

Compito Analisi 1

06/02/2009

Gruppo A

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{a) } \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n+2+\sin(1/n)}; \quad \text{b) } \lim_n n \left(e^{1/n} - e^{1/n^2} \right); \quad \text{c) } \lim_n \frac{\log(n(n+1) \cdots (2n))}{n}$$

2. Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, dire quante soluzioni ha l'equazione

$$f_\lambda(x) = e^x - \lambda x = 0.$$

(suggerimento: può essere utile studiare brevemente la funzione f_λ per i diversi valori di λ)

3. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) . Supponiamo che esistano

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'_-(b).$$

Provare che

- (a) se $f'_+(a) < 0$ allora a è punto di massimo relativo per f
- (b) se $f'_-(b) > 0$ allora b è punto di massimo relativo per f
- (c) se $f'_+(a) < 0$ e $f'_-(b) > 0$ allora esiste un punto di minimo interno a (a, b)

4. **Solo per i fisici!!!**

(a) Calcolare

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^{1000}$$

- (b) Trovare le radici terze di -8
- (c) Risolvere l'equazione

$$z^2 + z(4i + 2) - 4 + (4 + \sqrt{3})i = 0$$

5. **Solo per i matematici!!!**

Provare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\binom{3n}{n} \geq 3^n$$

Compito Analisi 1

06/02/2009

Gruppo B

1. Calcolare i seguenti limiti

a) $\lim_n n (\cos(1/n) - \cos(1/n^2))$; b) $\lim_n \frac{\log((2n)(2n+1) \cdots (3n))}{n+1}$; c) $\lim_n \sin(1/n) \sqrt{n + \cos(1/n)}$

2. Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, dire quante soluzioni ha l'equazione

$$f_\lambda(x) = \log(x) - \lambda x = 0.$$

(suggerimento: può essere utile studiare brevemente la funzione f_λ per i diversi valori di λ)

3. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) . Supponiamo che esistano

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'_-(b).$$

Provare che

- (a) se $f'_+(a) < 0$ allora a è punto di massimo relativo per f
- (b) se $f'_-(b) > 0$ allora b è punto di massimo relativo per f
- (c) se $f'_+(a) < 0$ e $f'_-(b) > 0$ allora esiste un punto di minimo interno a (a, b)

4. **Solo per i fisici!!!**

- (a) Trovare le radici terze di 27
- (b) Risolvere l'equazione

$$z^2 - z(4i + 2) - 4 + (4 + \sqrt{3})i = 0$$

- (c) Calcolare

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)^{100}$$

5. **Solo per i matematici!!!**

Provare che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\binom{4n}{2n} \geq 4^n$$