

Università di Trieste – Facoltà di Scienze M. F. N.

Prova scritta di Analisi Matematica I

Trieste, 11 giugno 2009

1. Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_n \frac{\cos e^n}{\log n}, \quad \lim_n ((n+1)(n+2)\dots(2n))^{1/n}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x} (e^{1/x^2} - e^{1/x^3}).$$

2. Si studi la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \log x,$$

determinandone dominio, segno, limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, derivata prima, crescita e decrescita, massimi e minimi, derivata seconda, concavità e convessità, flessi e un abbozzo di grafico.

3. Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione convessa. Si provi che:

- i)* se $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$ con $x_0 < x_1$ e se $f(x_0) \leq f(x_1)$ allora f è crescente su $[x_1, +\infty[$;
- ii)* se non esiste $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tale che f sia crescente su $[\bar{x}, +\infty[$ allora f è decrescente su tutto \mathbf{R} ;
- iii)* se $x_0, x_1 \in \mathbf{R}$ con $x_0 < x_1$ e se $f(x_0) = f(x_1)$ allora f è costante su $[x_0, +\infty[$ oppure $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. (corso di laurea in Fisica). Si determini il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \log \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\log(\cosh \frac{1}{n})}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} x e^{-x^2} dx.$$

4. (corso di laurea in Matematica). Siano $A, B \subset \mathbf{R}^2$. Definiamo

$$d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}.$$

- i)* Si trovi un esempio per A e B tali che $d(A, B) = 0$ e $A \cap B = \emptyset$;
- ii)* si provi che se $d(A, B) = 0$ allora esistono due successioni $(x_n)_n$ in A e $(y_n)_n$ in B tali che $\lim_n |x_n - y_n| = 0$;
- iii)* si provi che se A è compatto, B è chiuso e $d(A, B) = 0$ allora $A \cap B \neq \emptyset$;
- iv)* (facoltativo) per il risultato del punto *iii)* basta che A sia chiuso?