  $A$  di  $\mathbb{R}$  tali che  $A$  sia limitato e  $\mathcal{D}(A) = \emptyset$
- (b) Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ , non necessariamente limitato, tale che  $\mathcal{D}(A) = \emptyset$ . Provare che esiste una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  che sia suriettiva

# Compito Analisi 1

19/01/2009

## Gruppo B

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{a) } \lim_n \frac{\sqrt[n]{n^2 n!}}{n}; \quad \text{b) } \lim_n n^4 \log(n^2 \sin(1/n^2)); \quad \text{c) } \lim_n \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$$

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(2\pi x) - 1}{(\log x)^2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - \cos x + \sin x - \sin x^2}{(\tan x)^2}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sinh x)^2 - \sinh x^2}{\arctan x - x}$$

3. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x) = 1$$

- (a) provare che esiste  $\xi \in \mathbb{R}$  tale che  $f'(\xi) = 0$
- (b) provare che  $f'(\mathbb{R}) \supseteq (-2, 1)$
- (c) provare che se  $f$  è convessa allora vale anche  $f'(\mathbb{R}) \subseteq [-2, 1]$

4. **Solo per i fisici!!!**

Studiare il comportamento delle seguenti serie

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n^3)}{n^3}; \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tan(n - \sqrt{n^2 + 1}); \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-n^4 + \cos(n)}{5n^4 + 2}$$

5. **Solo per i matematici!!!**

- (a) Determinare tutti e soli i sottoinsiemi  $A$  di  $\mathbb{R}$  tali che  $A$  sia limitato e  $\mathcal{D}(A) = \emptyset$
- (b) Sia  $A \subseteq \mathbb{R}$ , non necessariamente limitato, tale che  $\mathcal{D}(A) = \emptyset$ . Provare che esiste una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  che sia suriettiva